

# 종동절의 상대가속도를 이용한 원반 캠의 곡률반경 결정법에 관한 연구

신중호\*, 강동우\*\*, 김종수\*\*\*, 김대원\*\*\*\*

## A Study on Curvature Determination Approach of Disk Cams Using Relative Accelerations of Followers

Joong Ho Shin\*, Dong Woo Kang\*\*, Jong Soo Kim\*\*\*, Dae Won Kim\*\*\*\*

### ABSTRACT

There are two major factors which affect the cam design; the pressure angle and the radius of curvature. Cam shape will have an instantaneous radius of curvature at every point. Even though the design constraint of the pressure angle has been satisfied, the follower may still not complete the desired contact motion. If the radius of the follower roller is larger than the concave(negative) radius on the cam, it occurs the gap between the cam and the follower roller at the contact point. And also if the curvature of the pitch curve of the cam is too sharp, the cam profile may be undercut. This paper proposes a new approach which uses the relative velocity of the follower roller parallel to the tangent line at the contact point on the cam surface for determining the pressure angle and the relative acceleration for determining the radius of curvature.

**Key Words** : Disk Cam (원반 캠), Pressure Angle (압력각), Radius of Curvature (곡률반경), Relative Velocity (상대속도), Relative Acceleration (상대가속도), Translating Roller Follower (직선병진운동 롤러 종동절)

### 1. 서론

본 논문에서는 원반형 캠기구 중에서 롤러 종동절을 가진 직선 병진 운동용 캠의 원활한 운동과 구속조건(접촉유지)을 만족하는 형상 정의의를 위해 필요한 압력각과 곡률반경 결정법에 대해 논의한다. 압력각은 캠에 대한 종동절의 상대속도가 접촉점에서의 접선방향과 평행하다는 것을 이용하여 찾게 되며, 종동절의 롤러 위치에서 압력각을 이용하

여 캠의 형상좌표를 찾아낸다. 곡률반경은 캠에 대한 종동절의 상대속도와 상대가속도로부터 결정되는데, 캠 형상의 모든 표면 좌표점에서 각각의 곡률반경을 가지게 되며 캠의 형상이 블록에서 오목으로 또는 그 반대로 바뀌는 곳에서 변곡점이 발생한다. 비록 압력각이 일정한 범위내에 존재하여 캠의 형상정의가 설계상에는 문제 없이 이루어졌다고 해도 곡률반경의 절대값이 너무 작아지게 되면 캠의 일정 표면은 종동절이 접촉하지 않거나 형상이

\* 창원대 기계설계공학과  
\*\* 창원대 기계설계공학과 대학원  
\*\*\* 한국기계연구원 인체 및 섬유기계그룹  
\*\*\*\* 장흥대 자동차 전장과

꼬이게 되는 언더컷 또는 형상이 날카롭게 만들어지는 경우가 발생하여 원하는 운동을 얻지 못할 수도 있으므로 캠의 설계시 곡률반경은 중요한 고려 대상이다. 본 논문에서 제안하는 곡률반경 결정법은 주어진 변위선도의 변위, 속도 및 가속도값과 캠과 종동절의 기하학적 관계에 의해 상대속도와 상대가속도의 법선방향 성분을 구하고 이를 이용하여 각 곡률반경을 찾게 된다. 본 제안된 방법은 단지 운동성분들의 관계들에서 쉽게 곡률반경을 구할 수 있다는 특징을 갖고 있다.

## 2. 상대가속도를 이용한 캠의 곡률반경 정의

### 2.1 상대속도와 상대가속도 정의

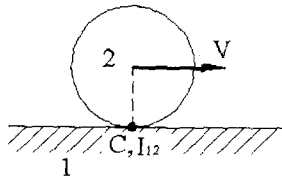


Fig. 1 Velocity on rolling contact

Fig. 1에서와 같이 물체 1위에 롤러가 구름운동을 한다면 물체 1과 롤러의 접촉점  $C$ 가 순간 중심점( $I_{12}$ )이 되며 롤러의 중심점에서의 속도  $V$ 는 접촉점  $C$ 에서 물체 1의 접선방향과 평행한 속도 성분을 가지게 된다.

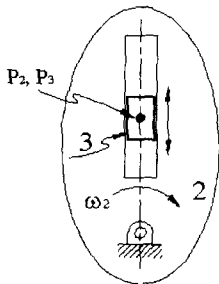


Fig. 2 The Coriolis component of acceleration

Fig. 2와 같이 물체 3이 물체 2위의 경로를 따라 움직이고 물체 2가 회전하면 물체 3위의 점  $P_3$ 는

물체 2와의 공유점  $P_2$ 에 대하여 코리올리 성분의 가속도를 갖는다. 이들 두 물체 사이에는 상대속도(relative velocity)와 상대가속도(relative acceleration)가 존재하고  $P_2$ 에 대한  $P_3$ 의 상대속도는 식(1)과 같이 나타나고 상대가속도는 식(2)와 같이 나타난다.

$$V_{P_3/P_2} = V_{P_3} - V_{P_2} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} A_{P_3/P_2} &= A_{P_3} - A_{P_2} \\ &= A_{P_3/P_2}^n + A_{P_3/P_2}^t + A_{P_3/P_2}^{coriolis} \end{aligned} \quad (2)$$

$P_2$ 에 대한  $P_3$ 의 가속도 성분은 법선 방향 성분과 접선방향 성분을 가지게 되며 이외에 코리올리 성분이 존재한다.  $P_2$ 의 곡률반경을  $R$ 이라 하고, 물체 2의 각속도를  $\omega_2$ 라 하면 법선 방향의 성분과 코리올리 성분의 값은 식(3)과 같다.

$$A_{P_3/P_2}^n = \frac{V_{P_3/P_2}^2}{R} \quad (3)$$

$$A_{P_3/P_2}^{coriolis} = 2V_{P_3/P_2}\omega_2$$

캠 기구에서 캠의 중심에서 바라본 종동절 롤러의 중심의 상대속도는 종동절의 움직임에 의해 발생하는 속도와 캠의 움직임으로 발생하는 속도의 차와 같고 그 방향은 캠 형상의 접촉점에서의 접선 방향에 평행하게 놓이게 된다. 또한 롤러 중심점에서 종동절의 움직임으로 생기는 가속도와 캠의 회전으로 인해 생기는 가속도의 차로 상대 가속도성분을 구하고 식(3)의 법선방향의 가속도를 이용하여 곡률반경을 구하게 된다.<sup>(1,2)</sup>

### 2.2 캠 형상설계의 압력각과 곡률반경의 영향

압력각은 종동절 운동의 방향과 작용선의 방향이 이루는 각도로 이 각이 커지면 축력이 증가하고 미끄럼 마찰이 증가하여 종동절의 매끄러운 운동을 방해하게 된다. 그래서 일반적으로 직선병진 운동용 캠의 압력각은  $30^\circ$ 를 넘지 않도록 한다.

캠 표면의 모든 점에서는 각각의 곡률반경을 가지게 된다. 캠의 형상에서 오목한 부분의 곡률

을 음의 값으로 두고 볼록한 부분의 곡률을 양의 값으로 할 때, 물러 종동절을 가진 캠의 경우에 곡률반경이 음의 값을 가질 때 그 값의 절대값이 종동절의 물러 반경보다 작아지게 되면 Fig. 3과 같이 그 점에서는 물러와 캠이 접촉을 할 수 없게 되고 오동작을 하게 된다.

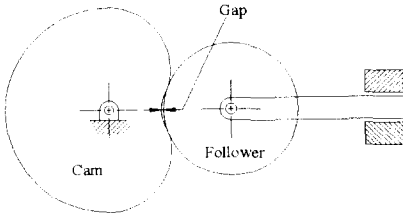


Fig. 3 Gap at the contact point

곡률반경이 양의 값을 가질 때도 곡률반경이 작으면 문제가 발생하게 되는데 물러 종동절의 경우 캠의 윤곽을 종동절의 물러의 중심의 궤적, 즉 피치곡선을 통해 찾게 된다. 캠 피치곡선의 곡률반경이 종동절의 물러 반경보다 작아지게 되면 Fig. 4처럼 캠의 형상이 꼬이게되는 현상이 발생하여 캠 형상이 올바르게 형성되지 않을 뿐 아니라 캠의 표면에 뾰족한 부분을 만들게 된다. 캠이 형상이 뾰족하게 되면 고속회전시 올바른 동작을 할 수 없게 된다.<sup>(3,4)</sup>

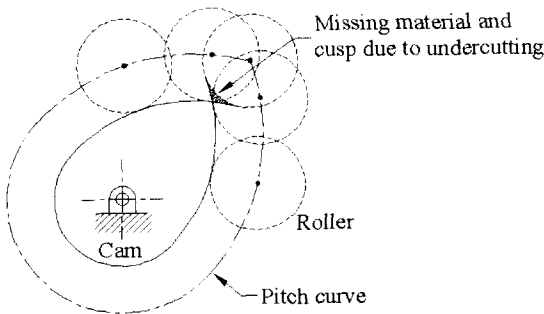


Fig. 4 Undercutting at the sharp edge

### 2.3 직선병진운동용 롤러 종동절을 가진 캠

Fig. 5는 직선병진운동용 롤러 종동절이 디스크 캠과 접촉하고 있는 상태이다. 그림에서와 같이

캠의 회전축 중심점  $O$ 에  $x_1, y_1$  좌표계를 고정시키고 캠과 같이 회전하며, 물러의 중심점  $R$ 에  $x_2, y_2$  좌표계를  $y_2$ 가 종동절의 속도 방향으로 향하도록 고정하여 물러와 같이 움직이도록 한다.

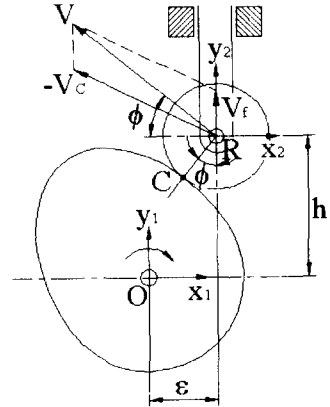


Fig. 5 Velocities on the roller follower

Fig. 5와 같이 캠의 회전방향은 시계방향(CW)이며 캠의 회전속도  $\omega_c$ 를 단위속도로 할 경우 캠의 중심에서 캠의 회전에 의해 발생하는 물러 중심점  $R$ 에서의 단위속도  $V_c$ 의 크기는 단지 캠의 회전 중심점  $O$ 와 물러의 중심점  $R$ 간의 거리에 캠의 단위회전속도( $\omega_c = 1.0$ )을 곱하는 값인 두 중심간의 거리에 해당된다. 또한 속도의 방향 성분은 직선  $OR$ 선에 수직선상에 위치하며 속도의 방향은 캠의 회전 각속도에 의해 결정되는데 본 연구에서는 물러 중심점에서의 상대속도를 구하기 위해 그림에서와 같이  $-V_c$ 를 도시하였다. 캠의 회전 중심에 대해 물러의 높이를  $h$ 라 하고 수평 방향으로의 편심량을  $\epsilon$ 라 하면, 캠의 회전에 대한 물러 중심에서의 단위속도  $V_c$ 의 성분들은  $x_2, y_2$  좌표계에 대해 식(4)와 같고 그림에서는  $-V_c$ 의 반대방향으로 작용한다.

$$V_{Cx_2} = h \quad (4)$$

$$V_{Cy_2} = -\epsilon$$

종동절의 직선왕복 운동에 의해 발생하는 롤러 중심의 단위 속도성분  $V_f$ 는 종동절이  $y_2$  좌표축에 대해 상하 운동만을 수행하므로  $y$ 방향으로만 종동절의 선속도  $v$ 의 값을 가지며, 그림에서  $V_f$ 로 표시된다. 이를  $x_2, y_2$  좌표계에 대해 나타내면 식(5)와 같다.

$$\begin{aligned} V_{f x_2} &= 0 \\ V_{f y_2} &= v \end{aligned} \quad (5)$$

회전하는 캠의 중심에서 바라본 롤러 중심의 단위상대속도  $V$ 는  $V = V_f - V_c$ 와 같으므로  $x_2, y_2$  좌표계에 대한 상대속도 성분들이 식(6)과 같고, Fig. 5에서와 같이 벡터의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} V_{x_2} &= -h \\ V_{y_2} &= v + \varepsilon \end{aligned} \quad (6)$$

롤러 중심점의 상대속도가 캠과 롤러의 접촉점에서의 접선과 평행하므로 압력각  $\phi$ 는  $x_2$  축과 롤러의 상대속도의 작용선과 이루는 각에 해당되어 식(7)과 같이 정리된다.

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{v + \varepsilon}{-h} \right) \quad (7)$$

캠의 회전 방향이 반시계방향(CCW)으로 설정하면 식(4)의 값들은 반대의 부호가 되고 이를 정리하여 압력각을 구하면 식(8)과 같다.

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{v - \varepsilon}{h} \right) \quad (8)$$

식(8)은 다른 방식으로 구한 기존의 압력각 식들<sup>(3,4,5)</sup>과 동일하다.

곡률반경을 알기 위해서는 가속도 해석을 해야 되는데 Fig. 6과 같이 캠의 중심에서 캠의 회전에 의해 발생하는 롤러 중심점  $R$ 에서의 가속도  $A_c$ 는 캠의 회전 각가속도를 0으로(등속 회전운동)

정의하면, 접선방향 가속도는 존재하지 않고 법선방향 가속도만 캠의 중심방향으로 생긴다. 이 때 발생하는 법선방향의 단위 가속도는 캠의 회전속도를 단위속도( $\omega_c = 1.0$ )로 정하였으므로, 그 크기는  $\overline{OR}$  간의 거리에 해당된다. 종동절의 직선왕복 운동에 의해 발생하는 롤러 중심의 단위 가속도  $A_f$ 는  $V_f$ 가 선속도이므로 단지  $y_2$  선상에서 주어진 종동절의 가속도 값을 가지게 되며 회전하는 캠의 중심에서 바라본 롤러 중심의 단위 상대 가속도  $A$ 는 단위 상대속도  $V$ 에 대하여 접선방향과 법선방향의 성분과 코리올리 성분의 가속도를 가지게 된다.

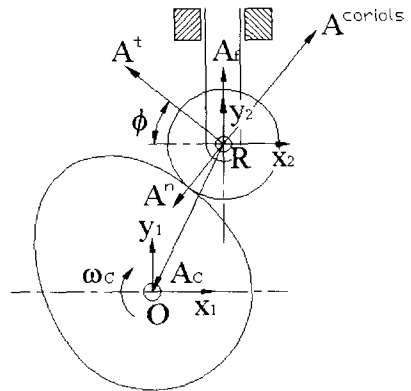


Fig. 6 Accelerations on the roller follower

$A_c$ 는  $x_2, y_2$  좌표계에 대해 나타내면 식(9)와 같다.

$$\begin{aligned} A_{c x_2} &= -\varepsilon \\ A_{c y_2} &= -h \end{aligned} \quad (9)$$

종동절의 가속도 값은 캠 기구의 설계시에 제안되는 변위곡선에서 주어지며, 그 값을  $a$ 로 정의하면  $A_f$ 는  $x_2, y_2$  좌표계에 대해 식(10)과 같다.

$$A_{f x_2} = 0 \quad (10)$$

$$A_{f_{y_2}} = a$$

상대가속도  $A$  중에서 코리올리 성분의 값  $A^{coriolis}$  는 캠의 회전속도를  $\omega_c$  라 하면  $2V\omega_c$  가 된다. 여기서 캠의 회전속도를 단위 속도로 하여 1로 두었으므로  $A^{coriolis} = 2V$  가 되고 방향은 상대속도  $V$  에 대해 캠의 회전방향에서  $90^\circ$  회전한 방향이다. 이를  $x_2, y_2$  좌표계에 대해 나타내면 식(11)과 같다.

$$A^{coriolis}_{x_2} = 2(v + \epsilon) \quad (11)$$

$$A^{coriolis}_{y_2} = 2h$$

상대가속도  $A$  는  $A_f - A_c$  로 나타나므로  $A$  의 성분 중 법선방향의 가속도  $A^n$  와 접선방향의 가속도  $A^t$  는 식(12)와 같이 구할 수 있다.

$$A^n + A^t = A_f - A_c - A^{coriolis} \quad (12)$$

그러므로 이를  $x_2, y_2$  좌표계에 대해 각 성분으로 나타내면 식(13)과 같다.

$$(A^n + A^t)_{x_2} = -\epsilon - 2v \quad (13)$$

$$(A^n + A^t)_{y_2} = a - h$$

상대속도  $V$  에 대해 법선방향 가속도  $A^n$  은  $V$  의 작용선이  $x_2, y_2$  좌표계에 대해 압력각  $\phi$  만큼의 각을 이루고 있고 볼록한 형상을 양의 곡률을 가진다고 정의하였으므로  $180 + \phi$  만큼 회전된  $y$  값에 해당되므로 식(14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$A^n = (\epsilon + 2v)\sin\phi - (a - h)\cos\phi \quad (14)$$

롤러 중심점의 궤적에 대한 곡률반경을  $\rho_{pitch}$  라 하면 곡률반경의 중심을 기준으로 상대속도

$V$  와 법선방향의 가속도  $A^n$  을 고려하면  $\rho_{pitch}$  는 식(15)와 같고 이에 식(6)과 식(14)를 대입하면  $\rho_{pitch}$  는 식(16)과 같이 나타난다.

$$\rho_{pitch} = V^2/A^n \quad (15)$$

$$\rho_{pitch} = \frac{h^2 + (v + \epsilon)^2}{(\epsilon + 2v)\sin\phi - (a - h)\cos\phi} \quad (16)$$

캠의 형상에 대한 곡률반경을  $\rho$  라 하고 롤러의 반경을  $r_r$  이라 하면  $\rho = \rho_{pitch} - r_r$  이므로 캠의 곡률반경은 식(17)과 같다.

$$\rho = \frac{h^2 + (v + \epsilon)^2}{(\epsilon + 2v)\sin\phi - (a - h)\cos\phi} - r_r \quad (17)$$

캠의 회전 방향이 반시계방향(CCW)이면  $\rho_{pitch}$  는 식(18)과 같다.

$$\rho_{pitch} = \frac{h^2 + (v - \epsilon)^2}{(2v - \epsilon)\sin\phi - (a - h)\cos\phi} \quad (18)$$

만약 롤러의 편심량이 0라면 식(16)과 식(18)은 다음과 같이 정리된다.

$$\rho_{pitch} = \frac{(h^2 + v^2)^{3/2}}{2v^2 - ah + h^2} \quad (19)$$

여기서  $h$ 는 캠의 기초원 반경과 롤러의 변위량의 합이고 이 식은 참고문헌<sup>(3,4)</sup>에서 미분으로 구한 피치곡선의 곡률반경의 식과 일치함을 확인할 수 있다.

### 3. 캠 설계의 적용

본 논문에서 제안한 결정법을 검증하기 위해 직선병진운동용 롤러 종동절을 가진 캠 설계를 위해 필요한 임의의 변위선도는 Table.1에 제시되고, 변위선도(변위, 속도 및 가속도)의 형상은 Fig. 7과 같다.

Table 1 Displacements curves for a cam design

sec-tion	cam angle (°)	displacement	curve type
1	0~45	10 mm rise	Modified sine
2	45~90	dwell	
3	90~135	10 mm return	Cycloid
4	135~180	dwell	
5	180~225	10 mm rise	345 polynomial
6	225~270	dwell	
7	270~315	10 mm return	4567 polynomial
8	315~360	dwell	

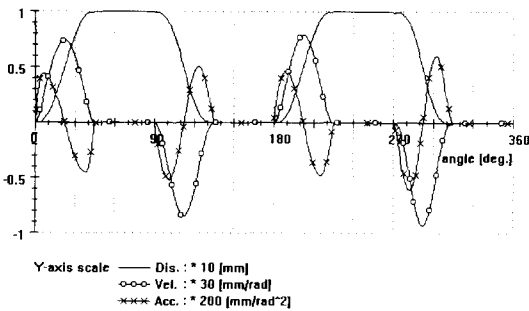


Fig. 7 Displacement, velocity and acceleration curves of the cam mechanism

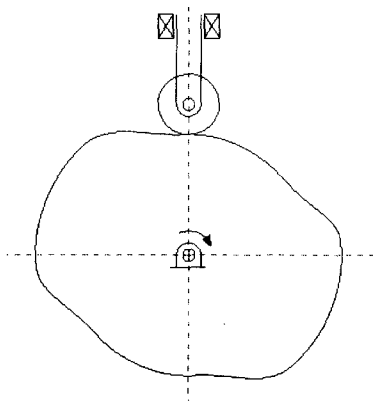


Fig. 8 Shape of the designed cam

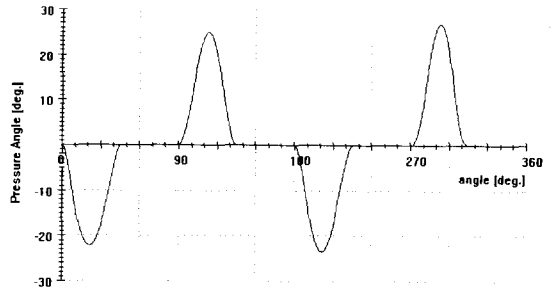


Fig. 9 Pressure angles of the cam mechanism

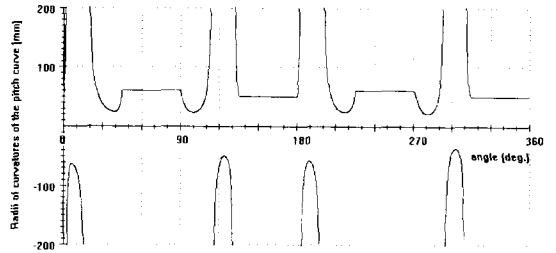


Fig. 10 Radii of curvatures of the pitch curve

기초원 반경을 40 mm로 종동절 롤러의 반경을 10 mm로 하며 편심을 주지않고 캠의 회전방향을 시계방향으로 정하여 캠 형상설계를 하면 Fig. 8 과 같다. 형상설계된 캠의 압력각은 Fig. 9와 같고 캠의 피치곡선의 곡률반경은 Fig. 10과 같이 나타난다.

Fig. 9에서 압력각의 최대값은 26.9° 로 나타났 으며 Fig.10에서 피치곡선의 곡률반경에서 양의 값중 최소값은 21.36mm이며 음의 값중 최대값은 -36.82mm로 나타났다. 위의 압력각은 30° 보다 작고 피치곡선의 곡률반경이 롤러의 반경보다 2배 이상이므로 캠의 형상이 부드럽게 나타나는 것을 볼 수 있다.

참고자료로서 Fig. 11은 종동절의 롤러의 궤적을 회전에 따라 표시한 그림으로 캠과 간섭없이 접촉하고 있음을 살펴볼 수 있고 Fig. 12는 캠의 형상을 구하고 캠 형상의 각 점들에서 그 점이 가지는 곡률중심까지를 선으로 연결한 그림이며, Fig. 13은 캠 형상의 각 점들이 가지고 있는 곡률 중심에서 곡률반경을 반경으로 가지는 즉, 캠 형

상에 접하는 원을 각각 그린 것이다.

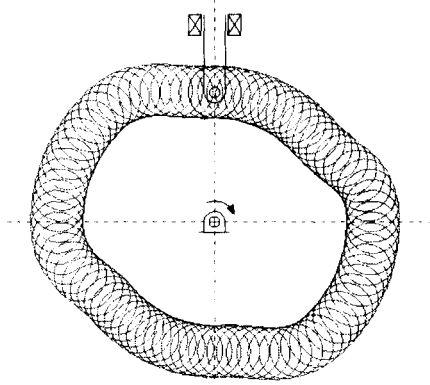


Fig. 11 Locus of the roller follower

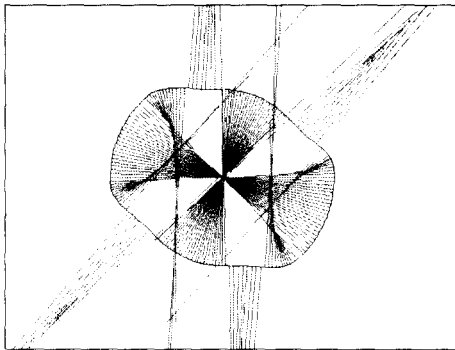


Fig. 12 Radii and centers of curvatures on the cam surface

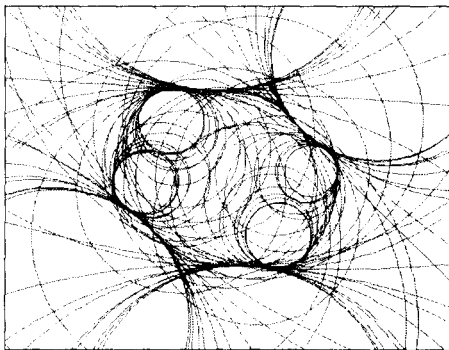


Fig. 13 Circles of curvatures on the cam surface

#### 4. 결론

직선병진운동용 롤러 종동절을 가진 원반 캠에 대해 상대속도를 이용하여 압력각을 구하고 상대가속도의 법선 성분을 이용하여 곡률반경을 구하였다. 롤러 종동절을 가진 원반 캠의 경우 압력각은 캠의 형상 설계를 위해서 반드시 필요한 값이며 곡률반경은 캠의 운동조건을 만족하는 형상 설계가 제대로 이루어지기 위해 고려해야 할 값들이다. 본 논문에서는 원반 캠의 압력각과 곡률반경의 결정을 위해 보다 간단한 방법을 제시하고 캠 형상설계 과정에서 쉽고 빠르게 캠 설계가 가능토록 제안한다.

#### 후기

본 연구는 한국과학재단 지정 창원대학교 공작기계기술연구센터의 지원에 의한 것입니다.

#### 참고문헌

1. G.H. Martin, "Kinematics and Dynamics of Machines," McGraw-Hill, pp. 20~152, 1982.
2. A. S. Hall, "Kinematics and Linkage Design," Prentice-Hall, Inc., pp. 12-28, 1966.
3. R. L. Norton, "Design of Machinery," McGraw-Hill, pp. 353~369, 1992.
4. J.E. Shigley, J.J. Uicker, "Theory of Machines and Mechanisms," McGraw-Hill, pp. 226~241, 1980.
5. 신중호, 이춘만, 김종수, "Shape Design of Disk Cam Mechanisms Using Instant Velocity Center," Proceedings of 6th International symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, Vol. 1, pp. 178-186, 1996.