

단축 이방성 반공간 유전체 표면에서 수평 미세 전류원에 의해 발생하는 수평 경계면 전기장에 대한 시영역 해의 유도

Derivation of the Transient Solution of the Horizontal Interfacial Electric Field Generated by a Tiny Horizontal Current Source on a Uniaxially Anisotropic Half-Space Dielectric

이원석 · 남상욱

Won-Seok Lee · Sangwook Nam

요 약

본 논문은 등방성 상반 매질과 단축 이방성 하반 매질의 경계면에 위치하는 수평 미세 전류원이 시간 영역에서 충격적으로 가해질 때, 경계면에 발생하는 수평 전기장을 구하는 반공간 경계면 문제를 다룬다. 경계면 전기장에 대해 Cagniard-de-Hoop-법을 변형 적용함으로써, 이 전기장에 대한 명시적 해를 얻는다. 또한, 경계면 상에서 퍼져 나가는 Dirac δ -함수 형태의 충격 성분에 대한 방사 특성에 대해서 논의하는데, 이 충격 성분은 원방 경계장 특성을 이해하는데 있어서 중요하다. 한편, 단축 이방성은 등방성보다 일반화된 개념이므로, 이 논문에서 구한 전기장 해에서 이방성을 제거하면 등방성 매질에 대한 해로 환원된다.

Abstract

This paper deals with a kind of the half-space interfacial problem in time domain, requiring the calculation of the horizontal electric field generated by a tiny impulsive current source located horizontally at the interface between an isotropic upper half-space and a uniaxially anisotropic lower half-space. With the Cagniard-de-Hoop method adapted for our interfacial case, we obtain the explicit-form solution for this electric field. We also investigate the impulse radiation in the radial direction. The impulse components of Dirac δ -function type in transient waveforms are important for the understanding of the interfacial far-field characteristics. The uniaxial case is a generalization of the isotropic one, and the explicit solutions of the uniaxial problem in this paper reduce to the solutions of the isotropic problem if the anisotropy is removed.

I. 서 론

시간 영역에서의 반공간 경계면 문제(half-space interfacial problem)는 평면형 적층 구조에 대한 시영역 해석(transient analysis) 분야의 기본 문제 중 하나인데, 반공간 매질의 표면에서 순간적(impulsive)

으로 가해지는 전류원(current source)에 의해 발생하는 경계면 전자파의 해를 구하는 문제이다. 이 문제에는 몇 가지 표준 범주가 있는데, 하반 공간(lower half-space)을 차지하는 매질이 1) 무손실/등방적(isotropic)인 경우, 2) 무손실/이방적(anisotropic)인 경우, 3) (등방적이거나 이방적이면서) 손

서울대학교 전기공학부(School of Electrical Engineering, Seoul National University)

· 논문 번호 : 991020-091

· 수정완료일자 : 1999년 12월 6일

실이 있는 경우 등이다. 첫 번째 경우는 저자들에 의해서 최근에 해석적으로 다루어진 바 있는데^[1], 이상적인 송수신 다이폴이 둘 다 경계면과 수평으로 놓여있는 경우(수평 문제: HH problem)와 둘 다 경계면에 수직으로 놓여있는 경우(수직 문제: VV problem)에 있어서, 송신 다이폴에 의해 발생하는 전기장에 대한 명시적(explicit)인 해를 유도하고 있다. 유도에 사용되었던 방법은 Cagniard-de-Hoop-법으로서, 경계면에서 적용할 수 있도록 변형되어 있다. 송·수신 다이폴이 둘 다 경계면에 수평으로 놓여 있는 경우^[2]에는 수치적인 Cagniard-de-Hoop-법으로 해석된 바 있으며, 송·수신 다이폴이 경계면에 수직으로 서 있는 경우^[3]에는 Hertz 포텐셜을 이용해서 다루어진 적이 있다. 세 번째 범주의 경우(매질에 손실이 있는 경우)도 고전적인 문제 중 하나인데, 수치적인 방법으로 다루어지기는 하였으나^[4, 5] 명시적인 해가 구해진 적이 없으며, 아직도 해석적으로는 풀기 어려운 문제로 남아 있다.

본 논문에서 다루고자 하는 구조는 손실이 없는 하반 매질이 이방성을 갖는 두 번째 경우로, 하반 매질이 단축 이방적(uniaxially anisotropic)이고 그 축이 매질 경계면과 수직을 이루고 있다. 이러한 매질로 환원될 수 있는 한 예는 수직 확장된 함수혈(鹹水穴: pockets of brine)을 갖는 해빙(海水: sea ice)인데, 거시적으로 볼 때 이방성을 갖는다고 알려져 있다^[6, p.275]. 단축 이방적인 하반 매질은 등방적인 매질과는 달리 TE파와 TM파를 서로 다른 속도로 전파시키기 때문에, 단축 이방성 매질을 다루는 것은 등방성 매질을 다루는 것보다 TE/TM(transverse electric/magnetic)파를 물리적으로 이해하는 데 더 많은 도움을 준다.

시영역 경계장(transient interfacial field)을 잘 알려진 Fourier 합성법에 의해 수치적으로 계산하는 것은, 전자장 합성에 요구되는 주파수와 파수(wave-number) 대역을 매우 넓게 두어야 하고 Gibbs 현상^[7]이 동반된다는 단점이 있으며, 또한 물리적인 직관을 제공하지 못한다. 다행히 우리가 다루어야 할 단축 이방성 문제에 있어서는, 이전에 사용된 방법^[1]을 적절히 원용함으로써 수평 문제에 대해 명시적으로 해를 얻을 수 있다. 본 논문에서는 이 해의 유도 과정을 보이고자 한다.

II. 이 론

본 논문에서 다루고자 하는 구조는 그림 1에 나와 있는데, 원점 (0, 0)에 위치한 수평 미세 전류원과 (x, y)에 위치한 수평 탐지기가, 수평 유전율 ϵ_{2h} 과 수직 유전율 ϵ_{2z} 을 갖는 단축 이방적 하반 매질의 표면에 위치하고 있다. 미세 탐지기에 감지되는 전기장은 아래에 계속되는 유도 과정에 의해 얻을 수 있다.

Maxwell 방정식의 회전(curl) 방정식 $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{H}$ 와 $\nabla \times \mathbf{H} = [(\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y})\epsilon_{nh} + \hat{z}\hat{z}\epsilon_{nz}] \cdot \partial_t \mathbf{E} + \mathbf{J}$ 는 Fourier 평면 변환과 Laplace 시간 변환

$$\mathcal{F}\{\cdot\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\cdot) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy, \quad (1)$$

$$\mathcal{L}\{\cdot\} = \int_0^{\infty} (\cdot) e^{-st} dt$$

을 거치면, 다음과 같은 TE파 방정식과 TM파 방정식으로 분해된다^{[8],[9]}.

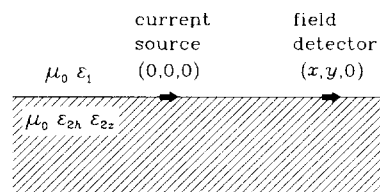
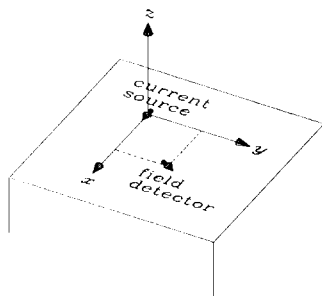


그림 1. 하반 매질이 단축 이방적인 반공간 경계면 문제의 구조

TE파 방정식:

$$\begin{aligned} \partial_z \bar{E}_v &= s\mu_0 \bar{H}_u, \\ \partial_z \bar{H}_u &= \frac{\gamma_{nTE}^2}{s\mu_0} \bar{E}_v + \bar{J}_v, \\ \bar{H}_z &= \frac{jk_\rho}{s\mu_0} \bar{E}_v, \end{aligned} \quad (2)$$

TM파 방정식:

$$\begin{aligned} \partial_z \bar{E}_u &= -\frac{\gamma_{nTM}^2}{s\epsilon_{nz}} \bar{H}_v + \frac{jk_\rho}{s\epsilon_{nz}} \bar{J}_z, \\ \partial_z \bar{H}_v &= -s\epsilon_{nh} \bar{E}_u - \bar{J}_u, \\ \bar{E}_z &= -\frac{jk_\rho}{s\epsilon_{nz}} \bar{H}_v - \frac{1}{s\epsilon_{nz}} \bar{J}_z \end{aligned} \quad (3)$$

하첨자 n 은 1, 2를 값으로 취하며 각각 상반, 하반 매질을 가리키는데, 상반 매질은 등방적이라 가정한 다($\epsilon_{1h} = \epsilon_{1z} = \epsilon_1$). 수직 방향으로의 파수들은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \gamma_{1TE} &= \gamma_{1TM} = (k_\rho^2 + s^2 s_1^2)^{1/2} = \gamma_1, \\ \gamma_{2TE} &= (k_\rho^2 + s^2 s_{2h}^2)^{1/2}, \\ \gamma_{2TM} &= (k_\rho^2 + s^2 s_{2z}^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $k_\rho = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$, $s_1 = \sqrt{\mu_0 \epsilon_1}$, $s_{2h} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_{2h}}$, $s_{2z} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_{2z}}$ 이다. 윗줄(overbar) 표기 $(\bar{\cdot})$ 는 $\mathcal{L}\mathcal{F}\{\cdot\}$ 로 정의되며, u -방향과 v -방향 성분은 x -방향, y -방향 성분과 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\bar{A}_u = \bar{A}_x \cos \phi_k + \bar{A}_y \sin \phi_k \quad (5)$$

$$\bar{A}_v = -\bar{A}_x \sin \phi_k + \bar{A}_y \cos \phi_k \quad (6)$$

여기서 $\cos \phi_k = k_x/k_\rho$, $\sin \phi_k = k_y/k_\rho$ 이다.

수평 문제의 경우 전류원과 탐지기가 모두 수평 편파를 가지며, z -방향 전기장은 탐지하지 않으므로, 풀어야 할 전기장은 x -방향, y -방향 전기장이다. 수평 문제의 경우 $J_x = \delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)$, $J_y = J_z = 0$ 이라 두는데, $J_y = 0$ 이라 둘 수 있는 이유는, 관측 전기장이 임의의 수평 방향을 향하도록 하여 문제의 일반성을 유지할 수 있기 때문이다. 얻고자 하는 수평 전기장은 경계면에서 연속이므로, 경계면 바로 위에서나 바로 아래에서나 같은 값을

갖는다.

$\bar{J}_x = \delta(z)$, $\bar{J}_y = 0$ 이므로 식 (6)에 의해 $\bar{J}_v = -\delta(z) \sin \phi_k$ 라 두고, 식 (2)에서 전송선(transmission-line) 방정식을 이루는 첫 두 방정식을 풀면, 전기장 \bar{E}_v 는 경계면 바로 위와 아래에서 각각

$$\begin{aligned} s \frac{\mu_0}{\gamma_1 + \gamma_{2TE}} e^{-\gamma_1 z} \sin \phi_k, \\ s \frac{\mu_0}{\gamma_1 + \gamma_{2TE}} e^{\gamma_{2TE} z} \sin \phi_k \end{aligned}$$

로 주어진다. 마찬가지로, $\bar{J}_u = \delta(z) \cos \phi_k$, $\bar{J}_z = 0$ 이라 두고 식 (3)의 첫 두 방정식을 풀면, 전기장 \bar{E}_u 는 경계면 바로 위와 아래에서 각각

$$\begin{aligned} -\frac{1}{s} \frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \frac{\gamma_{2TM}}{\sqrt{\epsilon_{2h}\epsilon_{2z}}} e^{-\gamma_1 z} \cos \phi_k, \\ -\frac{1}{s} \frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \frac{\gamma_{2TM}}{\sqrt{\epsilon_{2h}\epsilon_{2z}}} e^{\sqrt{\epsilon_{2h}\epsilon_{2z}} \gamma_{2TM} z} \cos \phi_k \end{aligned}$$

로 주어진다. 식 (5)와 (6)에 의해 \bar{E}_x 와 \bar{E}_y 를 계산하면, $z=0$ 에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= -s \frac{\mu_0}{\gamma_1 + \gamma_{2TE}} \sin^2 \phi_k \\ &\quad - \frac{1}{s} \frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \frac{\gamma_{2TM}}{\sqrt{\epsilon_{2h}\epsilon_{2z}}} \cos^2 \phi_k \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_y &= s \frac{\mu_0}{\gamma_1 + \gamma_{2TE}} \cos \phi_k \sin \phi_k \\ &\quad - \frac{1}{s} \frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \frac{\gamma_{2TM}}{\sqrt{\epsilon_{2h}\epsilon_{2z}}} \cos \phi_k \sin \phi_k \end{aligned} \quad (8)$$

등방적 매질에 대한 수평 문제^[1]와는 달리, 단축 이방성 매질에 대한 문제를 풀 때에는 TE파 성분과 TM파 성분을 따로따로 다루어야 한다.

시면(plane-time) 영역에서의 E_x 는 $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{F}^{-1}$

{ \bar{E}_x }로부터 얻는다. 우선 E_x 의 TE파 부분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1} \mathcal{F}^{-1} \left\{ -s \frac{\mu_0}{\gamma_1 + \gamma_{2TE}} \sin^2 \phi_k \right\} \\ &= -\frac{1}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1} \partial_y^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{F}_0^{-1} \left\{ \frac{\gamma_1}{s k_\rho^2} \right\} \right. \\ & \quad \left. - \mathcal{F}_0^{-1} \left\{ \frac{\gamma_{2TE}}{s k_\rho^2} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

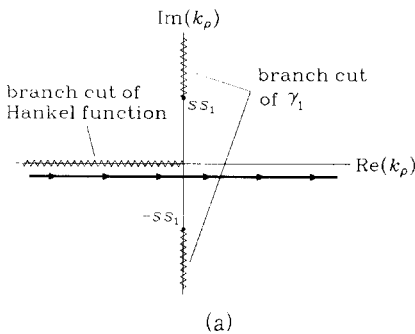
여기서 \mathcal{F}_0^{-1} 는 역 Fourier 변환의 일종인데, ϕ_k 에 의존하지 않는 피연산자에 작용하며 다음과 같이 정의된다^[1].

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_0^{-1} \{ \bar{A} \} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty - j0^+}^{\infty - j0^+} \bar{A} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \\ & \quad (\text{단, } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $H_0^{(2)}(\cdot)$ 는 0차의 제2종 Hankel 함수이다. 식 (9)에서 \mathcal{L}^{-1} 의 첫 번째 피연산자는 다음과 같이 쓸 수 있는데,

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_0^{-1} \left\{ \frac{\gamma_1}{s k_\rho^2} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty - j0^+}^{\infty - j0^+} \frac{\gamma_1}{s k_\rho^2} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)의 피적분 함수는 그림 2(a)에 그려진 분지선(branch cut)들을 갖는다.(음실수 축 상의 분지선은 Hankel 함수에 의한 것이고^[10, p.980], 허수축 상의 분지선들은 식 (4)의 γ_1 에 있어서 제곱근 함수의 분지선 조건 $\text{Re}\{k_\rho^2 + s^2 s_1^2\} < 0$, $\text{Im}\{k_\rho^2 + s^2 s_1^2\} = 0$



에 의한 것이다^[11, pp.77-83].) 원점 $k_\rho = 0$ 에서의 극점은 식 (9)의 미분자 ∂_y^2 에 의해 소멸된다. 식 (11)은 변수 변환 $\tau = j(\rho/s) k_\rho$ 에 의해 다음 식이 되며,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\rho} \int_{0^+ - j\infty}^{0^+ + j\infty} \frac{(s_1^2 \rho^2 - \tau^2)^{1/2}}{\tau} \\ & \quad \cdot H_0^{(2)}(-j s \tau) d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

그 변수 변환에 의해 분지선들은 그림 2(b)와 같이 시계 반대 방향으로 회전된다. Jordan의 보조 정리(Jordan's lemma)^[12, p.230]에 의거할 때, 그림 2(b)의 우반 평면 무한 호 상의 적분은 영이 되므로, 적분 경로를 이 그림에 나타난 바와 같이 변경할 수 있다. 그리고 $H_0^{(2)}(-j s \tau) = j(2/\pi) K_0(s \tau)$ ^[13, p.375]이므로 ($K_0(\cdot)$ 는 0차의 제2종 변형 Bessel 함수이다). 식 (12)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & j \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\rho} \left(\int_{-\infty - j0^+}^{s_1 \rho - j0^+} + \int_{s_1 \rho + j0^+}^{\infty + j0^+} \right) \\ & \quad \frac{(s_1^2 \rho^2 - \tau^2)^{1/2}}{\tau} K_0(s \tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\rho} \int_{s_1 \rho}^{\infty} \frac{\text{Im} \{ -j \sqrt{\tau^2 - s_1^2 \rho^2} \}}{\tau} K_0(s \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\rho} \int_{s_1 \rho}^{\infty} \frac{\sqrt{\tau^2 - s_1^2 \rho^2}}{\tau} K_0(s \tau) d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)의 마지막 식에 대한 역 Laplace 변환은, 공식 $\mathcal{L}^{-1}\{K_0(s \tau)\} = [1/\sqrt{t^2 - \tau^2}] u(t - \tau)$ ^[13, p.1028]을 이용하면

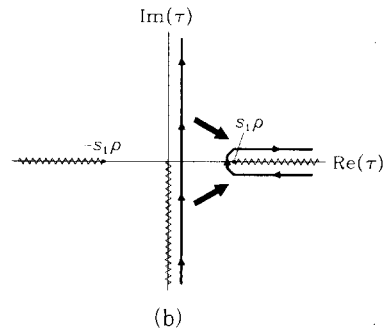


그림 2. 분지선의 분포와 적분 경로의 변경

단축 이방성 반공간 유전체 표면에서 수평 미세 전류원에 의해 발생하는 수평 경계면 전기장에 대한 시영역 해의 유도

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1} \mathcal{F}_0^{-1} \left\{ \frac{\gamma_1}{s k_\rho^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\rho} \int_{s_1 \rho}^{\infty} \frac{\sqrt{\tau^2 - s_1^2 \rho^2}}{\tau \sqrt{t^2 - \tau^2}} u(t - \tau) d\tau \\ &= u(t - s_1 \rho) \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\rho} \int_{s_1 \rho}^{\infty} \frac{\sqrt{\tau^2 - s_1^2 \rho^2}}{\tau \sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau \quad (14) \end{aligned}$$

이 되는데, 이 식을 변수 변환 $\sqrt{t^2 - \tau^2} = \sqrt{t^2 - s_1^2 \rho^2} \sin \alpha$ 를 통해 α 에 대한 적분식으로 바꾸면, 다음과 같은 답을 얻는다.

$$\begin{aligned} & u(t - s_1 \rho) \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\rho} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha}{\frac{t^2}{t^2 - s_1^2 \rho^2} - \sin^2 \alpha} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{s_1}{t} \right) u(t - s_1 \rho) \quad (15) \end{aligned}$$

유사한 과정을 거치면, 식 (9)의 \mathcal{L}^{-1} 의 두 번째 피연산자는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathcal{F}_0^{-1} \left\{ \frac{\gamma_2 TE}{s k_\rho^2} \right\} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{s_{2h}}{t} \right) u(t - s_{2h} \rho) \quad (16)$$

그리하여 식 (9)에서 ∂_y^2 를 계산함으로써, E_x 에서 TE파가 차지하는 부분을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1} \mathcal{F}^{-1} \left\{ -s \frac{\mu_0}{\gamma_1 + \gamma_{2TE}} \sin^2 \phi_k \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1} \left[-s_1 \frac{y^2}{\rho^4} \delta(t - s_1 \rho) \right. \\ &\quad - \frac{2y^2 - x^2}{\rho^5} u(t - s_1 \rho) \\ &\quad + s_{2h} \frac{y^2}{\rho^4} \delta(t - s_{2h} \rho) \\ &\quad \left. + \frac{2y^2 - x^2}{\rho^5} u(t - s_{2h} \rho) \right] \quad (17) \end{aligned}$$

유사한 방법으로, E_y 에서 TE파가 차지하는 부분은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1} \mathcal{F}^{-1} \left\{ s \frac{\mu_0}{\gamma_1 + \gamma_{2TE}} \cos \phi_k \sin \phi_k \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1} \left[s_1 \frac{xy}{\rho^4} \delta(t - s_1 \rho) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. + \frac{3xy}{\rho^5} u(t - s_1 \rho) - s_{2h} \frac{xy}{\rho^4} \delta(t - s_{2h} \rho) \right. \\ & \left. - \frac{3xy}{\rho^5} u(t - s_{2h} \rho) \right] \quad (18) \end{aligned}$$

이제, E_x 의 TM파 성분을 계산하는 법에 대해 살펴보기로 한다. 식 (7)에서 TM파 부분(두 번째 항)에 역 Fourier 변환과 역 Laplace 변환을 가하여

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1} \mathcal{F}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \frac{\frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \frac{\gamma_{2TM}}{\sqrt{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z}}} \cos^2 \phi_k}{\frac{\gamma_1}{\epsilon_1} + \frac{\gamma_{2TM}}{\sqrt{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z}}}} \right\} \\ &= \partial_x^2 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{F}_0^{-1} \left\{ \frac{\frac{\gamma_1^2 \gamma_{2TM}}{\epsilon_1^2 \sqrt{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z}}} - \frac{\gamma_1 \gamma_{2TM}^2}{\epsilon_1 \epsilon_{2h} \epsilon_{2z}}}{\frac{1}{s k_\rho^2} \frac{\gamma_1^2}{\epsilon_1^2} - \frac{\gamma_{2TM}^2}{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z}}} \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

와 같이 쓸 수 있는데, 이 식의 $\mathcal{F}_0^{-1} \{ \cdot \}$ 부분은 식 (11)로부터 식 (13)에 이르는 것과 유사한 과정을 거치면 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_0^{-1} \left\{ -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2} \frac{(k_\rho^2 + s^2 s_{2z}^2) \gamma_1}{s k_\rho^2 (k_\rho^2 + s^2 s^2)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sqrt{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z}}}{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2} \frac{(k_\rho^2 + s^2 s_1^2) \gamma_{2TM}}{s k_\rho^2 (k_\rho^2 + s^2 s^2)} \right\} \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2} \frac{1}{\rho} \int_{s_1 \rho}^{\infty} \frac{(\tau^2 - s_{2z}^2 \rho^2) \sqrt{\tau^2 - s_1^2 \rho^2}}{\tau (\tau^2 - s^2 \rho^2)} K_0(s\tau) d\tau \\ & \quad + \frac{1}{\pi^2} \frac{\sqrt{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z}}}{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2} \frac{1}{\rho} \int_{s_2 \rho}^{\infty} \frac{(\tau^2 - s_1^2 \rho^2) \sqrt{\tau^2 - s_{2z}^2 \rho^2}}{\tau (\tau^2 - s^2 \rho^2)} K_0(s\tau) d\tau \quad (20) \end{aligned}$$

이 식들에서 s 는 다음과 같다.

$$s = \sqrt{\mu_0 \frac{\epsilon_1 \epsilon_{2z} (\epsilon_{2h} - \epsilon_1)}{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2}} = \frac{1}{c} \quad (21)$$

식 (20)의 첫 번째 항에 \mathcal{L}^{-1} 를 가하여 $K_0(s\tau)$ 에 대한 처리를 한 후, τ -적분은 $\sqrt{t^2 - \tau^2} = \sqrt{t^2 - s_1^2 \rho^2} \sin \alpha$ 의 변수 변환을 거치면 다음과 같

은 α -적분으로 바뀌고, 이 α -적분은 쉽게 구해질 수 있다.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\left(\frac{t^2 - s_{2z}^2 \rho^2}{t^2 - s_1^2 \rho^2} - \sin^2 \alpha\right) \cos^2 \alpha}{\left(\frac{t^2}{t^2 - s_1^2 \rho^2} - \sin^2 \alpha\right) \left(\frac{t^2 - s_{2z}^2 \rho^2}{t^2 - s_1^2 \rho^2} - \sin^2 \alpha\right)} da$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2}{\epsilon_1 (\epsilon_{2h} - \epsilon_1)} \frac{s_1 \rho}{t} + \frac{\epsilon_{2h}}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_{2z}}} \sqrt{\frac{\epsilon_{2z} - \epsilon_1}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1}} \frac{\rho}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right\} \quad (22)$$

마찬가지로, 식 (20) 두 번째 항에 대해서는 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2}{\epsilon_{2z} (\epsilon_{2h} - \epsilon_1)} \frac{s_{2z} \rho}{t} + \frac{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_{2h}}}{\epsilon_{2z}} \sqrt{\frac{\epsilon_{2z} - \epsilon_1}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1}} \frac{\rho}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right\} \quad (23)$$

식 (19)의 x 에 대한 이계 미분을 직접 계산하여, E_x 에서 TM파 성분이 차지하는 부분을 구하면 다음과 같다.

$$\mathcal{L}^{-1} \mathcal{F}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \frac{\gamma_{2TM}}{\sqrt{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z}}} \cos^2 \phi_k \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}} \frac{x^2}{\rho^4} \delta(t - s_1 \rho)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{2h}}} \frac{x^2}{\rho^4} \delta(t - s_{2z} \rho)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2} \frac{2x^2 - y^2}{\rho^5} u(t - s_1 \rho)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z}}}{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2} \frac{2x^2 - y^2}{\rho^5} u(t - s_{2z} \rho)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_{2h}}}{\sqrt{\epsilon_{2z} (\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2)}} \sqrt{\frac{\epsilon_{2z} - \epsilon_1}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1}}$$

$$\frac{c^2 t^2 + (2x^2 - y^2)}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} [u(t - s_1 \rho) - u(t - s_{2z} \rho)] \quad (24)$$

마찬가지로 E_y 에서 TM파가 차지하는 부분은 아래와 같이 계산된다.

$$\mathcal{L}^{-1} \mathcal{F}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \frac{\gamma_{2TM}}{\sqrt{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z}}} \cos \phi_k \sin \phi_k \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}} \frac{xy}{\rho^4} \delta(t - s_1 \rho)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{2h}}} \frac{xy}{\rho^4} \delta(t - s_{2z} \rho)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2} \frac{3xy}{\rho^5} u(t - s_1 \rho)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z}}}{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2} \frac{3xy}{\rho^5} u(t - s_{2z} \rho)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_{2h}}}{\sqrt{\epsilon_{2z} (\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2)}} \sqrt{\frac{\epsilon_{2z} - \epsilon_1}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1}}$$

$$\frac{3xy}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} [u(t - s_1 \rho) - u(t - s_{2z} \rho)] \quad (25)$$

TE파 성분과 TM파 성분을 합하면(식 (17) + 식 (24), 식 (18) + 식 (25)), 다음과 같은 E_x 와 E_y 에 대한 최종적인 해를 얻는다.

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}} \frac{x^2 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1} y^2}{\rho^4} \delta(t - s_1 \rho)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{2h}}} \frac{\epsilon_{2h}}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1} \frac{y^2}{\rho^4} \delta(t - s_{2h} \rho)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{2h}}} \frac{x^2}{\rho^4} \delta(t - s_{2z} \rho) + \frac{1}{2\pi} \cdot$$

$$\frac{(\epsilon_1^2 - 2\epsilon_1 \epsilon_{2h} + \epsilon_{2h} \epsilon_{2z}) x^2 + (\epsilon_1^2 + \epsilon_1 \epsilon_{2h} - 2\epsilon_{2h} \epsilon_{2z}) y^2}{(\epsilon_{2h} - \epsilon_1)(\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2) \rho^5}$$

$$u(t - s_1 \rho) + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1} \frac{2y^2 - x^2}{\rho^5} u(t - s_{2h} \rho)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z}}}{\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2} \frac{2x^2 - y^2}{\rho^5} u(t - s_{2z} \rho)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_{2h}}}{\sqrt{\epsilon_{2z} (\epsilon_{2h} \epsilon_{2z} - \epsilon_1^2)}} \sqrt{\frac{\epsilon_{2z} - \epsilon_1}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1}}$$

$$\frac{c^2 t^2 + (2x^2 - y^2)}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} [u(t - s_1 \rho) - u(t - s_{2z} \rho)] \quad (26)$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}} \frac{\epsilon_{2h}}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1} \frac{xy}{\rho^4} \delta(t - s_1 \rho)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{2h}}} \frac{\epsilon_{2h}}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1} \frac{xy}{\rho^4} \delta(t - s_{2h} \rho)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{2h}}} \frac{xy}{\rho^4} \delta(t - s_{2z}\rho) + \frac{1}{2\pi} \cdot \\
 & \frac{\epsilon_{2h}(\epsilon_{2z} - \epsilon_1)}{(\epsilon_{2h} - \epsilon_1)(\epsilon_{2h}\epsilon_{2z} - \epsilon_1^2)} \frac{3xy}{\rho^5} u(t - s_1\rho) \\
 & - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1} \frac{3xy}{\rho^5} u(t - s_{2h}\rho) \\
 & + \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\epsilon_{2h}\epsilon_{2z}}}{\epsilon_{2h}\epsilon_{2z} - \epsilon_1^2} \frac{3xy}{\rho^5} u(t - s_{2z}\rho) \\
 & - \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_{2h}}}{\sqrt{\epsilon_{2z}(\epsilon_{2h}\epsilon_{2z} - \epsilon_1^2)}} \sqrt{\frac{\epsilon_{2z} - \epsilon_1}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1}} \cdot \\
 & \frac{3xy}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} [u(t - s_1\rho) - u(t - s_{2z}\rho)] \quad (27)
 \end{aligned}$$

이 식들에서 $\epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1}$, $\epsilon_{2h} = \epsilon_{2z} = \epsilon_0 \epsilon_{r2}$ 라 두면, 등방성 매질에 대한 수평 문제의 해^[1]와 일치하는 식을 얻을 수 있다.

III. 결과 논의

매질이 등방적일 경우에 비해서 단축 이방성이 있는 경우 파형이 실제로 얼마나 변화하는지를 알아보기 위해, 전류원의 파형이 가우스형 펄스(Gaussian pulse) $\exp[-(5 \times 10^9)^2 t^2]$ 라 가정하여 식 (26)와 콘볼루션(convolution)한 결과를 그림 3에 나타내었다. 유전율이 $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_{2h} = 8\epsilon_0$ 일 때 전기장을 탐지하는 위치를 $(x, y) = (0.5, 0.5)$ m라 두고, 수직 유전율 ϵ_{2z} 을 $8\epsilon_0$ (실선), $9\epsilon_0$ (파선), $10\epsilon_0$ (점선)으로 변화시키며 파형을 보았다. 등방적인 매질의 경우(실선)에서 6.67 ns 부근에 위치한 큰 펄스가 이방성이 커짐에 따라, TE/TM파에 의한 작은 펄스들로 분리되고 있음을 보여주고 있다. 2.36 ns 주변의 (+)-펄스는 식 (26)의 첫 번째 항에 의한 것이고 (-)-펄스는 마지막 항에 의한 것이다. 그림 4는, $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_{2h} = 8\epsilon_0$, $\epsilon_{2z} = 10\epsilon_0$ 일 때 관측점을 $(x, y) = (0.5, 0.5) \sim (1.5, 1.5)$ m로 변화시켜 갈때의 파형 변화를 나타낸 것이다. 거리에 따른 펄스의 분리 효과를 관찰할 수 있는데, 이 효과는 당연히 이방성에 비례한다.

한편, 방사 특성(radiation characteristics)에 대해서 살펴보면, 식 (26), 식 (27)에서 δ -함수(Dirac δ -function)를 포함하는 항들은 전류원으로부터의

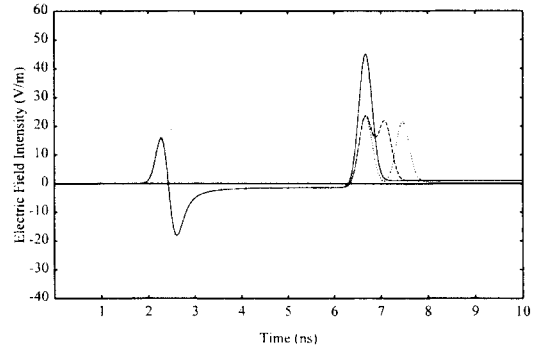


그림 3. 단축 이방성이 파형에 미치는 영향 ($\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_{2h} = 8\epsilon_0$ ($x, y) = (0.5, 0.5)$ m; 실선: $\epsilon_{2z} = 8\epsilon_0$, 파선: $\epsilon_{2z} = 9\epsilon_0$, 점선: $\epsilon_{2z} = 10\epsilon_0$)

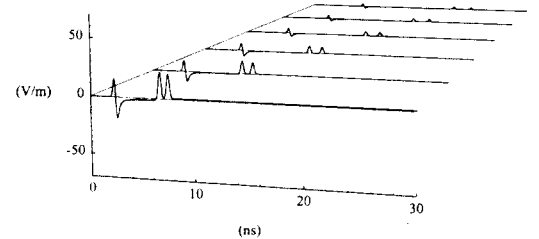


그림 4. 전류원으로부터의 거리가 멀어질 때의 파형 변화 ($\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_{2h} = 8\epsilon_0$, $\epsilon_{2z} = 10\epsilon_0$; ($x, y) = (0.5, 0.5)$ m, (0.7, 0.7) m, (0.9, 0.9) m, (1.1, 1.1) m, (1.3, 1.3) m, (1.5, 1.5) m)

거리(ρ)의 역 제곱에 비례하고, u -함수(unit step function)를 포함하는 항들은 거리의 역 제곱에 비례한다는 것을 알 수 있다. 그런데, 반공간 유전체 상에 위치한 전류원에 의해 공급되는 전력은, 거리에 대한 역 제곱 근사를 할 경우 경계면을 따라서는 전파되지 않는다고 알려져 있다^[14]. 즉, 시간 미분된 δ -함수 형태를 갖는 장은 경계면의 원방(far zone)에서는 관찰되지 않는다. 따라서 전류원 파형의 지속 시간이 충분히 짧다는 가정 하에서는, 원방에서의 시영역 파형은 δ -함수 형태의 충격 성분만을 포함할 것이므로, 이 충격 성분의 방사 특성을 알아내는 것은 원방 장(far field) 특성을 이해하는데 핵심이 된다.

식 (26)과 식 (27)로부터 ϕ -방향 전기장 $E_\phi = -(y/\rho)E_x + (x/\rho)E_y$ 를 구해 보면(u -함수를 갖는 항들은 생략함),

$$E_\phi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1} \frac{y}{\rho^3} \delta(t - s_1\rho) - \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{2h}}} \frac{\epsilon_{2h}}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1} \frac{y}{\rho^3} \delta(t - s_{2h}\rho) + \dots \quad (28)$$

그 충격 성분은 TM파(식 (24), (25))에 의한 충격 성분의 영향을 받지 않는다는 것을 알 수 있게 된다. 따라서 계산된 E_ϕ 의 충격 성분은 전적으로 TE파에 의한 것이다. 한편, 수평 문제에서의 z -방향 자기장 H_z 도 TE파에 의해서만 발생한다. 자기장 H_z 는 TM파 방정식(식 (3))과는 무관하기 때문이다. 식(2)의 세 식으로부터 H_z 를 구하면

$$H_z = -\partial_y \mathcal{L}^{-1} \mathcal{F}_0^{-1} \left\{ \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_{2TE}} \right\} \quad (29)$$

이 되고, 참고 문헌 [1]에서 H_z 를 구하는 방법으로 H_z 를 구하면

$$H_z = \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1} \frac{y}{\rho^3} \delta(t - s_1\rho) - \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon_{2h}}{\epsilon_{2h} - \epsilon_1} \frac{y}{\rho^3} \delta(t - s_{2h}\rho) + \dots \quad (30)$$

가 된다. 식 (28)과 (30)을 대조하면 $t = s_1\rho$ 에서의 선충격(leading impulse) 성분은 $\sqrt{\mu_0/\epsilon_1}$ 의 임피던스를 갖고, $t = s_{2h}\rho$ 에서의 후충격(lagging impulse) 성분은 $\sqrt{\mu_0/\epsilon_{2h}}$ 의 임피던스를 가지며 바깥쪽으로 퍼져 나감을 알 수 있다. 이는 파형의 선충격 성분과 후충격 성분이 각각 매질 1과 매질 2를 통해서 전파 되고, 매질 2를 통해서 전파하는 후충격 성분은 수평 임피던스만의 영향을 받는다는 것을 의미한다. 이상과 같이 경계면 상 원방에서 충격 성분의 방사 특성을 알아보았다.

IV. 맺음말

본 논문에서는 등방성 상반 매질과 단축 이방성 하반 매질의 경계면에 위치하는 수평 미세 전류원이 시간 영역에서 충격적으로 가해질 때, 경계면에 발생하는 수평 전기장을 구하는 반공간 경계면 문제(수평 문제)를 다루었다. 등방적 반공간 문제를 풀

때 사용하였던 Cagniard-de-Hoop-법을 원용함으로써, 이 전기장에 대한 명시적 해를 얻었다. 단축 이방성은 등방성보다 일반화된 개념이므로, 구해진 전기장 식에서 이방성을 제거하면 등방성 매질에 대한 해로 환원된다. 매질이 단축 이방적인 경우의 파형이 등방적인 경우로부터 얼마나 벗어나는지를 살펴 보았고, 또한 원방 경계면 방사 특성을 이해하는데 있어서 중요한 δ -함수 형태의 충격 성분의 방사 특성에 대해서 고찰하였는데, 수평 문제에 관한 한, 충격 성분들은 전적으로 TE파에 의한 것임을 알게 되었다. 현재, 다른 유형의 경계면 문제(전류원과 탐지가 경계면에 수직-수직, 수평-수직, 수직-수평을 이루는 경우)에 대해서도 연구가 진행되고 있다.

참고 문헌

- [1] W.-S. Lee and S. Nam, "Transient interactions between tiny interfacial antennas on half-space lossless dielectric," *Radio Sci.*, vol. 34, no. 5, pp. 1027-1041, 1999.
- [2] R. Dai and C. T. Young, "Transient fields of a horizontal electric dipole on a multilayered dielectric medium," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 45, no. 6, pp. 1023-1031, 1997.
- [3] B. van der Pol, "On discontinuous electromagnetic waves and the occurrence of surface wave," *IRE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-4, pp. 288-293, 1956.
- [4] H. Haddad and D. C. Chang, "Transient electromagnetic field generated by a vertical electric dipole on the surface of a dissipative earth," *Radio Sci.*, vol. 16, no. 2, pp. 169-177, 1981.
- [5] R. F. Remis and P. M. van den Berg, "A modified Lanczos algorithm for the computation of transient electromagnetic wavefields," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 45, no. 12, pp. 2139-2149, 1997.
- [6] I. V. Lindell, *Methods for Electromagnetic Field Analysis*, New York: IEEE Press, 1995.
- [7] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and I. T.

- Young, *Signals and Systems*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1983.
- [8] T. Itoh, "Spectral domain imittance approach for dispersion characteristics of generalized printed transmission lines," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-28, pp. 733-736, 1980.
- [9] L. Vegni, R. Cicchetti, and P. Capece, "Spectral dyadic Green's function formulation for planar integrated structures," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 36, no. 8, pp. 1057-1065, 1988.
- [10] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 5th Ed., San Diego, Calif.: Academic, 1994.
- [11] J. H. Mathews, *Complex Variables for Mathematics and Engineering*, 2nd Ed., Dubuque, Iowa: Brown, 1988.
- [12] K. Aki and P. G. Richards, *Quantitative Seismology*, San Francisco: Freeman, 1980.
- [13] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Mineola, N. Y.: Dover, 1972.
- [14] N. Engheta, C. H. Papas, and C. Elachi, "Radiation patterns of interfacial dipole antennas," *Radio Sci.*, vol. 17, no. 6, pp. 1557-1566, 1982.

이 원 석

1993년 2월: 서울대학교 전자공학과(공학사)
 1995년 2월: 서울대학교 전자공학과(공학석사)
 2000년 2월: 서울대학교 전기공학부(공학박사)
 [주 관심분야] 전자파 전파특성 해석, 안테나 설계, 평면형 수동회로 해석

남 상 욱

1981년 2월: 서울대학교 전자공학과(공학사)
 1983년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사)
 1983년 2월~1986년 8월: 금성사 중앙연구소 주임연구원
 1989년 5월: 미국 Texas 주립대학교 전기공학과(공학박사)
 1989년 6월~9월: 미국 Texas 주립대학교 박사후과정 연구원
 1989년 9월~1990년 1월: 금성정밀 연구소 선임연구원
 1990년 2월~현재: 서울대학교 전기공학부 교수
 [주 관심분야] 전자파 수치해석, 마이크로파 측정 및 회로설계