

# 동축선으로 급전되는 마이크로스트립 패치 안테나의 효율적인 수치해석

## Numerically Efficient Analysis of a Coaxial-fed Microstrip Patch Antenna

이강렬 · 이영순

Kang-Ryul Lee · Young-Soon Lee

### 요 약

본 논문에서는 공간영역 closed-form 그린함수를 사용하여 마이크로스트립 구조를 효율적으로 수치해석할 수 있는 방법을 고려해 보고자 한다. 모멘트법을 사용하여 임피던스 행렬의 요소를 구할 때 closed-form 그린함수를 사용하여 그 계산시간을 현저히 줄일 수 있다는 것은 이미 잘 알려진 사실이다. 그러나 행렬의 대각요소를 구하는 과정에서 그 계산결과가 여전히 느리게 수렴한다는 문제점이 발견되었고, 그 이유는 closed-form 그린함수에 포함되어 있는 복소지수의 작은 항때문인 것으로 사료된다. 따라서 대각요소 계산시 느린 수렴도의 문제점을 해소하기 위해 좌표계 변환에 의한 수치적분 방법을 고려해 보고자 한다. 본 논문에서 제시한 수치기법들의 타당성을 확인하기 위해 동축선 급전에 의한 마이크로스트립 안테나 산란문제의 해석에 적용하여 기존 논문의 결과와 비교해 볼 때 비교적 잘 일치함을 확인할 수 있었다.

### Abstract

In this study, a numerically efficient method for the analysis of microstrip structures is considered in conjunction with the use of closed-form spatial Green's functions. As is well-known, the use of the closed-form Green's functions can reduce the evaluation time of impedance matrix elements. However the problematic aspect that in general the evaluation results of diagonal elements of the matrix converge slowly, has been observed. The main cause of the slow convergence has been due to the terms of closed-form Green's functions with small exponent. In other to resolve the problematic aspect, a method of numerical integration based on the change of variable is considered in evaluating matrix elements. The present method is applied for the analysis of a coaxial-fed microstrip antenna. When the present results are compared with the previous results in order to check the validity of the present method, fairly good agreements between them are observed.

### I. 서 론

지금까지 마이크로스트립 패치 안테나와 같은 다층 평면구조의 전자기적 산란문제의 해석을 위해 다양한 수치해석 기법들이 소개되어져 왔으나, 해석구

조가 파장정도 크기의 내외가 되는 경우에는 다른 기법들에 비해 수치해석시 필요한 기억용량이나 계산량 등 수치적인 효율측면에서 비교적 유리한 모멘트법(MoM)이 보편적으로 많이 사용되어 왔다. 이와 같은 다층 평면구조의 수치해석을 위해 모멘트

금오공과대학교 전자공학부

· 논문 번호 : 991208-16S

· 수정완료일자 : 2000년 1월 10일

법이 사용되어지는 경우, 대부분 공간영역에서 보다는 파수영역에서 해석되어져 왔다<sup>[1]</sup>. 그 이유는 공간영역 그린함수 값을 얻기 위해 수치적분을 해야 하는데, 적분식으로 표현된 그린함수의 피적분함수가 고진동함수인 Hankel 함수를 포함하고 있어 긴 수치적분시간이 필요하기 때문이다. 그러므로 이 단점만 해결된다면 모멘트 행렬 계산시 공간영역에서의 해석경우는 분할된 패치의 한 셀에 대한 유한 적분 형태로 나타나므로 무한 적분을 행하여야 하는 주파수영역에서의 해석경우에 비해 공간영역에서의 해석방법이 이점이 있음을 알 수 있다.

최근에 공간영역 그린함수의 값을 긴 시간을 필요로 하는 수치적분으로 구하는 대신에, 적분식으로 표현된 그린함수를 closed-form 으로 근사화하여 효율적으로 그린함수 값을 구할 수 있는 방법들이 제시되고 있다<sup>[2][3]</sup>. 이와 같이 공간영역의 closed-form 그린함수를 구하는 방법은 많이 연구되어져 왔으나, 그 효율성을 입증하기 위해 다층 평판구조를 가지는 산란체 문제에 실제로 적용하여 수치해석을 한 연구 결과는 거의 없는 실정이다. 따라서 본 논문에서는 마이크로스트립 패치 안테나의 산란문제를 예로 하여 closed-form 그린함수를 구하고 이를 사용하여 공간영역에서 모멘트법으로 수치해석하는 과정에서 생겨나는 문제점을 지적한 후, 그 문제점을 해소하는 효율적인 수치해석 방법을 제시하고자 한다.

수치해석시 closed-form 그린함수를 이용하여 모멘트 행렬의 대각요소를 구하는 과정에서 요소값의 수렴도가 느리다는 문제점이 발견되었다<sup>[4]</sup>. 즉, closed-form 그린함수의 항중에서 복소 지수값이 작은 항때문에 적분시간이 길어지는 것이다. 또한, 대각요소를 구하는 과정에서 특이성이 나타나므로 특이적분 처리를 해야 하는 번거러움도 있다.

본 연구에서는 이와 같이 행렬의 대각요소를 구하는 과정에서 특이적분 처리문제와 느린 수렴도 문제를 동시에 해소하기 위해서 좌표계 변환법을 사용한 수치적분기법<sup>[4][5]</sup>을 고려해 보고자 한다. 그리고 본 연구에서 제시된 방법의 타당성을 확인하기 위해 등축선으로 급전되는 구형 패치안테나 산란문제의 수치해석 결과를 기존의 결과<sup>[6]</sup>와 비교하여 제시하고자 한다.

## II. 본 론

### 2-1 혼합 포텐셜 적분방정식(MPIE)

그림 1은 본 논문에서 해석하고자 하는 임의 형태의 마이크로스트립 패치 산란체로서 유전체의 유전율은  $\epsilon$ , 이고 두께는  $h$ 이다. 패치 도체면상의 손실을 고려한 경계조건과 패치 상에 유도되는 미지의 전류  $\underline{J}_s$ 를 사용하여 적분방정식을 식 (1)과 같이 얻을 수 있다.

$$\hat{z} \times [ \underline{E}^{(s)}(\underline{r}) + \underline{E}^{(e)}(\underline{r}) ] = Z_s [ \hat{z} \times \underline{J}_s(\underline{r}) ], \quad \underline{r} \in S_0 \quad (1)$$

여기에서,  $\underline{E}^{(e)}(\underline{r})$ 는 입사 전계,  $\underline{J}_s$ 는 입사 전계에 의해 유기된 표면 전류밀도,  $\underline{E}^{(s)}(\underline{r})$ 는 표면 전류밀도에 의해 여기되는 산란전계를 나타낸다. 그리고 실제 도전율( $\sigma$ )을 가지는 도체인 경우  $Z_s = (1+j)\sqrt{\pi f \mu_0 / \sigma}$  이고 임피던스의 차원을 갖는다.

패치면 상에서 미지의 면전류 밀도( $\underline{J}_s$ )와 면전하 밀도( $\rho_s$ )에 의한 벡터 및 스칼라 포텐셜들은 식 (2) 및 식 (3)과 같이 표현되며

$$\underline{A}(\underline{r}) = \int_{S_0} \overline{\overline{G}}_A(\underline{r}|\underline{r}') \cdot \underline{J}_s(\underline{r}') dS' \quad (2)$$

$$V(\underline{r}) = \int_{S_0} G_V(\underline{r}|\underline{r}') \rho_s(\underline{r}') dS' \quad (3)$$

이와 같은 포텐셜들로부터 전계  $\underline{E}$ 는 식 (4)로

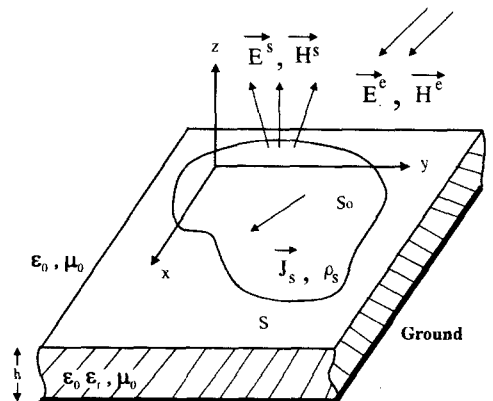


그림 1. 임의 형태의 마이크로스트립 패치 산란체  
Fig. 1. Arbitrarily shaped microstrip patch scatterer.

구할 수 있다.

$$\underline{E}(r) = -j\omega \underline{A}(r) - \nabla V(r) \quad (4)$$

2-2 GPOF법을 사용한 Closed-form 그린함수 유도

그림 2는 포텐셜 그린함수들을 구하기 위해 균일한 마이크로스트립 구조의 유전체 경계면 위에 위치한 x-방향의 수평 전기쌍극자를 도시한 그림이다. 이와 같은 해석구조에 대해 전기쌍극자의 위쪽에 위치한 관찰점에서의 벡터 및 스칼라 포텐셜 그린함수는 적분변환법<sup>[7]</sup>을 사용하여 식 (5) 및 식 (6)과 같이 구할 수 있으며

$$G_A^{xz} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j2k_{z0}} [e^{-jk_{z0}(z-z')} + R_{TE} e^{-jk_{z0}(z+z')}] H_0^{(2)}(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \quad (5)$$

$$G_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j2k_{z0}} [e^{-jk_{z0}(z-z')} + (R_{TE} + R_q) \cdot e^{-jk_{z0}(z+z')}] H_0^{(2)}(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \quad (6)$$

여기에서,  $R_{TE} = -\frac{r_{10}^{TE} + e^{-j2k_{z1}h}}{1 + r_{10}^{TE} e^{-j2k_{z1}h}}$ ,

$$R_q = \frac{2k_{z0}^2(1-\epsilon_r)(1-e^{-jk_{z1}h})}{(k_{z1} + k_{z0})(k_{z1} + \epsilon_r k_{z0})(1 + r_{10}^{TE} e^{-j2k_{z1}h})(1 - r_{10}^{TM} e^{-j2k_{z1}h})}$$

$$r_{10}^{TE} = \frac{k_{z1} - k_{z0}}{k_{z1} + k_{z0}}, \quad r_{10}^{TM} = \frac{k_{z1} - \epsilon_r k_{z0}}{k_{z1} + \epsilon_r k_{z0}}$$

$$k_{z0}^2 + k_{\rho}^2 = k_0^2, \quad k_{z1}^2 + k_{\rho}^2 = \epsilon_r k_0^2 \quad \text{이다.}$$

식 (5)와 식 (6)에서 전원 자신의 영향을 나타낸

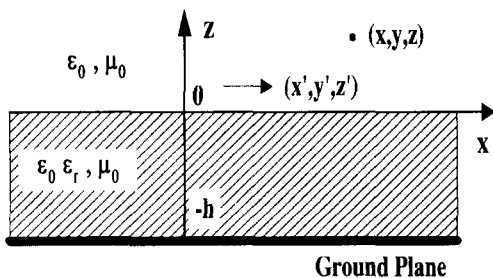


그림 2. 마이크로스트립 구조 위에 위치한 x-방향의 수평 전기쌍극자

Fig. 2. x-directed horizontal electric dipole over a microstrip structure.

첫째 항은 Sommerfeld 항등식에 의해서 해석적 역변환이 가능하지만, 접지면과 유전체에 의한 영향을 나타낸 둘째 항들인  $R_{TE}$ ,  $(R_{TE} + R_q)$  함수는 바로 역변환이 되지 않는다. 그러므로 closed-form으로 유도하기 위해서는 둘째 항들을 해석적 역변환이 가능하도록 복소 지수함수의 합으로 근사화하여야 한다. 그린함수를 유도하기 위해서 참고문헌 [2]에서는 파수영역의 그린함수를 몇 개의 복소 지수함수의 합으로 근사화하기전에 표면과 극점의 영향을 사전에 제거하는 방법을 제안하고 있다. 그러나 이 방법의 단점은 표면과 극점을 정확하게 구하지 못하는 경우 파수 영역의 그린함수를 근사화하기가 매우 어렵다는 점이다. 또한 본 논문의 해석구조인 마이크로스트립 패치 안테나의 경우는 표면과 극점의 영향이 미약하므로, 수치적으로 구해야 할 표면과 극점의 값을 정확하게 구한다는 것은 매우 불편한 작업을 알 수 있다. 따라서, 본 논문에서는 표면과 극점의 영향을 사전에 처리하지 않아도 되는 참고문헌 [3]의 방법을 사용하고자 한다. 그러나 참고문헌 [3]에서와는 달리 파수영역 그린함수  $R_q$ 가  $k_{\rho} \rightarrow \infty$  ( $k_{z0} = k_{z1} \rightarrow -j\infty$ ) 할 때 유전체에 의한 real image에 해당하는  $K = (1 - \epsilon_r) / (1 + \epsilon_r)$ 의 극한 값을 가지게 됨을 쉽게 알 수 있으므로,  $R_q$ 를 복소지수 함수의 합으로 근사화하기 전에 파수 ( $k_{\rho}$ ) 영역에서  $R_q$ 가 빠르게 수렴할 수 있도록  $K$ 를 제거한 후 근사화하는 것이 타당할 것으로 생각된다. 이와 같은 real image의 영향을 사전에 제거하였으므로 참고문헌 [3]에서 제시된 two-level 근사화 방법을 사용하지 않고 one-level 근사화라도 충분한 것으로 생각되며, 표면과 극점의 영향을 사전처리하지 않았으므로 근사화 방법으로는 Prony법보다는 보다 많은 샘플링 값의 사용이 가능한 GPOF법<sup>[8]</sup>을 사용하고자 한다. 그리고 본 논문에서 사용될 one-level 근사화 적분경로  $C_{ap}$ 는 식 (7)과 같다.

$$C_{ap}: k_{z0} = k_0 \left[ -jt + \left( 1 - \frac{t}{T_0} \right) \right], \quad 0 \leq t \leq T_0 \quad (7)$$

여기에서,  $T_0$ 는 종단점을 나타낸다. 종단점은 표면과 극점들(surface-wave poles)이 존재할 수 있는

구간  $[k_0, \sqrt{\epsilon_r} k_0]$ 을 피하기 위해서  $T_0 > \sqrt{\epsilon_r} - 1$ 인 값을 갖도록 설정해 주어야 한다. 적분경로  $C_{ap}$ 을 따라  $R_{TE}$  및  $(R_{TE} + R_q - K)$  함수를 등간격 표본화한 후, GPOF법을 이용해 근사화하면 식 (8) 및 식 (9)과 같이 복소 지수함수의 합으로 표현할 수 있다.

$$R_{TE} = \sum_{k=1}^{N_1} a_k e^{-b_k k_0} = \sum_{k=1}^{N_1} A_k e^{B_k t} \quad (8)$$

$$R_{TE} + R_q - K = \sum_{k=1}^{N_1} a_k' e^{-b_k' k_0} = \sum_{k=1}^{N_1} A_k' e^{B_k' t} \quad (9)$$

여기에서,  $a_k = A_k e^{\frac{B_k T_0}{(1+jT_0)}}$ ,  $b_k = B_k \frac{T_0}{k_0(1+jT_0)}$

이다.

식 (8)과 식 (9)를 식 (5)와 식 (6)에 대입한 후, Sommerfeld 항등식을 이용하여 해석적 Hankel 역 변환하면 포텐셜 그린함수들을 식 (10) 및 식 (11)과 같이 몇 개의 복소 지수함수 항들의 합으로 이루어진 closed-form으로 표현할 수 있다.

$$G_A^{xx} = \frac{\mu_0}{4\pi} [ G_{A,s}^{xx} + \sum_{k=1}^{N_1} G_{A,ck}^{xx} ] \quad (10)$$

$$G_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} [ G_{q,s} + KG_{q,r} + \sum_{k=1}^{N_1} G_{q,ck} ] \quad (11)$$

여기에서,  $G_{A,s}^{xx} = G_{q,s} = \frac{e^{-jk_z r_0}}{r_0}$ ,  $r_0 = \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}$ ,

$$G_{q,r} = \frac{e^{-jk_z r_0'}}{r_0'}, \quad r_0' = \sqrt{\rho^2 + (z+z')^2},$$

$$G_{A,ck}^{xx} = a_k \frac{e^{-jk_z r_k}}{r_k}, \quad r_k = \sqrt{\rho^2 + (z+z' - jb_k)^2},$$

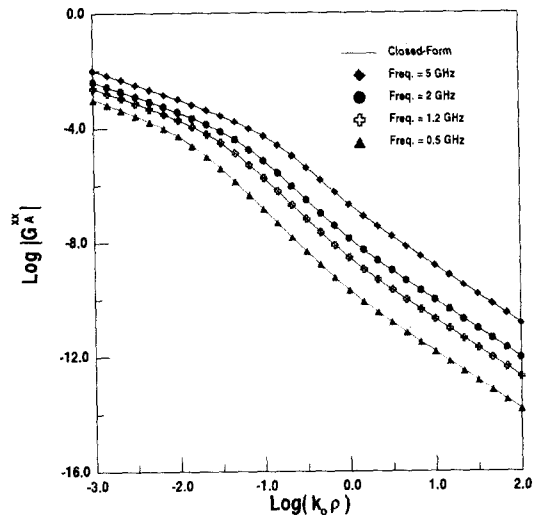
$$G_{q,ck} = a_k' \frac{e^{-jk_z r_k'}}{r_k'}, \quad r_k' = \sqrt{\rho^2 + (z+z' - jb_k')^2}$$

이다.

식 (10)과 식 (11)에서 사용된 밑첨자(subscript)의 의미는  $s$ 는 전원 자신에 의한,  $r$ 은 real image에 의한, 그리고  $ck$ 는  $k$ 번째 복소 지수함수('complex image'라고 불리움)에 의한 그린함수를 나타낸다.

본 논문에서 유도된 closed-form 그린함수의 타당성을 검토하기 위해 참고문헌 [6]의 해석구조인  $h = 0.8 \text{ mm}$ ,  $\epsilon_r = 4.34$ 인 마이크로스트립 평판구조를 예로 주파수 500 MHz ~ 5 GHz 범위에서

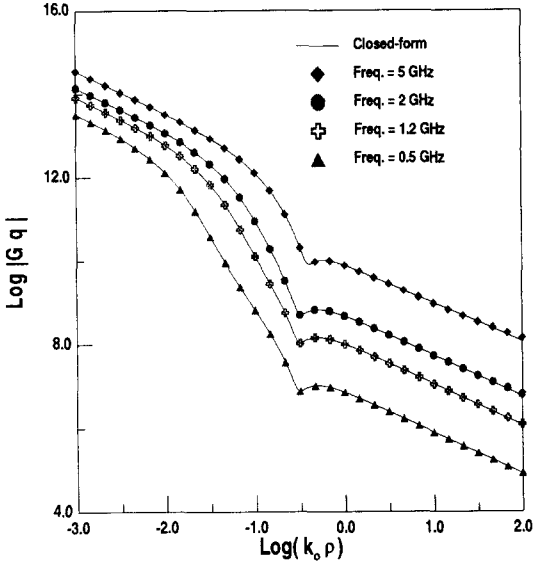
closed-form으로 구한 벡터 및 스칼라 포텐셜 그린함수 결과와 수치적분으로 구한 벡터 및 스칼라 포텐셜 그린함수 결과를 비교하여 그림 3과 그림 4에 제시하였다. 이 결과들은 패치면 상에 유기된 미지 전류를 해로 구해야 하므로 전기 쌍극자(전원점)의 위치  $z'$ 와 관찰점의 위치  $z$ 를  $z = z' = 0$ 으로 하고 임의로 선택한 주파수에 대해 전원점과 관찰점 사이의 거리가 매우 가까운 곳에서부터 멀리 떨어진 경우에 대해 구해진 결과이다. 그림 3과 그림 4에서 실선은 closed-form으로 구해진 그린함수 값이고 다양한 심벌들(symbols)을 사용하여 불연속적인 점들로 제시한 결과는 수치적분으로 구해진 그린함수의 결과이며, 근사화과정에서 사용되어진 매개변수들은 그림 하단에 제시하였다. 결과에서 볼 수 있는 바와 같이 일정한 근사화 계수( $T_0$ )로 500MHz~5GHz의 폭넓은 주파수 범위에서 뿐만 아니라 전원점과 관찰점의 거리에 관계없이 closed-form 그린함수결과와 수치적분으로 얻은 그린함수 값이 잘 일치함을 알 수 있다.



$$T_0 = 21, N_2 = 9, z = z' = 0$$

그림 3. Closed-form과 수치적분에 의해 구한 벡터 포텐셜의 크기

Fig. 3. Magnitude of the vector potential Green's function obtained by closed-form and numerical integration



$$T_0 = 21, N_1 = 4, z = z' = 0$$

그림 4. Closed-form과 수치적분에 의해 구한 스칼라 포텐셜의 크기

Fig. 4. Magnitude of the scalar potential Green's function obtained by closed-form and numerical integration.

### 2-3 모멘트법(MoM)

먼저 적분방정식에 모멘트법을 적용하기 위해서 구형 패치를 다각형으로 분할하여야 하며, 그 셀의 크기가 다를 경우에는 모멘트 행렬의 계산에 있어 복잡하고 많은 계산시간이 걸리기 때문에  $a \times b$ 의 동일한 크기로 선택하는 것이 바람직하다.

각 셀은 전하셀이 되며 x-방향과 y-방향의 공통 경계면을 공유하는 두 개의 인접한 전하셀은 그림 5와 같이 각각 x-방향 전류셀과 y-방향 전류셀을 구성하게 된다. 각 방향의 전류셀들을 겹쳐서 패치면을 채우게 되고 1개의 전하셀은 4개의 전류셀을 포함한다. 만약 패치가  $m \times n$ 개의 전하셀로 분할되었다면, x-방향 전류셀의 수는  $M = (m-1)n$ 이 되고 y-방향 전류셀의 수는  $N = m(n-1)$ 이 된다. 이와 같이 분할된 전류셀을 가지고 각 방향의 표면전류밀도 ( $J_{sx}, J_{sy}$ )는 기저함수와 미지의 계수로 식 (12) 및 식 (13)과 같이 급수형태로 전개할 수 있다.

$$J_{sx} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^M I_{xj} T_x(x - x_{xj}) \quad (12)$$

$$J_{sy} = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^N I_{yj} T_y(x - x_{yj}) \quad (13)$$

여기에서,  $T_x$ 과  $T_y$ 는 각 방향의 rooftop 기저함수로 식 (14)와 식 (15)로 표현되어진다.

$$T_x(x) = \begin{cases} 1 - |x|/a, & |x| \leq a, |y| < b/2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (14)$$

$$T_y(x) = \begin{cases} 1 - |y|/b, & |y| \leq b, |x| < a/2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (15)$$

전류밀도 표현식에서 미지의 계수  $I_{xj}, I_{yj}$ 를 표면 전류밀도의 차원으로 만들기 위해서  $1/a$ 와  $1/b$ 의 도입하였으며, 표면 전하밀도  $\rho_s$ 는 전류의 연속방정식을 사용하여 식 (16)과 같이 얻을 수 있다.

$$\rho_s = \frac{1}{j\omega ab} \left\{ \sum_{j=1}^M I_{xj} [\Pi(x - x_{xj}^+) - \Pi(x - x_{xj}^-)] + \sum_{k=1}^N I_{yk} [\Pi(x - x_{yk}^+) - \Pi(x - x_{yk}^-)] \right\} \quad (16)$$

여기에서,  $\Pi(x)$ 은 중심이  $x$ 이고,  $a \times b$ 의 직사각형 영역 상에서 정의되는 2차원 단위펄스함수

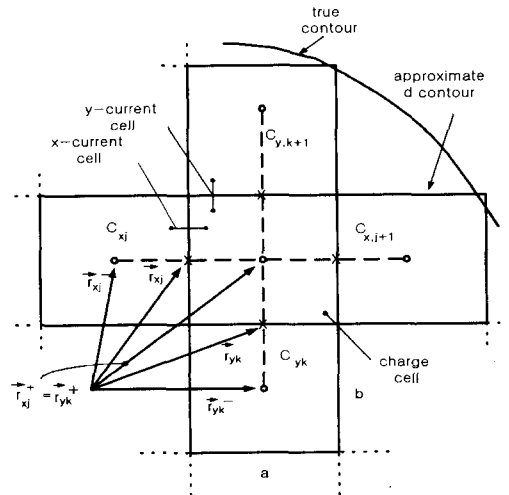


그림 5. 전하와 전류 셀들로 나타내기 위한 패치의 분할 (o : 전하 셀의 중심, x : 전류 셀의 중심)

Fig. 5. Segmentation of the patch in elementary charge and current cells (o : center of charge cells, x : center of current cells).

이다.

rooftop 기저함수에 의한  $x$ -방향 전류셀의 중심을 벡터  $\underline{r}_{xj}$ 로. 두 전하셀의 중심을 각각  $\underline{r}_{xi}^+$ 와  $\underline{r}_{xi}^-$ 로 표현하면 위치 벡터들 간의 관계는 식 (17)과 같다.

$$\underline{r}_{xi}^\pm = \underline{r}_{xj} \pm \hat{x}_0(a/2), \quad j=1, 2, \dots, M \quad (17)$$

$C_{xy}$ 는  $j$ 번째  $x$ -방향 전류셀에 포함된 두 전하셀의 중심을 잇는 경로이며, 마지막으로 선형방정식인 모멘트 행렬을 구하기 위해 사용되어진 testing 적분경로이다.  $y$ -방향에 대한 testing 적분경로  $C_{yj}$  ( $j=1, 2, \dots, N$ )는  $C_{xy}$ 와 유사한 관계가 성립한다.

참고문헌 [6]에서와 같이 수식의 단순화를 위해서 이산그린함수(DGF)를 도입하기로 한다. 즉, 이산 벡터 포텐셜 그린함수  $\Gamma_A$ 와 이산 스칼라 포텐셜 그린함수  $\Gamma_V$ 는 표면 전류인 단위 크기의 rooftop 기저함수와 표면 전하인 단위펄스함수에 의한 포텐셜 값들로 각각 식 (18) 및 식 (19)와 같이 정의되어진다.

$$\Gamma_A^{xx}(\underline{r}|\underline{r}_{xi}) = \int_{S_v} \frac{1}{\mu_0 k_0} G_A^{xx}(\underline{r}|\underline{r}') \cdot T_x(\underline{r}' - \underline{r}_{xi})(k_0^2 dS') \quad (18)$$

$$\Gamma_V(\underline{r}|\underline{r}_{0j}) = \int_{S_v} \frac{\epsilon_0}{k_0} G_V(\underline{r}|\underline{r}') \cdot \Pi(\underline{r}' - \underline{r}_{0j})(k_0^2 dS') \quad (19)$$

여기에서,  $S_{xj}$  ( $S_{0j}$ )는  $j$ 번째 전류셀(전하셀)을 나타내고  $\underline{r}_{xi}$  ( $\underline{r}_{0j}$ )는 각 셀들의 중심을 의미하며  $\Gamma_A^{yy}$ 도 이와 유사하게 표현할 수 있다.

DGF 표현식을 이용하여 벡터 및 스칼라 포텐셜을 표현하면 식 (20) 및 식 (21)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\underline{A}(\underline{r}) = \hat{x} \frac{\mu_0}{k_0 b} \sum_{j=1}^M I_{xj} \Gamma_A^{xx}(\underline{r}|\underline{r}_{xj}) + \hat{y} \frac{\mu_0}{k_0 a} \sum_{j=1}^N I_{yj} \Gamma_A^{yy}(\underline{r}|\underline{r}_{yj}) \quad (20)$$

$$V(\underline{r}) = \frac{Z_0}{j(k_0 a)(k_0 b)} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^M I_{xj} [\Gamma_V(\underline{r}|\underline{r}_{xj}^+) - \Gamma_V(\underline{r}|\underline{r}_{xj}^-)] + \sum_{j=1}^N I_{yj} [\Gamma_V(\underline{r}|\underline{r}_{yj}^+) - \Gamma_V(\underline{r}|\underline{r}_{yj}^-)] \right\} \quad (21)$$

여기에서,  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 으로 공기중에서의 특성 임피던스이다.

마지막으로 알맞은 테스트 함수를 선택해야 하는데, 참고문헌 [6]에서와 같이 1차원 구형 펄스(razor) 함수를 선택하였다.

앞에서 유도된 식 (1)의 적분방정식에 razor 테스트 함수와 내적을 취하여 정리하면 식 (22)와 같은 선형방정식을 얻을 수 있다.

$$j\omega \int_{C_{xx}} A_x dx + V(\underline{r}_{xi}^+) - V(\underline{r}_{xi}^-) + Z_s \int_{C_{xx}} J_{xx} dx = \int_{C_{xx}} E_x^{(e)} dx = -V_{xi}^{(e)} \quad (22)$$

여기에서,  $C_{xi}$ 는  $i$ 번째 test 셀로  $\underline{r}_{xi}^-$ 에서부터  $\underline{r}_{xi}^+$ 까지의  $x$ -방향 적분 경로이며  $V_{xi}^{(e)}$ 는 각각의 테스트셀에 인가된 전압을 나타낸다.  $y$ -방향의 전류셀에 대한 테스트 함수와의 내적 결과도 식 (22)와 유사하게 표현되어질 수 있다.

식 (22)와 같이 표현되어지는 선형방정식들을 행렬식으로 정리하면 식 (23)과 같다.

$$\begin{bmatrix} C^{xx} & C^{xy} \\ C^{yx} & C^{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \end{bmatrix} = \frac{1}{jZ_0} \begin{bmatrix} V_x^{(e)} \\ V_y^{(e)} \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기에서,

$$C_{ij}^{xx} = \frac{1}{k_0 a k_0 b} [-\Gamma_V(\underline{r}_{xi}^+|\underline{r}_{xi}^-) - \Gamma_V(\underline{r}_{xi}^-|\underline{r}_{xi}^+) + \Gamma_V(\underline{r}_{xi}^+|\underline{r}_{xi}^+) + \Gamma_V(\underline{r}_{xi}^-|\underline{r}_{xi}^-)], \\ -\frac{1}{k_0 b} \int_{C_{xx}} \Gamma_A^{xx}(\underline{r}|\underline{r}_{xj}) k_0 dx + j \frac{Z_s}{Z_0} \frac{a}{b} \delta_{ij} \\ i = j = 1, \dots, M \quad (24)$$

$$C_{ij}^{xy} = \frac{1}{k_0 a k_0 b} [-\Gamma_V(\underline{r}_{xi}^+|\underline{r}_{yj}^-) - \Gamma_V(\underline{r}_{xi}^-|\underline{r}_{yj}^+) + \Gamma_V(\underline{r}_{xi}^+|\underline{r}_{yj}^+) + \Gamma_V(\underline{r}_{xi}^-|\underline{r}_{yj}^-)] \\ i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N \quad (25)$$

이고,  $\delta_{ij}$  는 Kronecker delta이다.  $C_{ij}^{xy}$  는 식 (24) 에서  $x \leftrightarrow y$ ,  $a \leftrightarrow b$  그리고  $M \leftrightarrow N$  를 서로 바꾸면 구할 수 있고,  $C_{ij}^{yx}$  는 식 (25)로부터  $C_{ij}^{yx} = C_{ji}^{xy}$  로 쉽게 구할 수 있다.

참고문헌 [6]에서와 같이 대각행렬요소에 대한 결과를 제시하지 않은 것은 대각행렬요소를 구하는 과정에서 기존의 방법<sup>[6]</sup> 처럼 특이적분처리를 하더라도 나머지 피적분함수, 즉 특이성(singularity)이 제거된 well-behaved 함수 부분을 수치적분해야 하는데 그 수렴도가 매우 느리다는 문제점이 발견되었기 때문이다. 그 이유는 closed-form 그린함수를 사용한 결과로 사료되며, 특히 복소지수함수에 의한 그린함수의 복소지수항  $b_k$  혹은  $b_k'$ 의 값들이 대부분 아주 작기 때문인 것으로 사료된다. 따라서 대각행렬의 요소값을 구하는 과정에서의 특이 적분처리의 번거로운 문제점과 느린 수렴도 문제를 해소하면서 대각행렬의 요소값을 구할 수 있는 방법을 별도로 다음 절에서 제시하고자 한다. 또한 본 논문에서는 closed-form 그린함수를 사용하였으므로 참고문헌 [6]에서와 같이, 그린함수를 그린함수간의 수치 보간법(interpolation)을 사용하여 구할 필요성이 없으며, 대각행렬로부터 멀리 떨어진 행렬요소에 대해 근사식을 사용할 필요성도 없다. 마지막으로 여기행렬  $V^{(e)}$ 의 요소값을 제시하여야 하는데, 본 논문에서는 기존에 많이 제시된 평면파 입사 혹은 마이크로스트립 선로에 의한 급전 문제보다는 비교적 해석결과가 부족한 동축선에 의한 급전 문제를 취급하고자 한다. 동축선에 의한 급전의 경우, 보다 쉽게 해석에 접근할 수 있도록 참고문헌 [6]에서 제안한 전류 전원모델을 사용하고자 하며, 그 모델의 표현식은 패치면에 접속되어 퍼져나가는 표면 전류밀도로 식 (26)과 같이 가정하여 표현되어진다.

$$\begin{aligned} \underline{J}_s = & \hat{x} \frac{I}{4b} \operatorname{sgn}(x) (1 - 2|x|/a) \\ & + \hat{y} \frac{I}{4a} \operatorname{sgn}(y) (1 - 2|y|/b) \end{aligned} \quad (26)$$

식 (26)을 전류의 연속방정식에 대입하면 전하밀도  $\rho_s$ 는  $\rho_s = I/j\omega ab$ 으로 얻을 수 있다. 이렇게 전류 및 전하밀도에 대한 포텐셜들을 구한 후 여기전계  $\underline{E}^{(e)}$ 를 구하여 테스트 전류셀에 대해 식 (22)

와 같이 내적을 취하면 여기행렬 요소들을 쉽게 구할 수 있다.

### 2-4 대각행렬요소의 효율적인 수치계산

본 절에서는 앞서 언급한 바와 같이 대각행렬요소를 효율적으로 구할 수 있는 방법을 참고문헌 [5]에 제시된 좌표계 변환방법을 이용하여 고려해 보자 한다. 그림 6은 기저함수로 rooftop 함수를 사용할 경우에 포텐셜을 구하기 위한 적분구간을 나타냈다.  $\theta_1, \dots, \theta_4$ 는 각 모서리의 각도를 의미하며  $\rho_c(\theta)$ 는 임의의 각도에 대한 좌표의 원점에서 적분 경계의 외곽선까지의 거리이다.

앞 절에서 유도된 closed-form 그린함수중 complex image에 의한 임의의  $k$ 번째 항인  $G_{A,ck}^{xx}$  및  $G_{a,ck}$ 에 의한 벡터 포텐셜 DGF  $\Gamma_{Ak}^{xx}$  및 스칼라 포텐셜 DGF  $\Gamma_{Vk}^{xx}$ 를 식 (27)과 식 (28)로 정의하기로 한다.

$$\begin{aligned} \Gamma_{Ak}^{xx} = & \int_{r_{v_i}-b/2}^{r_{v_i}+b/2} \int_{r_{v_j}-a}^{r_{v_j}+a} \frac{1}{\mu_0 k_0} \\ & \cdot G_{A,ck}^{xx}(\underline{x}|\underline{x}') T_x(\underline{x}' - r_{xj}) k_0^2 dx' dy' \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{Vk}^{xx} = & \int_{r_{v_i}-b/2}^{r_{v_i}+b/2} \int_{r_{v_j}-a/2}^{r_{v_j}+a/2} \frac{\epsilon_0}{k_0} \\ & \cdot G_{a,ck}(\underline{r}|\underline{r}') \Pi(\underline{x}' - r_{oj}) k_0^2 dx' dy' \end{aligned} \quad (28)$$

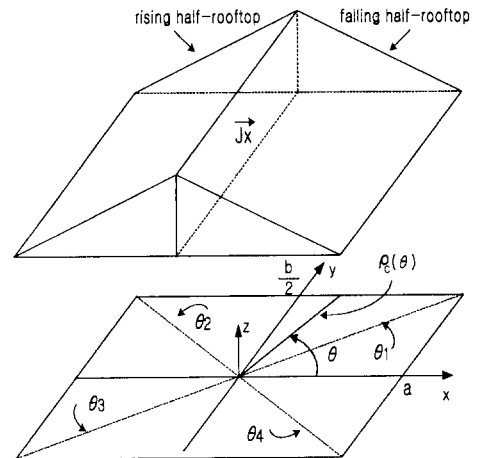


그림 6. 직각좌표계에서 rooftop 함수의 적분구간  
Fig. 6. The rectangular integration region of the rooftop function in cartesian coordinate system.

여기에서, 분할(segmentation)된 패치 상에 한 셀의 크기를  $a \times b$ 로, 테스트 함수의 중심 위치벡터인  $\mathbf{x}$ 을  $(r_{xi}, r_{yi})$ 로, 그리고 기저함수 ( $T_x$ )의 중심 위치벡터를  $(r_{xj}, r_{yj})$ 로 정의하였다. 모멘트 행렬의 대각요소를 구하기 때문에 벡터 포텐셜 DGF의 경우에는  $r_{yi} = r_{yj}$  와 스칼라 포텐셜 DGF의 경우에는  $r_{xi} = r_{xj}$ ,  $r_{yi} = r_{yj}$  이 만족된다.

기저함수의 위치와 관계없이 계산하기 위해서 기저함수의 중심을 원점으로 하는 새로운 좌표축을 설정해줄 수 있다. 이 새로운 좌표축  $(x_0, y_0, z_0)$ 으로 변환하기 위해서 변수를 다음 식과 같이 치환해 주어야 한다.

$$r_{xi} - x' = x_0, \quad r_{yi} - y' = y_0, \quad r_{xi} - r_{xj} = r_{xij},$$

for  $\Gamma_{Ak}^{xx}$  (29)

$$r_{xi} - x' = x_0, \quad r_{yi} - y' = y_0, \quad \text{for } \Gamma_{V_k} \quad (30)$$

식 (27)과 식 (28)을 새로운 변수로 치환하고 식 (10)과 식 (11)의 closed-form 그린함수를 대입하여 정리하게 되면 식 (27)과 식(28)은 식 (31)으로 표현되는 일반적인 적분식의 항들로 표현되어짐을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} I_{1k} &= \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a \left(1 - \frac{x_0}{a}\right) D_{Ak}^{xx} dx_0 dy_0 \\ &= \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a D_{Ak}^{xx} dx_0 dy_0 \\ &\quad - \frac{1}{a} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a x_0 D_{Ak}^{xx} dx_0 dy_0 \end{aligned} \quad (31)$$

여기에서,  $D_{Ak}^{xx} = \frac{e^{-jk_0 \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (-jb_k)^2}}}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (-jb_k)^2}}$  이다.

식 (31)은 두 개의 적분항으로 구성되어 있음을 알 수 있고 첫째 항을 식 (32)와 같이  $I_{2k}$ 로 두기로 한다.

$$I_{2k} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a \frac{e^{-jk_0 \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (-jb_k)^2}}}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (-jb_k)^2}} dx_0 dy_0 \quad (32)$$

식 (32)에서 볼 수 있는 바와 같이  $b_k$  값이 작을

수록 수렴속도가 늦어짐을 예측할 수 있고, 극단적으로  $b_k = 0$ 일 때  $G_{A,s}^{xx}$ 의 경우와 같이 특이성이 나타나므로 특이적분 처리를 해야함을 알 수 있다. 이를 개선하기 위해 적분 좌표계를 직각좌표계에서 극좌표계로 변환하면  $I_{2k}$ 는 식 (33)과 같이 유도된다.

$$I_{2k} = \frac{j}{k_0} \int_0^{2\pi} \left( e^{-jk_0 \sqrt{\rho_c(\theta)^2 + (-jb_k)^2}} - e^{-jk_0 \sqrt{(-jb_k)^2}} \right) d\theta \quad (33)$$

여기에서,  $\rho_c(\theta)$ 는 좌표계의 원점에서 적분구간의 외곽까지 거리이다.

식 (31)의  $I_{1k}$ 를 구하기 위해서 둘째 항을 이와 유사하게 극좌표계로 변환하면 식 (34)와 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} I_{1k} &= I_{2k} - \frac{j}{k_0 a} \int_0^{2\pi} \left( \rho_c(\theta) e^{-jk_0 \sqrt{\rho_c(\theta)^2 + (-jb_k)^2}} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\rho_c(\theta)} e^{-jk_0 \sqrt{\rho^2 + (-jb_k)^2}} d\rho \right) \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (34)$$

여기에서,  $\theta$ 의 적분구간에 따라  $\rho_c(\theta)$ 는 다음과 같이 정의되어진다.

$$\begin{aligned} \rho_c(\theta) &= a / \cos \theta, & \theta_4 < \theta \leq \theta_1 \\ \rho_c(\theta) &= b / (2 \sin \theta), & \theta_1 < \theta \leq \theta_2 \\ \rho_c(\theta) &= -a / \cos \theta, & \theta_2 < \theta \leq \theta_3 \\ \rho_c(\theta) &= -b / (2 \sin \theta), & \theta_3 < \theta \leq \theta_4 \end{aligned}$$

식 (33)과 식(34)에서 볼 수 있는 바와 같이  $b_k = 0$ 인 경우에도 특이성을 발견할 수 없으므로 해석적 특이적분처리를 하지 않고도 수치 적분할 수 있음을 알 수 있다.

본 논문에서 제안된 적분방법의 효율성을 입증하기 위해  $I_{1k}$ 를 기존의 방법인 직각 좌표계에서의 Gaussian 구적법으로 구한 결과와 극좌표계에서의 Gaussian 구적법으로 구한 결과를 구하여 각각 그림 7과 그림 8에 제시하였다. 그림 7에서 보는 바와 같이 직각 좌표계에서의 Gaussian 구적법에 의한 결과는 closed-form 그린함수의 복소지수  $b_k$  값이 작아



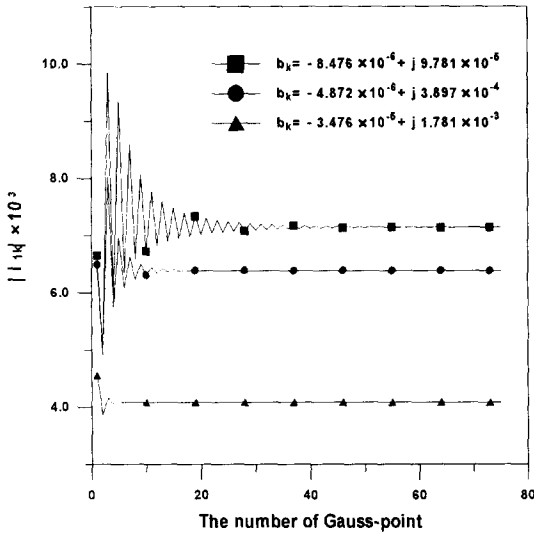


그림 7. 직좌표계에서 Gaussian 구적법에 의한  $|I_{1k}|$ 의 수렴도

Fig. 7. Convergence of  $|I_{1k}|$  by the Gaussian quadrature in the rectangular coordinate system.

질수록 적분값의 수렴도가 매우 느림을 알 수 있다. 이와는 달리 그림 8에서 볼 수 있는 바와 같이 적은 Gauss-point의 개수로도  $b_k$ 의 크기에 관계없이 빠

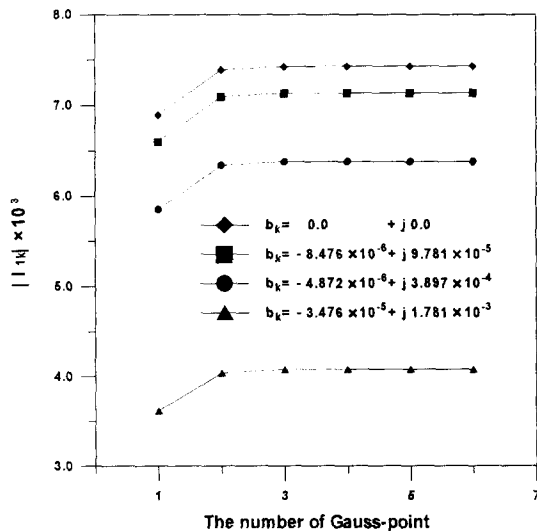


그림 8. 극좌표계에서 Gaussian 구적법에 의한  $|I_{1k}|$ 의 수렴도

Fig. 8. Convergence of  $|I_{1k}|$  by the Gaussian quadrature in the polar coordinate system.

르게 수렴할 뿐만 아니라,  $b_k = 0$ 인 특이적분 경우도 빠르게 수렴하고 있음을 알 수 있다.

### III. 수치해석 결과

본 논문이 제안한 수치해석 기법의 타당성을 보이기 위해 참고문헌 [6]에서 제시된 해석구조와 동일하게 유전율을  $\epsilon_r = 4.34$ 로, 유전체의 두께를  $h = 0.8 \text{ mm}$ 로, 패치 크기를  $60 \times 40 \text{ mm}$ 로 정의하고 패치를  $9 \times 6$ 의 동일한 크기의 전하셀로 분할한 후, 동축선(coaxial probe) 급전점들 (2,2)의 전하셀로 선택하여 패치면에 유기되는 미지의 표면 전류밀도를 구해 보았다.

해석결과로 먼저 주파수 800 MHz ~ 2.8 GHz까지 변화시키면서 패치면상에 유기되는 미지의 표면 전류밀도를 구하여, 그 전류밀도의 실수부의 크기(점선)과 허수부의 크기(실선)를 그림 9에 제시하였다. 그림 9에서 보는 바와 같이 허수부의 최대 첨두치와 실수부의 최소 첨두치가 존재하는 주파수 위치가 각 모드(mode)의 공진 주파수를 나타내는데, 그 공진 현상이 뚜렷함을 알 수 있다. 또한, 가장 우세한 모드(dominant mode)인  $TM_{10}$ 에서 전류의 허수부가

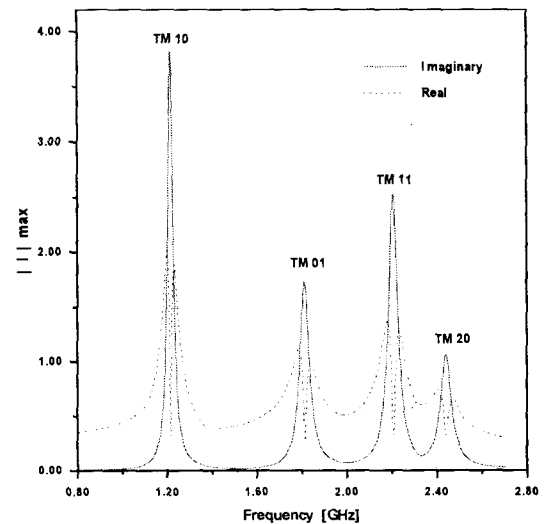


그림 9. 주파수 변화에 따라 패치면 상에 유기되는 표면전류밀도의 크기

Fig. 9. Magnitude of the surface current density induced on the patch conductor according to the variation of a frequency.

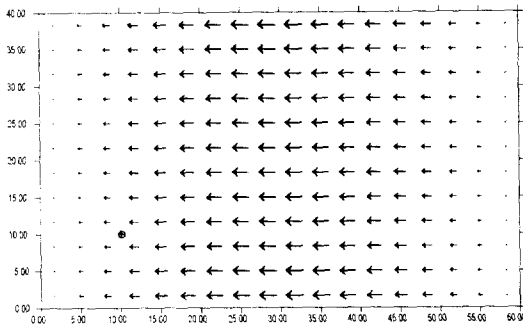
표 1. 공진주파수

Table 1. Resonant frequencies.

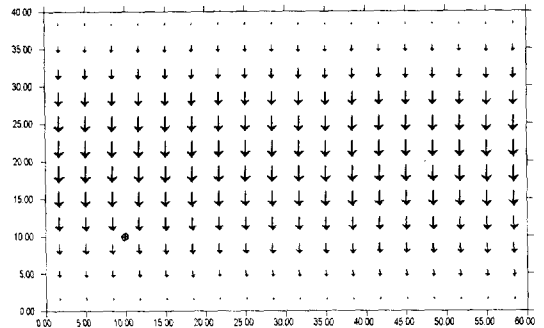
Mode \ 구분	기존 논문 <sup>[6]</sup>	공동 모델 <sup>[9]</sup>	본 논문
$TM_{10}$	1.206 GHz	1.2092 GHz	1.2145 GHz
$TM_{01}$	1.783 GHz	1.7919 GHz	1.8116 GHz
$TM_{11}$	2.177 GHz	2.2011 GHz	2.2060 GHz
$TM_{20}$	2.405 GHz	2.4185 GHz	2.4397 GHz

가장 큼을 확인할 수 있다. 이와 같은 해석을 통해 얻어진 공진 주파수의 정확한 값을 기존 논문의 해석결과<sup>[6]</sup> 및 공동모델<sup>[9]</sup>로 얻은 공진 주파수와 비교

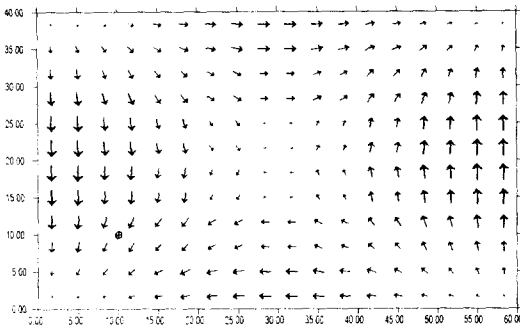
하여 표 1에 제시하였으며, 본 논문에서 구한 공진 주파수가 다소의 차이가 있으나 비교적 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나, 기존 논문에서는 관찰점과 전원 접이 면 경우 포텐셜의 근사값을 사용한 반면, 본 논문에서는 엄격한 수치 적분을 통해 구한 포텐셜 값을 사용하였기 때문에 본 논문의 결과가 좀더 정확할 것으로 사료된다. 기존의 해석결과<sup>[6]</sup>와 좀더 비교해 보기 위해서 4곳의 공진 주파수, 즉  $TM_{10}$ ,  $TM_{01}$ ,  $TM_{11}$  및  $TM_{20}$  공진 mode에서의 표면 전류밀도 허수부의 2차원적인 분포모양을 참고문헌 [6]에서와 같이 그림 10의 (a), (b), (c) 및 (d)에 제시하였고 괄호안에 제시된 최대 전류값은 기존 논문의 결과이다.



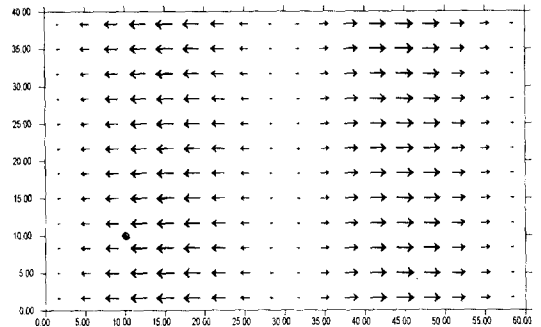
(a)  $TM_{10}$ , Imaginary-part, Max.Value = 3.8163 (3.760) Amp.



(b)  $TM_{01}$ , Imaginary-part, Max.Value = 1.7351 (1.731) Amp.



(c)  $TM_{11}$ , Imaginary-part, Max.Value = 2.5195 (2.465) Amp.



(d)  $TM_{20}$ , Imaginary-part, Max. Value = 1.0595 (1.067) Amp.

그림 10. 각각의 공진 주파수에서 패치면상에 유도된 전류분포 모양. ( ) : 기존 논문결과<sup>[6]</sup>

Fig. 10. The distribution of the induced surface current density at each resonant frequencies.

( ) : previous results<sup>[6]</sup>

#### IV. 결 론

본 논문에서 제시된 공간영역의 모멘트법 수치해석을 통해 마이크로스트립 패치 안테나 산란문제의 해를 효율적으로 구할 수 있음을 알 수 있었다. 본 논문의 수치해석 방법이 기존의 수치해석 방법<sup>[6]</sup>과 크게 다른 점은 공간영역에서 해석할 경우 그린함수 계산시 많은 계산시간이 소모되는 수치적분을 하지 않고도 그린함수 값을 계산할 수 있는 closed-form 그린함수를 사용하였다는 점이다. 이와 같은 closed-form 그린함수를 구하는 과정에서 본 논문의 해석 구조인 마이크로스트립 패치 안테나의 경우 표면파의 영향이 미약하여 표면파 극점을 수치적으로 구하는데 다소의 번거러움이 있으므로, 파수영역의 그린함수에서 표면파의 기여를 사전에 제거하는 방법을 사용하지 않고도 파수영역의 그린함수를 복소지수함수의 합으로 구할 수 있는 GPOF법을 근사화 방법으로 사용하였다. 또한, 본 논문에서 이와 같이 구해진 closed-form 그린함수를 사용하여 계산시간을 줄일 수 있었기 때문에 기존의 수치해석 때와는 달리 그린함수의 근사화나 포텐셜의 값을 구하기 위한 근사식을 사용하지 않고 엄격한 수치적분을 통해 임피던스 행렬의 모든 요소값을 구했다는 것이다. 특히, closed-form 그린함수를 사용하여 임피던스 행렬의 대각요소를 구하는 과정에서 발견된 느린 수렴도 문제를 좌표계 변환을 통한 수치적분기법으로 해결하여 그 값의 정확도와 수치계산시 소모되는 시간을 많이 줄일 수 있는 방법을 제시하였다는 점 등이 기존의 수치해석 기법과는 다른 점으로 들 수 있겠다.

결론적으로 본 논문에서 보여진 수치해석 기법의 타당성 입증을 통해, 최근 널리 사용되고 있는 다층 평판 구조체들(multi-layered planar structures)에 대한 효율적인 수치해석 기법으로 폭넓게 이용될 수 있을 것으로 사료된다.

#### 참 고 문 헌

[1] M. C. Bailey and M. D. Deshpande, "Integral Equation Formulation of Microstrip Antennas",

*IEEE Trans. AP.*, vol. 44, pp. 588-592, March, 1991.

- [2] Y. L. Chow, J. J. Yang, D. G. Fang, and G. E. Howard, "A closed-form spatial Green's function for the thick microstrip substrate," *IEEE Trans. MTT.*, vol. 39, pp. 588-592, March, 1991.
- [3] M. I. Aksun, "A Robust Approach for the Derivation of Closed-Form Green's Functions", *IEEE Trans. MTT.*, vol. 44., pp. 651-658, 1996.
- [4] 이강렬, 김병철, 이영순, "Closed-form 그린 함수를 사용한 포텐셜의 효율적인 계산", 추계 마이크로파 및 전파학술대회논문집, vol. 22, pp. 295-298, Sept., 1999.
- [5] Martin Gimersky and Jens Bornemann, "Numerical Evaluation of the Two-Dimensional Generalized Exponential Integral", *IEEE Trans. AP.*, vol. 44, pp. 1422-1425, 1996.
- [6] J. R. Mosig and F.E. Gardiol, "General integral equation formulation for microstrip antennas and scatterers," *IEEE Proc.* vol. 132., pp. 424- 432, Dec., 1985.
- [7] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, 2nd ed. New York, McGraw-Hill, pp. 78-87, pp. 184-192, pp. 412-416, 1991.
- [8] Yingbo Hua and T. K. Sarkar, "Generalized Pencil-of-Function method for extracting poles of an EM system from its transient response," *IEEE Trans. AP.*, vol. 37, no. 2, pp. 229-234, February, 1989.
- [9] Russell W. Dearnley and Alain R. F. Barel, "A Comparison of Models to Determine the Resonant Frequency of a Rectangular Microstrip Antenna", *IEEE Trans. AP.*, vol. 37, no. 1, pp. 114-118, January, 1989.

이 강 렬



1998년 2월: 금오공과대학교 전자  
통신공학과(공학사)  
1998년 3월~현재: 금오공과대학  
교 전자통신공학과 석사과정  
[주 관심분야] 전자장 수치 해석,  
RF회로 설계, 안테나 해석 및  
설계

이 영 순



1979년 2월: 경북대학교 전자공학  
과(공학사)  
1982년 2월: 한국과학기술원 전기  
및 전자공학과(공학석사)  
1996년 8월: 경북대학교 전자공학  
과(공학박사)  
1982년 2월~현재: 금오공과대학교

전자공학부 교수  
[주 관심분야] 전자장 수치 해석, 도파관 불연속 문제,  
전자파의 개구 결합문제, 안테나 해석 및 설계