

<논문> SAE NO. 2000-03-0038

# 다단계 부분구조법을 이용한 코일스프링의 유한요소 응력해석 I : 스프링 슈퍼요소

## Finite Element Stress Analysis of Coil Springs using a Multi-level Substructuring Method I : Spring Super Element

김진영\*, 허훈\*\*  
Jin-Young Kim, Hoon Huh

### ABSTRACT

This study is concerned with computerized multi-level substructuring methods and stress analysis of coil springs. The purpose of substructuring methods is to reduce computing time and capacity of computer memory by multiple level reduction of the degrees of freedom in large size problems which are modeled by three dimensional continuum finite elements. In this paper, a super element has been developed for stress analysis of coil springs. The spring super element developed has been examined with tension and torsion simulation of cylindrical bars for demonstrating its validity. The result shows that the super element enhances the computing efficiency while it does not affect the accuracy of the results and it is ready for application to the coil spring analysis.

주요기술용어 : 다단계 부분구조법(multi-level substructuring method), 스프링 슈퍼요소(spring super element), 코일스프링, 유한요소법, 응력해석

### 1. 서론

스프링은 기계구조물의 요소로써 사용되며, 외부에서의 하중이나 충격으로 전달되는 에너지를 자신의 변형을 통해 일시 저장했다가 다시 복원시켜 주는 역할을 한다. 스프링은 기능면에서 에

너지 흡수, 에너지의 저축 및 복원, 진동 및 충격의 완화 등의 목적을 위하여 필요한 형상으로 제작되는 기계요소 중에서 가장 기초적이고 중요하다고 할 수 있다. 그 중에서도 코일스프링은 그 종류가 매우 다양하고 가장 광범위하게 사용되고 있는데, 이는 코일 스프링은 제작이 용이하고, 그 효율성에 비해 가격이 저렴할 뿐만 아니라 취급이 쉽기 때문이다. 에너지의 축적이라는 관점에서 보면 판 스프링은 굽힘 탄성 에너지를 가장 크게 축적하는데 비해 코일 스프링은 주로 비틀림 탄성 에너지를 받는다.

\* 회원, 대원공업(주) 대원기술연구소

\*\* 회원, 한국과학기술원 기계공학과

코일스프링의 설계에서 가장 중요한 것은 스프링의 특성과 강도를 만족시키는 사양을 결정하는 것이다. 다양한 형상의 코일 스프링에 전해지는 하중은 기존의 비틀림 모멘트, 전단하중 뿐 만 아니라 굽힘 모멘트, 압축 하중 등이 존재하고 있기 때문에 코일 스프링의 해석은 더욱 복잡할 수 밖에 없게 되었다. 코일스프링을 엄밀히 해석하기 위해서는 각 방향의 운동이 매우 복잡하게 연계되어 있고 특성이 편미분방정식 형태의 운동방정식으로 기술되므로 그 해석에 많은 노력이 필요하다. 따라서 코일스프링의 해석은 유한요소법을 이용하여야 수행할 수 있으며 복잡한 하중, 경계 조건 문제에 대한 해를 구할 수 있다. 코일스프링에 대한 특성 요구 조건이 까다로워지고 형상이 복잡하게 됨으로써 정확한 스프링의 해석을 위한 유한요소법의 적용이 필요한 것이다. 코일스프링을 유한요소법으로 해석하는 경우 스프링은 대변형에 의한 비선형성과 코일간의 접촉이 발생하여 경계 조건이 지속적으로 변화하게 되므로 비선형 해석을 해야 거동을 올바르게 볼 수 있다.

유한요소 해석방법 중에서, 전체 구조물을 여러 개의 부영역으로 나누어 해석하는 부분구조법은 행렬을 나누어 계산하는 방법이 제안되면서 시작하였는데, 항공기나 대형 선박 등 구조물이 큰 대상을 해석할 때 각 부위를 동시에 여러 그룹으로 나누어 독립적으로 해석하거나 설계하는 방법을 적용하여 계산 효율의 증대를 가져 왔다. 부분구조법의 초기에는 컴퓨터 자원이 제한된 상황에서 전체 강성 행렬의 크기를 축소하는 방법으로써 부분화에 대한 연구가 많이 이루어 졌다. Benscoten<sup>1)</sup>는 현재와 같은 부분구조의 계산 과정을 최초로 정립하였고, Prezieniecki와 Denke<sup>2)</sup>는 이를 사용하여 비행기 구조해석에 적용하였다. Williams<sup>3)</sup>는 이를 고유진동수를 구하는데 적용하였고, Kirsch<sup>4)</sup>는 최적설계에 적용하였다. 또한 Fuch 등<sup>5)</sup>과 Williams<sup>6)</sup>는 매우 다양하게 산포된 행렬과 부분구조법을 비교하여 다단계 부분구조법을 수치적으로 분석하고 계산 횟수나 저장 공간 측면에서 우수함을 밝혀 냈다.

Furuike<sup>7)</sup>는 행렬의 크기를 초기보다 축소하기 위해 부분구조법의 과정을 체계적으로 전산화하고 이를 연속적이거나 반복적인 형상에 대해 다단계로 적용하는 다단계 부분구조법을 제안하였다. 그는 부분구조를 다시 부영역화하는 과정을 몇 차례 걸쳐 다단계로 수행함으로써 최종적으로 응축된 강성행렬과 하중행렬을 구할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 모델링 된 형상을 부분구조로 나누어 강성행렬을 축소하는 방법은 수치적으로 볼 때 강성행렬에 대한 블록화 방법과 동일한 의미를 가지는데, George<sup>8)</sup>는 해석 대상에 대한 부분구조와 함께 중첩된 강성행렬의 블록화 방법에 관한 연구를 수행하면서 다양한 행렬 계산 방법들을 비교 분석하였다. 이러한 부분구조법은 초기 범용 프로그램<sup>9)</sup>에도 적용되기 시작하여 NASTRAN, ABAQUS, MARC등과 같은 범용 유한요소 프로그램에 적용되고 있다.

다단계 부분구조법은 적용 범위가 확대되어 Kirsch 등<sup>10)</sup>은 다단계의 부분구조를 이용하여 형상을 최적화하는 문제에 적용하였다. 초기 부분구조의 관심 분야가 정적인 해석이나 고유치 해석 등에서 절점을 축소함으로써 행렬을 축소하는 것이었으나 이는 선형 해석에 한정적인 것이었고 나아가 절점을 축소하는 것 보다 계가 가지는 자유도를 축소하여 비선형 해석을 하는 방법에 대한 연구가 Noor 등<sup>11)</sup>과 Bathe 등<sup>12)</sup>에 의해 이루어졌다. Noor 등<sup>13~15)</sup>은 Taylor 전개식을 이용하여 민감도 해석에서 변위 벡터를 선형적으로 근사화 하는 축소되는 기저 함수 기법을 발표하였다. 비선형 해석에서도 이러한 축소 기저 함수 기법을 적용하였는데 축소 기법은 광역 근사 벡터를 적절히 선택하는 것이 중요하다. Noor는 기하학적으로 비선형적인 구조물 해석에서 테일러 부영역을 사용하였고, Tao와 Ramm<sup>16)</sup>은 라그란지 부영역을 사용하였는데, 자유도를 축소하는 방법에 대해서는 아직까지 일반화된 결론은 내려지지 않고 분야에 따라 다르게 적용되고 있다. 근사 벡터의 선택이 해석의 성공 여부를 좌우하는데 초기 좌굴해석을 통해 얻어진 고유치 중

지배적이며 비선형 특성을 잘 나타내는 것을 선택하거나 강성 행렬을 미분하여 얻어진 도함수와 변위 벡터를 이용하는 방법도 있다. 동적 특성 해석에서의 부분 구조법은 계를 부영역화 하고 각 부영역에서의 내부 자유도를 축소하는 방법과 함께 서로 연결되는 부 영역의 경계면의 절점에 대한 자유도도 축소하는 방법이 결합되어 이루어지는 동적 부분구조법(Dynamic Substructuring)이 있다.

코일 스프링에 대한 응력분포를 정확하게 구해내기 위해서는 3차원 곡률 효과와 전단 하중에 의한 영향을 고려하고 코일 소선간의 접촉도 3차원적으로 고려되어야 한다. 코일 스프링의 비선형성은 코일 스프링의 대변형 특성과 함께 코일 스프링이 소선간에 서로 접촉하거나 외부와 접촉을 진행하여 경계조건이 변하는 비선형 특성으로 구분된다. 이러한 특성을 가지는 코일 스프링은 3차원 연속체 요소를 사용하면 스프링의 형상을 보다 정확하게 모델링하고 이로부터 변형형상과 응력분포를 해석결과로부터 직접 얻을 수 있다. 원통형 코일 스프링을 연속체 요소로 모델링하면 Fig. 1은 각 스프링의 단면은 48개의 영역으로 구분할 수 있고, 코일이 감긴 방향으로는 1권을 24등분 정도로 8개의 절점을 가지는 육면체의 연속체 요소로 모델링하여야 형상을 비교적 정확히 모델링할 수 있다. 그러나 3차원 공간에서의 굽은 보 형상의 코일 스프링에 대한 유한요소 모델링은 3차원 연속체 요소를 사용할 경우 거의 25,000~30,000개의 자유도를 가지게 되므로 유한요소 해석에 많은 컴퓨터 기억 공간을 필요로 하며 모델링에서 해석 결과를 얻는 데까지 너무 오랜 시간이 걸린다.

본 논문에서는 유한요소 해석에서 이러한 컴퓨터 기억공간의 제약과 계산시간 등의 문제점을 해결하고자 전체 요소의 강성 행렬을 다단계의 부분구조로 축소시킨 후 해를 구함으로써 해석상에 필요한 시간과 기억 공간을 적게 할 수 있는 다단계 부분 구조법을 3차원 문제에 적용한다. 특히, 코일스프링에서 길이방향의 한 부분을 하

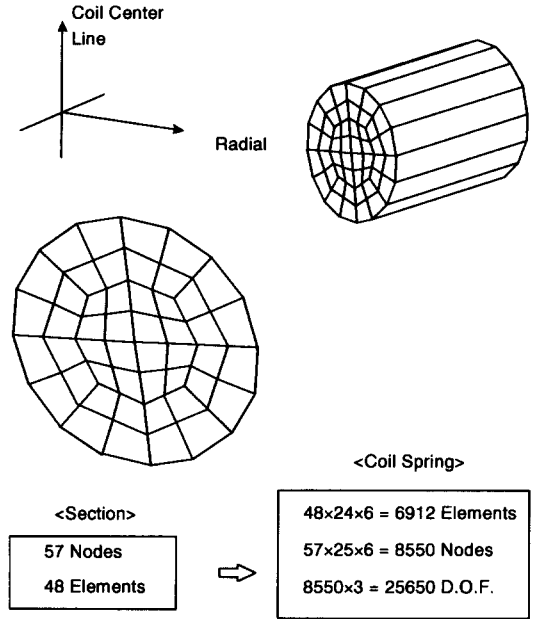


Fig. 1 Finite element meshes in the cross section of a coil spring

나로 블록화하여 요소화 하는 방식을 채용하여 3차원의 단면을 하나의 축소된 슈퍼요소 (Super Element)화하여 코일스프링에 적합한 스프링슈퍼요소를 개발하여 적용하였다. 부분구조법을 이용한 유한요소 해석으로 코일 스프링의 변형과 응력분포를 구해내고 이의 유용성을 제시 한다. 원형단면 보에 3차원 다단계 부분 구조법을 적용하여 슈퍼요소화 하고 이를 바탕으로 코일스프링의 선형해석 프로그램에 적용하는 방법을 제시하였다. 코일스프링에 작용하는 하중은 단면에 대한 비틀림 모멘트가 대부분을 차지하고 굽힘 모멘트와 인장하중이 부분적으로 존재한다. 따라서, 슈퍼요소를 통한 다단계 부분구조법 해석의 적용가능성을 검증하고 적용 방법을 구체화하기 위해 원형 단면 보에 대해 비틀림하중 과 인장하중 조건을 설정하고 이를 선형 및 대변형 해석에 적용하였고, 그 결과로부터 스프링슈퍼요소를 이용한 코일스프링의 모델링과 해석 방법에 대한 방향을 설정하였다.

## 2. 유한요소 수식화

해석하고자 하는 변형체를 형상이  $\Omega$ 이고, 경계표면이  $\Gamma$ 인 자유물체로 생각하면, 경계표면은 표면력이 작용하는  $\Gamma_f$ 와 변위가 규정된  $\Gamma_d$ 의 두 부분으로 나눌 수 있다. 이 자유물체가 평형상태에 있을 때 응력장  $\sigma_{ij}$ 는 가상일의 원리에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \bar{u}_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} \rho b_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_f} t_i \bar{u}_i d\Gamma, \quad \forall \bar{u}_i = 0 \text{ on } \Gamma_d \quad (1)$$

여기서  $\bar{u}_i$ 는 임의의 가상변위 벡터이다.

식(1)의 직접적인 적용은 미소 변형 탄성 문제에서만 가능하므로, 대변형 문제를 해석하기 위해서는 다음과 같은 라그랑지안 수식화가 필요하다.

$$\int_{\Omega^0} T_{ji} \bar{u}_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega^0} \rho^0 b_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_f^0} t_i^0 \bar{u}_i d\Gamma \quad (2)$$

여기서  $T_{ji}$ 는 1차 Piola-Kirchhoff 응력텐서로서 Cauchy 응력텐서와 다음과 같은 관계를 가지며,  $J (= \rho^0/\rho)$ 는 좌표변환 행렬의 행렬식이며  $\Omega$ 는 변형전 초기 형상의 함수값임을 나타낸다.

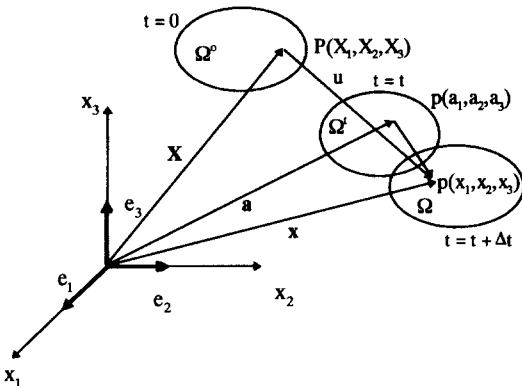


Fig. 2 Reference and deformed configurations for the large deformation analysis

$$T_{ji} = J X_{j,j} \sigma_{ji} \quad (3)$$

개량 라그랑지 수식화에서는 Fig. 2와 같이 임의시간  $t$ 에서의 형상  $\Omega'$ 를 기준 좌표계로 지정하여  $\Delta t$  동안에 미소변형을 하는 것으로 가정한다. 이때의 변형이 미소하므로 모든 정적, 동적 변수를  $T_{ji} \approx \sigma_{ji}$ 로 가정되어지는  $\Omega'$ 에서의 값으로 근사할 수 있다. 따라서,  $J \approx 1$ 이 되도록 시간증분  $\Delta t$ 를 매우 작게 잡으면 식(2)를 다음과 같이 증분형으로 나타낼 수 있다.

$$\int_{\Omega'} \Delta T_{ji} \bar{u}_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega'} \rho \Delta b_i \bar{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_f'} \Delta t_i \bar{u}_i d\Gamma, \quad \forall \bar{u}_i \quad (4)$$

여기서 식(3)에 증분을 취하고  $J \approx 1$ ,  $\Delta J \approx \Delta u_{k,k}$ ,  $X_{j,j} \approx \delta_{ji}$ 라는 가정을 이용하면  $\Delta T_{ji}$ 와  $\Delta \sigma_{ji}$ 의 관계는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta T_{ji} = \Delta \sigma_{ji} \delta_{ji} + \sigma_{jk} \Delta u_{k,k} - \sigma_{ki} \Delta u_{j,i} \quad (5)$$

식(5)를 식(4)에 대입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{\Omega'} (\Delta \sigma_{ki} \delta_{jk} + \sigma_{jk} \Delta u_{k,k} - \sigma_{ki} \Delta u_{j,i}) \bar{u}_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega'} \rho b_i^{t+\Delta t} \bar{u}_i d\Omega - \int_{\Gamma_f'} t_i^{t+\Delta t} \bar{u}_i d\Gamma - \int_{\Omega'} \sigma_{ji} \bar{u}_{i,j} d\Omega, \quad \forall \bar{u}_i \quad (6)$$

유한회전 효과를 허용하면서, 회전대상성 (Objectivity)을 갖는 Jaumann증분을 Cauchy 응력텐서에 도입하면 다음과 같이 나타내어진다.

$$\nabla \sigma_{ij} = \Delta \sigma_{ij} - \sigma_{ik} \omega_{kj} - \sigma_{jk} \omega_{ki} \quad (7)$$

여기서  $\omega_{ij} = (\Delta u_{j,i} - \Delta u_{i,j})/2$ 는 시간증분에서의 회전텐서이다.

재료의 성질을 후크의 법칙을 따르는 탄성 재료로 가정하였고, 이에 따른 재료의 구성방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla \sigma_{ij} = E_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} \quad (8)$$

여기서  $E_{ijkl}$ 은 4차원 텐서로 표시되는 선형탄성 재료상수이다.

### 3. 부분 구조법(Substructuring Method)

부분구조법은 수학적으로는 계 전체에 대한 식의 일부를 푸는 것이라 할 수 있고, 물리적으로는 하나의 구조물이나 유한요소 모델링이 여러 개의 부분으로 나누어진 것 중의 하나를 푸는 것이라고 할 수 있다. 정적 해석에서의 부분 구조법은 큰 구조물을 경계에서의 하중과 변위의 관계를 얻을 수 있는 작은 부분들로 나누고, 경계에서의 변수가 결정되면 나뉘어진 작은 구조에서의 값을 구할 수 있게 된다. 정적 해석에서의 부분 구조법의 수학적 이론을 간단히 요약하면 다음과 같다. 전체 구조물이  $n$ 개의 부 구조물로 구성될 때  $j$ 번째 구조물에 대한 하중 평형방정식은 다음과 같다.

$$[K^{(j)}]\{U^{(j)}\} = \{P^{(j)}\} \quad (9)$$

이를 내부 절점과 경계 절점에서의 하중과 변위로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{U^{(j)}\} &= [U_i^{(j)} \quad U_b^{(j)}]^T \\ \{P^{(j)}\} &= [P_i^{(j)} \quad P_b^{(j)}]^T \end{aligned} \quad (10)$$

따라서  $j$ 번째 부분 구조를 나누어 나타내면 다음과 같은 하중변위의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(j)} & K_{ib}^{(j)} \\ K_{bi}^{(j)} & K_{bb}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i^{(j)} \\ U_b^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_i^{(j)} \\ P_b^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

여기서  $\{U_i^{(j)}\}$ ,  $\{U_b^{(j)}\}$ 는 각각 내부 및 경계면의 변위이고,  $\{P_i^{(j)}\}$ ,  $\{P_b^{(j)}\}$ 는 각각 내부 및 경계면의 하중이다. 위 첨자  $j$ 는 구조물에서  $j$ 번째의 부분과 관련된 전체 강성 행렬에 대한  $j$ 번째 부 행렬이다.

이때 내부 자유도  $\{U_i^{(j)}\}$ 을 경계면의 자유

도  $\{U_b^{(j)}\}$ 의 항으로 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$\{U_i\} = -[K_{ii}]^{-1}[K_{ib}]\{U_b\} + [K_{ii}]^{-1}\{P_i\} \quad (12)$$

따라서 경계면에 대한 강성 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$[K_b]\{U_b\} = \{\bar{P}_b\} \quad (13)$$

여기서  $[K_b]$ 는 유효 부분 구조의 강성행렬이고,  $\{\bar{P}_b\}$ 는 유효 부분 구조의 하중 행렬로 다음과 같다.

$$[K_b] = [K_{bb}] - [K_{bi}][K_{ii}]^{-1}[K_{ib}] \quad (14)$$

$$\{\bar{P}_b\} = \{P_b\} - [K_{bi}][K_{ii}]^{-1}\{P_i\} \quad (15)$$

전체 구조에 대한 지배방정식은  $n$ 개의 부분구조에 대한  $[K_b]$ 와  $\{\bar{P}_b\}$ 의 조합으로써 구해지고 다음과 같이 표현되는데 이 과정을 응축과정(Condensation Process)이라 한다.

$$[K^*]\{U^*\} = \{P^*\} \quad (16)$$

여기서  $\{U^*\}$ 는 모든 경계면에서의 변위 벡터이고,  $\{P^*\}$ 는 전체 구조물의 하중 벡터이다.

내부에서의 변위 벡터  $\{U_i\}$ 는  $\{U^*\}$ 에서 추출된  $\{U_b\}$ 에서 식(12)로 계산할 수 있는데, 내부 자유도를 계산하는 과정을 환원과정(Recovery Process)이라 한다. 식(14)와 (15)에서 역행렬을 구하는 것은 직접적으로 구해지기 어려우므로 다음과 같이 행렬의 곱을 치환한 후 가우스법에 의해 해를 구한다.

$$[A_i] = [K_{ii}]^{-1}[K_{ib}], [B_i] = [K_{ii}]^{-1}\{P_i\} \quad (17)$$

$$[K_{ii}][A_i \mid B_i] = [K_{ib} \mid P_i] \quad (18)$$

정적 해석에서 부분 구조법의 적용 시에 근사하지 않았으므로 부분 구조법에 의한 결과는 해가 동일하게 나타난다. 부분 구조법을 사용함으로써 계산상의 효율을 증대시키고 동시에 여러

그룹에서 각각 다른 부분들을 가지고 독립적으로 연구할 수 있는 장점이 있다. 반면, 여러 부분 구조에 대한 정보를 저장하고 있다가 내부 자유도에 대한 값을 구할 때 사용해야 하므로 이러한 과정 상에 데이터의 저장, 관리가 복잡하다는 단점이 있다. 데이터의 관리라는 측면에서 부분 구조법은 응축된 강성행렬, 하중행렬, 그리고 응축 과정의 중간화일의 저장이 필요하며 부분구조에 대한 행렬을 조합할 때 필요한 인식자가 별도로 필요하다.

#### 4. 다단계 부분 구조법 (Multi-level Substructuring Method)

자유도가 커짐에 따라 고효율의 컴퓨터 환경에서도 계산시간은 감당하지 못할 정도로 증가하게 된다. 이를 해결하기 위한 한 가지 방법으로 다단계의 부분 구조법이 개발되었다. 전체 구조물에 대한 평형방정식은 식(19)와 같이 표현된다.

$$[K]\{U\} = \{P\} \quad (19)$$

여기서  $[K]$ 는 강성 행렬이고,  $\{U\}$ 는 변위 벡터행렬,  $\{P\}$ 는 하중 벡터행렬이다.

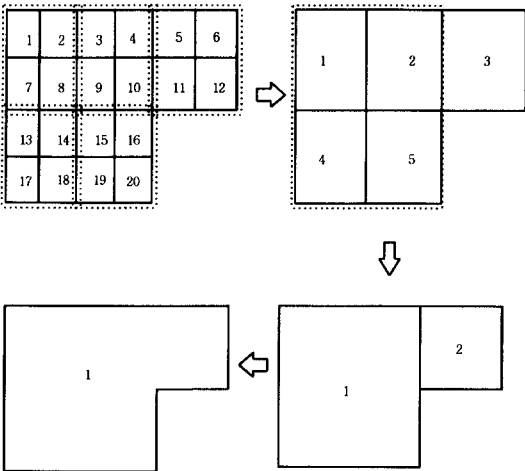


Fig. 3 Example of a multi-level substructuring process

임의의 전체 구조물은 Fig. 3과 같이  $n$ 개의 조합으로 이루어지는데, 각각의 조합은 각각 하부 단계에 있는 부분 구조를 조합하여 이루어진다. 부분 구조의 단계를 첫 번째 단계는  $m=1$ , 두 번째 단계는  $m=2$  와 같이 구분하면 기호  $mn$ 은  $m$  번째 단계의 부분 구조에서  $n$  번째 조합을 의미한다. 이와 같이 표기하면 식(19)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [K_{m,n}]_{bb} & [K_{m,n}]_{bi} \\ [K_{m,n}]_{ib} & [K_{m,n}]_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_{m,n}\}_b \\ \{U_{m,n}\}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_{m,n}\}_b \\ \{P_{m,n}\}_i \end{Bmatrix} \quad (20)$$

위 식에서  $\{U_{m,n}\}_b$ 는  $m-1$  단계에 있는 두개 이상의 부분 구조를 조합한 후 생성된 조합물 중에서  $n$  번째 부분구조에 있어서 이 조합의 경계면에 관한 변위 벡터행렬이고,  $\{U_{m,n}\}_i$ 는  $m-1$  단계의 두개 이상의 부분 구조물의 조합으로써  $n$  번째 부분 구조의 내부에 관한 변위 벡터 행렬이다. 또한  $\{P_{m,n}\}_b$ 는  $m-1$  단계의 부분 구조를 조합한 후 생성된  $m$  단계의  $n$  번째 부분 구조의 경계면에 작용하는 외부 하중을 나타내고,  $\{P_{m,n}\}_i$ 는 내부에 작용하는 외부 하중을 나타낸다.

$m$  단계의 각 조합들은 앞 절의 부분 구조법과 동일한 방법으로 압축되어 지는데, 식(9)에서 (18)까지의 과정을 정리하면 다음 식으로 정리된다.

$$\begin{Bmatrix} \{U_{m,n}\}_i \\ -[K_{m,n}]_{ib} \{U_{m,n}\}_b \end{Bmatrix} = [K_{m,n}]_{ij}^{-1} \{P_{m,n}\}_i \quad (21)$$

$$[K_{m,n}]_b \{U_{m,n}\}_b = \{ \bar{P}_{m,n} \}_b \quad (22)$$

여기서

$$\begin{Bmatrix} \{ \bar{P}_{m,n} \}_b \\ -[K_{m,n}]_{bi} [K_{m,n}]_{ii}^{-1} \{P_{m,n}\}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_{m,n}\}_b \\ -[K_{m,n}]_{bi} [K_{m,n}]_{ii}^{-1} \{P_{m,n}\}_i \end{Bmatrix} \quad (23)$$

이고,

$$\begin{Bmatrix} \{K_{m,n}\}_b \\ -[K_{m,n}]_{bi} [K_{m,n}]_{ii}^{-1} [K_{m,n}]_{ib} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{K_{m,n}\}_{bb} \\ -[K_{m,n}]_{bi} [K_{m,n}]_{ii}^{-1} [K_{m,n}]_{ib} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

이다.

다단계 부분 구조법은 우선 각각의 강성 행렬과 하중 벡터를 상응하는 경계면에서의 자유도에 대한 것으로 압축한 후 각각의 부분 구조를 해석한다. 첫 단계에서 다양한 부분 구조들이 조합되며 어떤 일부의 부분 구조는 다른 것과 조합될 필요가 없는 것도 있다. 첫 단계 부분 구조들은 새로운 경계면의 자유도로 응축되고 이중에서 부분구조의 경계면의 일부는 다른 부분 구조와 조합될 때는 내부 자유도로 인식되게 된다. 최종 단계에서의 평형방정식은 마지막 단계에서의 경계면의 변위의 향으로 표현되며 다음 식과 같이 표현된다. 이때 생성된 최종 단계의 절점의 자유도로 구성된 하나의 블록, 즉 슈퍼요소(Super Element)가 된다.

$$[K_1^*]_b \{U_1^*\}_b = \{P_1^*\}_b \quad (25)$$

마지막 단계에서 강성행렬의 분해와 대체 방식으로 skyline방식으로 경계면에서의 변위를 구한다. 구해진 경계면에서의 자유도를 전 단계의 부분 구조로 환원시키면 전단계의 부분 구조 경계면에서의 변위가 얻어지고 식(21)을 통해 각 부분 구조의 내부 변위를 계산할 수 있는데, 이런 과정을 반복하면 전체 구조물의 내부 변위를 계산할 수 있다.

### 5. 다단계 부분구조 유한요소 해석

다단계 부분구조법을 선형해석에 적용하기 위해서 아래와 같은 흐름으로 프로그램화 하였다. 광역의 전체 강성행렬을 요소 강성행렬을 조합함으로써 구하지 않고 각각의 슈퍼요소에 해당하는 3단계 부영역에 있는 요소에 대해서 부분 요소 강성행렬을 구하고 이를 조합한 뒤 응축과정을 순차적으로 실시하여 2단계의 조합들을 구성하고 다시 2단계의 부영역을 응축하여 최종적으로 하나의 슈퍼요소로 응축시킨다. 각각의 부영역에서 응축하는 과정에서 발생하는 행렬에 관한 정보와 역행렬은 저장하고 있다가 환원단계에서 응축된 절점에 대한 변위를 구할 때 이용한다. 다단계 부

분구조법의 과정을 다음과 같이 개략적으로 표현할 수 있다.

- I. 각각의 기초단계 부영역에서의 요소에 대한 형상, 하중 및 경계조건, 재료 성질을 정의한다.
- II. 기초 단계 부분구조법을 통해 상위 단계의 요소로 압축한다.
  - a. 각각의 기초단계 부영역에 대한 요소 강성행렬을 구한 후 조합한다.
  - b. 강성행렬과 하중벡터를 주절점과 보조절점에 대한 것으로 구분한다.
  - c. 강성행렬과 하중벡터를 하나의 슈퍼요소로 응축한다. (응축과정)
- III. 상기 II에서 생성된 슈퍼요소가 최종적으로 하나로 응축될때 까지 이 과정을 반복한다. 각각의 응축단계에서 필요한 역행렬은 직접 구하지 않고 가우스법을 통해 행렬의 곱으로 구한다.
  - a. 상위단계의 부영역에 대해 하위단계를 통해 응축된 행렬을 조합한다.
  - b. 강성행렬과 하중벡터를 다시 주절점과 보조절점에 대한 것으로 구분한다.
  - c. 강성행렬과 하중벡터를 상위 슈퍼요소로 응축한다. (응축과정)
- IV. 슈퍼요소로 정의된 단면을 길이방향으로 확대하여 각각의 단면에 적용한다.
- V. 최종적으로 압축된 강성행렬과 하중벡터를 풀어 주절점에 대한 해를 구한다.
- VI. 상기V에서 구한 해와 II와III단계의 응축과정에서 생성된 데이터를 가지고 전체 자유도에 관한 해를 구해 낸다.(환원 과정)
- VII. 구해진 해로부터 응력을 계산한다.

다단계 부분구조법에 의한 슈퍼요소화는 크게 강성행렬의 응축과정과 응축된 강성행렬의 환원과정으로 구분되는데 강성행렬의 응축에서는 응축을 통해 슈퍼요소의 강성행렬을 구성하고 이들 슈퍼요소의 강성행렬을 광역 강성행렬로 조합하

는 과정을 가지며 환원과정에서는 슈퍼요소에서 구해진 변위와 저장된 역행렬에서 보조절점의 변위를 계산해내는 과정이다.

슈퍼요소화에 따른 기대효과는 연산과정에서 계산되는 연산수가 현저히 축소된다는 점이다. 연산수의 축소는 중앙처리장치의 계산시간을 단축시키고 계산과정에서 메모리의 공간을 축소할 수 있게 된다. 반면 응축과정에서 축소된 절점에 대한 역행렬을 계산하여 환원단계에서 반영하여야 하기 때문에 각 단계의 응축과정에서 발생하는 데이터를 별도 저장 관리하여야 하고 응축된 강성행렬의 non-zero 블록이 증가하며 I/O시간이 증가하고 데이터의 저장공간이 별도로 필요하게 되는 단점이 있다.

## 6. 코일 스프링 슈퍼요소

### 6. 1. 원형 단면 보의 슈퍼요소화

Fig. 4는 다단계의 압축 과정을 거쳐 코일 스프링의 한 단면이 하나의 요소로 축소되는 다단계 부분 구조법의 적용과정을 개략적으로 보여준다. 계에서 구하고자 하는 변위가 축소되지 않은 절점, 즉 주절점(Master Node)에 대한 자유도만 구할 경우, 해는 이와 같이 축소된 행렬 계산에서 간단히 구해진다. 이와 같은 방법을 단순히 응축 기법이라고도 한다. Fig. 4는 단면을 12개의 부영역으로 나누고 각 부영역에서의 4개의 요소를 압축하여 하나의 요소로 압축하고, 다시 3개의 압축요소로 구성된 4개의 2차 부영역을 공통절점인 중간의 절점을 축소시키고, 다시 4개의 압축요소로 구성된 3차 부영역을 공통절점인 중간의 절점을 축소시켜 하나의 요소로 응축한다. 이때 하나로 응축되어 생성된 것을 슈퍼요소라 하며 이 과정을 도식화하여 나타낸 것이다.

이론적으로, 응축 기법이 적용된 다단계 부분 구조법에 의해서는 해의 정확성이 변하지 않는다. 다단계 부분 구조법에 의한 압축 과정을 거친 해석 결과와 일반적인 응축 과정 없이 해석한 변위량 및 응력을 비교하면 응축 과정과 환원 과정

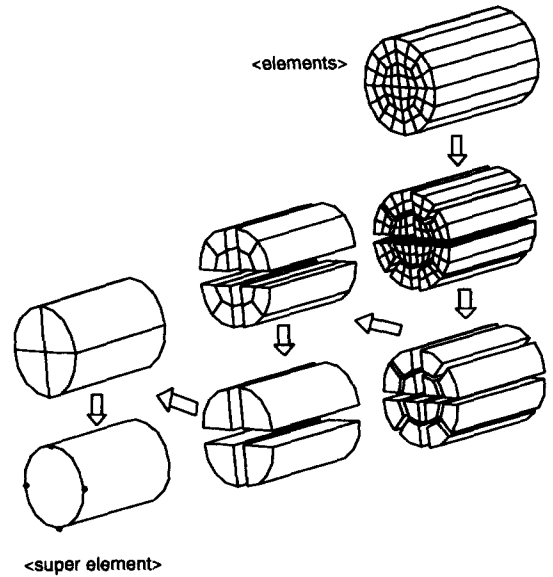


Fig. 4 Condensation process with multi-level substructuring for coil springs

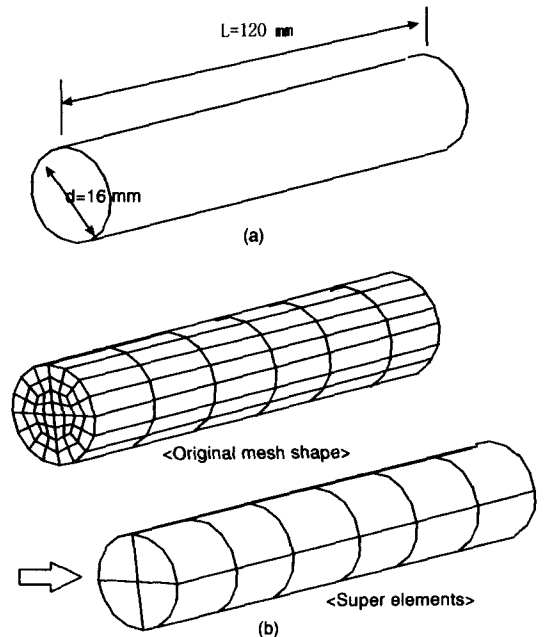


Fig. 5 Example model with circular cross section and a substructuring scheme: (a) Circular section model; (b) Meshed shape and super elements



을 거친 부분 구조법의 해석 결과는 경계조건이 동일한 경우 일반적인 해석 결과와 동일하다.

이 슈퍼요소를 길이 방향으로 연결함으로써 몇 개의 영역으로 분할하여 해석하였다. Fig. 5(a)는 해석에 사용된 원형 단면 형상 보 예제의 형상이고 Fig. 5(b)는 슈퍼요소를 바탕으로 원형 단면 보를 모델링한 것을 개략적으로 보여주는 그림이다. 슈퍼요소는 각 단면에 대한 응축 과정에서 생긴 데이터를 저장하고 있다가 최종적으로 슈퍼요소로 압축하는 과정에서 축소된 절점에서의 변위를 구할 때 환원시켜 준다.

### 6. 2. 단면 형상의 유한요소 분할 방법 검토

코일스프링을 해석하기 앞서 단면이 원형인 보에 대해 인장, 비틀림, 굽힘 조건에서 해석을 실시하여 슈퍼요소를 사용한 해석 결과를 검증하였다. 해석시 사용한 재료의 물성과 치수는 다음과 같다.

- 탄성계수  $E = 200 \text{ GPa}$
- 포와송 비  $\nu = 0.3$
- 소재경  $d = 16 \text{ mm}$
- 보의 길이  $L = 120\text{mm}$

원형 단면 보에 대해 Fig. 6과 같이 세 가지 종류로 구분하여 단면 형상을 분할하였는데 Fig. 6(a)는 단면의 외곽을 16등분하고 내부를 반경 방향으로 3등분한 것이고, Fig. 6(b)는 단면의 외곽을 16등분하고 내부는 반경 방향으로 4등분하였고, Fig. 6(c)는 단면의 외곽을 24등분하고 내부를 반경 방향으로 6등분한 것이다. 세 경우 모두 길이 방향으로는 12등분하였다. Fig. 7은 각 모델에 부여한 경계 조건을 도시한 것이며 부영역화하는 과정 중에 경계조건이 다르게 적용될 수 있음을 보여준다. Fig. 7(a)는 인장 방향으로 강제 변위를 0.2mm씩 다섯 지점에 부여한 인장 조건이고, Fig. 7(c)는 단면 외곽의 네 지점에 원주 방향으로 0.5mm의 강제 변위를 부여한 비틀

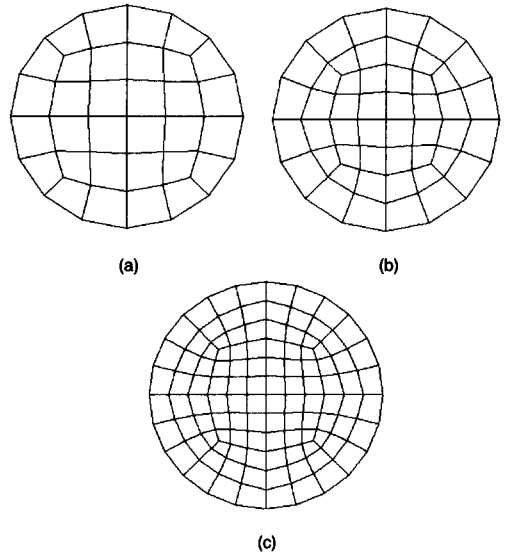


Fig. 6 Sectional mesh shapes for the circular cross section bar: (a) 3 by 4 section mesh; (b) 4 by 4 section mesh; (c) 6 by 6 section mesh

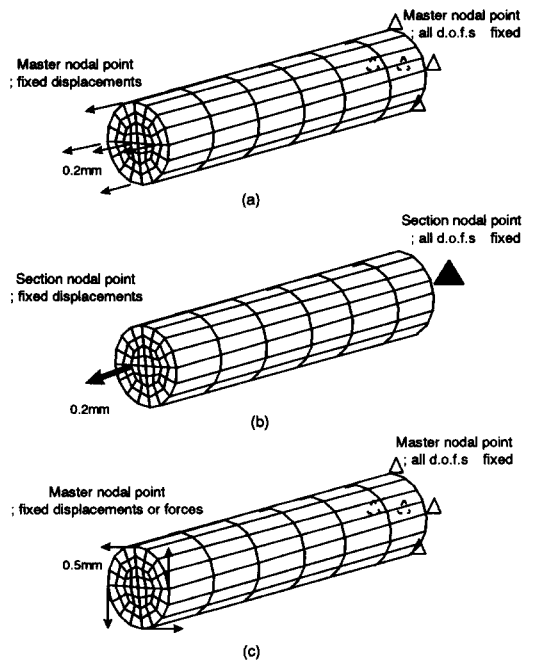


Fig. 7 Model with a circular cross section bar and boundary conditions: (a) Tension condition-I; (b) Tension condition-II; (c) Torsion condition

Table 1 Comparison of the maximum tensile stress among super elements with different sectional mesh shapes

Analysis method	Tensile stress (MPa)
3 × 4 Mesh	338.84
4 × 4 Mesh	338.83
6 × 6 Mesh	338.82
Analytic	333.33

림 조건이다. 반대편은 단면의 중심과 주절점이 존재하는 단면 외곽의 네 지점을 고정시키고 다단계 부분구조법을 이용하여 해석을 하였다. Fig.7(b)는 인장 조건에서 부영역화하기 전의 단면 전체 절점에 경계조건을 설정한 것이다.

슈퍼요소를 사용하면 경계 조건을 부여할 수 있는 절점이 주절점으로 제한 되는 점으로 인해 인장조건의 설정이 보 단면 전체에 고르지 못한 점이 나타난다. 슈퍼요소에서 주절점이 아닌 보조절점에 경계절점이 설정되는 경우 계산 과정상 다단계의 응축과정을 거쳐 슈퍼요소화되는 과정에서 발생한 응축 데이터를 환원과정에서 경계조건에 대해서 다시 반영하여야 하기 때문에 계산이 길어지고 복잡하게 되는 불리한 점이 발생한다. 따라서 다단계 부분구조법을 경계조건이 포함되지 않는 단면에 대해서만 적용하고 경계조건이 설정되는 단면이 포함되는 영역은 응축하지 않도록 해석 방법을 수정하였다.

경계조건으로써 주절점에 경계조건을 부여하는 방법을 변경하여 양단의 단면 전체의 절점에 대해 경계조건을 부여하고 해석한 결과, 세가지 분할 조건에 대해 거의 유사한 응력분포를 나타내었으며 중간 지점의 응력의 크기도 Table 1에 나타낸 바와 같이 3 × 4분할은 338.84, 4 × 4분할은 338.82, 6 × 6 분할은 338.82MPa를 나타내었는데 모두 동일한 응력수준은 나타나나 인장조건에 대한 이론적인 값 333.33MPa와는 1.65%정도의 오차를 가지는 것으로 나타났다.

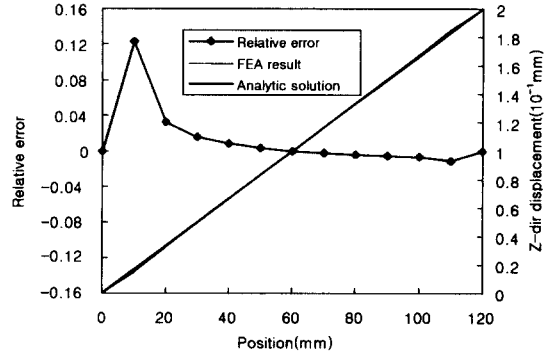


Fig. 8 Displacement along the center line of a section under tension condition-II

Fig. 8은 단면중심선에 존재하는 절점들의 변위와 이론치와의 차를 나타낸 그래프인데 중간지점의 변위는 한쪽 끝에서 부여한 변위량 0.2mm의 절반인 0.1mm를 나타내며 양 끝단에서 선단 효과에 의해 오차가 크게 발생하고 나머지 중앙 부분에서는 오차가 미소한 것으로 나타나고 있다. 이상의 결과에서 인장 조건에 대하여 변형형상과 응력분포가 이론치와 잘 일치한다는 것을 보여준다. 한편 인장 조건에 대한 해석 결과는 단면 분할 정도에 별로 영향을 받지 않는 것으로 보인다. 단면 분할에 대한 응력분포 특성을 비교하고 비틀림 하중 조건에 대한 응력 계산 결과의 타당성을 검증하기 위하여 세 가지 요소 형태의 단면에 대해 비틀림 조건을 해석하였다. 비틀림 하중 조건은 Fig. 7 (c)와 같이 한쪽 끝의 주절점은 모두 변위를 고정시키고, 다른 한쪽 끝의 주절점에 0.5mm씩 회전 방향으로 강제 변위를 주었다.

이때 보의 변형형상은 보의 단면 중심에 대해 반경 방향으로 직선이 유지되어야 하며 동일한 반경 위치에서는 동일한 변위량을 가져야 한다. 해석 결과를 보면 전체적으로 반경 방향으로 중심원을 그리고 세 가지의 단면 분할 조건은 유사한 변형 특성을 나타내는 것을 알 수 있다. 하중이 부여되는 지점과 고정되는 부위에서는 선단효과가 나타나 변형이 집중되는 현상이 일어나는데 이들 끝 부분을 제외하면 보의 중심에서는 거의

균일한 변위량을 가진다. Fig. 9에 중간 지점의 단면에 대한 변위량을 반경방향에 대해 도시하였다.

전단응력에 관한 해석결과를 검증하기 위해 상용 프로그램인 MARC와 ABAQUS로 해석한 결과와 순수 비틀림을 가정한 이론해를 응력분포 중 표면에 작용하는 상당응력의 크기를 비교하여 Table 2에 도시하였다. 부분구조법에 의한 해는 ABAQUS 프로그램으로 얻어진 해와 약 1.1% 정도, MARC와는 2.3%의 차가 발생하고 있으나 응력분포는 거의 동일한 분포 형태를 나타내고 있다. 본 해석과 상용 프로그램을 이용한 해석 모

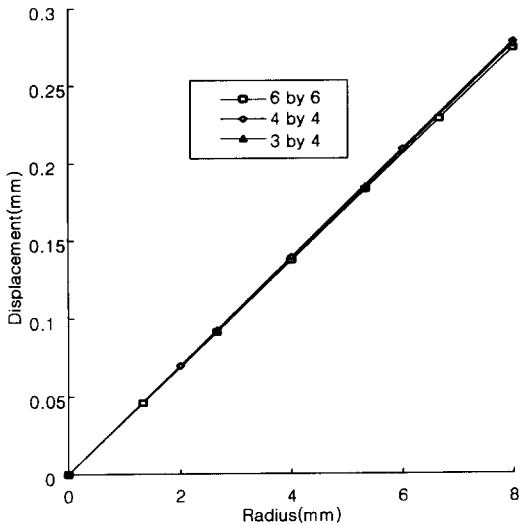


Fig. 9 Displacement distribution in the cross section at the mid-point of a bar under torsion condition

Table 2 Comparison of the maximum shear stress among several FE codes

Analysis method	Max. Shear Stress (MPa)
Analytic	272.0
MARC	305.1
ABAQUS	294.7
This Work	292.4

두가 순수비틀림이라고 가정하의 이론식에서 얻어진 값과는 약간의 차이가 보이는데 이는 하중 조건이 순수 비틀림을 유도하지 못한 것에서 기인하는 것으로 보인다.

이상의 결과로부터 코일스프링을 모델링하기 위해서는 단면의 분할은 반경 방향으로 4등분 이상이어야 비틀림 하중에 대해 정확한 해를 나타낼 수 있다는 것을 알 수 있다.

### 6.3. 길이방향으로의 유한요소 분할수에 따른 결과 비교

코일스프링을 모델링할 때 길이방향으로의 분할 정도가 해석결과에 영향을 미치게 되므로 코일스프링의 길이방향 분할에 따른 응력의 크기와 변위에 대한 상대적인 오차를 평가하였다. 반경

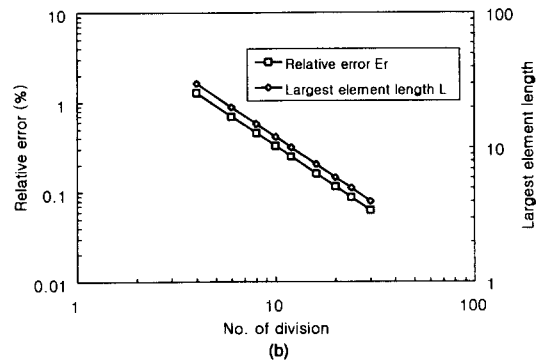
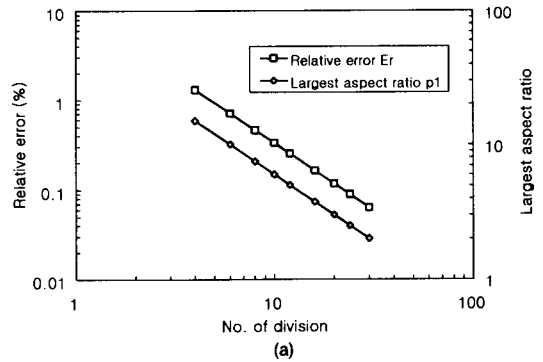


Fig. 10 Relative error norm with respect to the number of division along the bar length under torsion condition: (a) Largest aspect ratio; (b) Largest element length

방향으로의 분할은 4등분하고 길이 방향으로는 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24, 30등분하고 비틀림 하중 조건을 설정하고 해석을 수행하였다. 해석 대상을 3차원 선형 요소로 모델링하면서 발생하는 이산화 과정의 오차를 평가하기 위하여 식 (24)를 사용하여 변위 오차를 상대적으로 평가하였다. Fig. 10(a), (b)는 각각에 대한 요소의 장단비와 길이방향으로의 요소 길이에 대한 변위의 상대 오차율을 나타낸 것이다.

상대 오차는 일반적으로 1%미만이면 이산화에 의한 해석 결과의 오차는 허용되는 것으로 볼 수 있으며 이를 기준으로 볼 때 길이 방향으로의 분할수는 요소의 최대 장단비가 10이하라면 신뢰할 만한 결과를 얻을 수 있을 것으로 판단된다.

## 7. 결론

본 논문에서는 코일스프링의 유한요소 변형해석 및 응력해석을 위하여, 다단계 부분구조법 이론을 도입한 3차원 연속체 슈퍼요소를 개발하였다. 개발된 슈퍼요소의 정확도와 신뢰도를 검증하였다. 본 연구에서 얻어진 결과를 종합하면 다음과 같다.

- 1) 미소변형을 고려한 선형 해석 이론과 대변형을 고려한 비선형 해석 이론을 도입하여 3차원 연속체요소로 유한요소 수식화하고 이를 유한요소 프로그램화 하였다.
- 2) 유한요소 선형해석 프로그램에 부분구조법의 이론과 다단계 부분구조법 이론을 도입하였으며, 다단계에 걸쳐 체계적인 응축 기법을 적용할 수 있는 다단계 부분구조법 해석 프로그램을 개발하였다.
- 3) 코일스프링의 유한요소 해석을 위한 3차원 연속체 슈퍼요소를 개발하고, 인장, 비틀림 및 굽힘 등의 예제를 통해 해를 검증한 결과 응축 기법을 사용한 결과와 일반 유한요소

해석 결과가 잘 일치하였다. 개발된 슈퍼요소는 스프링이 아닌 세장비가 긴 부재의 해석에도 효과적으로 적용할 수 있다.

- 4) 코일스프링의 모델링 방법을 검토하기 위하여 원형단면의 분할 방법과 길이방향으로의 분할 방법에 대하여 검토하였고, 그 결과 단면의 분할은 반경 방향으로 4등분 이상, 길이 방향으로서는 최대장단비가 10이하가 되도록 모델링하여야 해를 신뢰할 수 있다는 결론을 얻었다.

## 참 고 문 헌

- 1) S. U. Benscoten, The Partitioning of Matrices in Structural Analysis, J. Appl. Mech., Vol.15, pp.303-307, 1948.
- 2) J. S. Prezieniecki, and P. H. Denke, Joining of Complex Substructures by the Matrix Force Method, J. Aircraft, Vol.3, pp.236-243, 1966.
- 3) F. W. Williams, Natural Frequencies of Repetitive Substructures, Q. J. Mech. Appl. Math., XXIV, Pt.3, pp.285-310, 1971.
- 4) U. Kirsch, M. Reiss and U. Shamir, Optimum Design by Partitioning into Substructures, J. Struct. Div. ASCE. Vol. 98, pp.249-267, 1972.
- 5) G. von Fuchs, J. R. Roy and E. Schrem, Hypermatrix Solution of Large Sets of Symmetric Positive-Definite Linear Equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, Vol.1, pp.197-216, 1972.
- 6) F. W. Williams, Comparison between Sparse Stiffness Matrix and Substructure Methods, Int. J. for Numer. Methods Eng, Vol.5, pp.383-394, 1973.
- 7) T. Furuike, Computerized Multiple Level Substructuring Analysis, Comput. & Struct.,

- Vol.2, pp.1063-1073, 1972.
- 8) A. George, Nested Dissection of a Regular Finite Mesh, SIAM J. Num. Analysis, Vol.10, pp.345-363, 1973.
  - 9) O. Egeland and P. O. Araldsen, SESAM 69-A General Purpose Finite Element Method Program, Comput. & Struct., Vol.4, pp.41-68, 1974.
  - 10) U. Kirsch, Multi-level Approach to Optimum Structural Design, J. Struct. Div. ASCE, Vol.101, pp.957-974, 1975.
  - 11) A. K. Noor, H. A. Kamel and R. E. Fulton, Substructuring Technique-Status and Projections, Comput. & Struct., Vol.8, pp. 621-623, 1978.
  - 12) K. J. Bathe and S. Gracewski, On Non-linear Dynamic Analysis using Substructuring and Mode Superposition, Comput. & Struct., Vol.13, pp.699-707, 1981.
  - 13) A. K. Noor and H. E. Lowder, Approximate Reanalysis Techniques with Substructuring, J. Struct. Div. ASCE, Vol. 101, pp.1687-1698, 1975.
  - 14) A. K. Noor and C. M. Anderson, Mixed Models and Reduction Techniques for Large Rotation Nonlinear problems, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, Vol.44, No.1, pp.67-89, 1984.
  - 15) A. K. Noor and J. M. Peters, A Computational Strategy for Making Complicated Structural Problem Simple, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, Vol.71, pp. 167-182, 1988.
  - 16) D. Tao and E. Ramm, Characteristics of Subspace in Reduced Basis Technique, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.31, No.8, pp.1567-1583, 1991.