

Ball screw형 전동식 동력 조향 장치의 제어에 관한 연구

A Study on the Control Algorithm for a Ball Screw Type of Motor Driven Power Steering System

윤석찬*, 왕영용**, 한창수***
Seokchan Yun, Youngyong Wang, Changsoo Han

ABSTRACT

The power steering system for automobiles is becoming more popular for supporting steering efforts of the drivers, especially for a parking lot maneuver. Though hydraulic power steering has been widely used for a long time, the efficiency of that is not high enough. The motor driven power steering system can solve the problems associated with the hydraulic power steering system. In this study, dynamic model and control algorithm of the ball screw type of MDPS system have been derived and analysed by using the method of discrete modeling technology. To improve steering feel and power steering characteristics, the additional scheme is proposed to the conventional power boosting control algorithm. Through simulations, control gain effects to the steering angle gain in the frequency domain were verified. The steering returnability and steering torque phase lag in on-center handling test were performed also.

주요기술용어 : Motor Driven Power Steering(전동식 동력조향장치), Ball Screw(볼 스크류), Control Algorithm(제어알고리즘), Steering Angle Gain(조향각 계인), Returnability(복원성), Phase Lag(위상지연)

Nomenclature

K_{tb} , K_{sl} : (Nm/rad) : Torsion bar, steering linkage stiffness
 B_{sl} , B_{fw} : (Nm/(rad/sec)) : SW, FW viscous damping coeff.

B_m : (Nm/(rad/sec)) : Motor viscous damping coeff.
 J_{sw} , J_{fw} : (kgm²) : SW, FW moment of inertia
 J_p : (kgm²) : Pinion moment of inertia
 M_{sl} : (kg) : Steering linkage mass
 J_m : (kgm²) : Motor Armature Inertia
 r_1 : (m) : Rack & Pinion gear ratio (Pinion

* 정회원, 한양대학교 정밀기계공학과 대학원

** 한양대학교 정밀기계공학과 대학원

*** 정회원, 한양대학교 기계공학과

Radius)
 r_2 : (1/m) : Steering Linkage gear ratio
 r_3 : (m) : Ball Screw gear ratio
 K_m : (Nm/A) : Motor const.
 G : (V/deg.) : Torque Sensor Gain
 η : (Dim. less) : Torque transmission efficiency of gearbox
 T_{sw} : (N.m) : Steering input torque
AT : (N.m) : Aligning torque
 I_{in} : (A) : Motor input current
 θ_{sw} , θ_{fw} : (rad) : SW, FW angle
 X_{sl} : (m) : steering linkage(rack bar) displacement

1. 서론

차량의 조향력(steering effort)을 보조하는 동력 조향 장치는 정지 시나 저속 주행 시 운전자의 조향 조작력에 대한 운전자의 부담을 덜어주는 것이 목적이다. 하지만 고속 주행 시에는 타이어의 접지 저항의 감소에 따라 조향력이 가벼워지게 되어 조향 안정성이 나빠지므로 이를 방지하기 위해서는 보조 조향력을 경감시키거나 오히려 핸들이 무거워 지도록 잡아주어야 한다^{1,2)}. 이러한 배경으로 차량 속도에 따라 조향력을 보조하는 형태의 조향장치 즉, 조향컬럼(steering column)에 전동 모터를 사용한 동력 조향 장치(Motor Driven Power Steering system)가 고안되어 적용되어 왔다. 그러나 보통은 모터의 관성(motor armature inertia)이나 조향계의 마찰 등이 조향 성능이나 조향감(steering feel), 그리고 차량 운동 성능에 영향을 주고, 모터 용량의 한계성 때문에 경차에만 주로 적용이 되어 왔다. 이후 중형급 이상의 차량에 적용하기 위하여 기존의 조향 컬럼에 연결하는 대신 랙바(rack bar)에 직접 연결하는 볼 스크류(ball screw)형의 전동식 동력 조향장치가 고안되어 사용되고 있으며^{2,3)}, 본 연구에서는 이를 위한 제어기를 설계하고

자 한다. 본 논문에서는 위에서 언급한 볼 스크류형 전동식 동력 조향 장치 시스템의 모델을 유도하고 이를 바탕으로 제어기를 설계하였다. 또한 조향 특성을 나타내는 지표로서 조향각 계인을 정의하고, 이에 대한 제어기의 영향을 주파수 영역 및 시간 영역에서 고찰함으로써 제어기의 유용성을 검증하였다.

2. 본론

조향계는 트션바(torsion bar)등 강성계 요소와 각 조인트의 감쇠요소 및 부상(bushing)등의 모델링 요소로 이루어진 복잡한 시스템이다. 따라서 적절한 자유도를 가진 정확한 모델을 구성하여 조향 장치 및 차량의 조향 안정성을 분석하며, MDPS 시스템의 제어 알고리즘을 산출하는데 목적이 있다.

2.1 시스템 모델링

MDPS 시스템은 운전자가 핸들을 조작할 경우 조향 입력에 따른 전압 신호를 발생시키는 토크 센서에서 조작력을 검출함과 동시에 차속 센서에서 발생하는 펄스 신호로써 차속을 검출하고, 제어장치(control unit)에 의해 모터의 전류를 제어하여 적절한 보조동력을 발생시키는 장치이다. 제어장치는 차속에 따른 모터 전류를 발생 시킴과 동시에 시스템의 고장 시에도 정상적인 조향이 가능하도록 한다. 이 시스템은 기본적으로 토크 센서, 차속 센서, 제어장치, 모터, 감속기, ball screw 등으로 구성되어 있으며, 이 시스템의 구성을 나타내면 Fig. 1과 같다.

또한 여기서 조향장치 모델링 요소를 나타내면, 조향휠(steering wheel), 조향링크(steering linkage), 전륜 및 모터의 관성, 각 부위의 감쇠 계수, 그리고 조향컬럼과 링크의 강성 등이다. Fig. 1의 조향장치에 대한 집중질량(lumped mass) 모델을 나타내면 다음 Fig. 2와 같다.

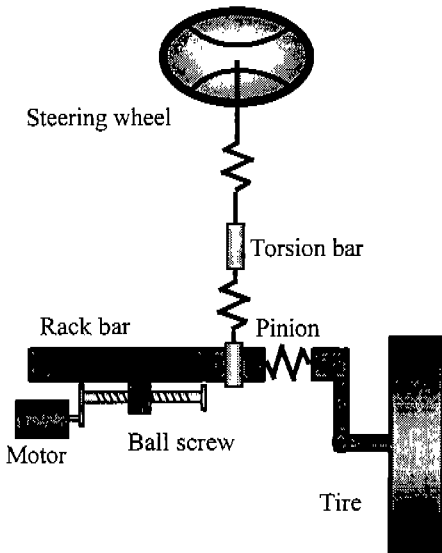


Fig. 1 Schematic of a ball screw type of MDPS system

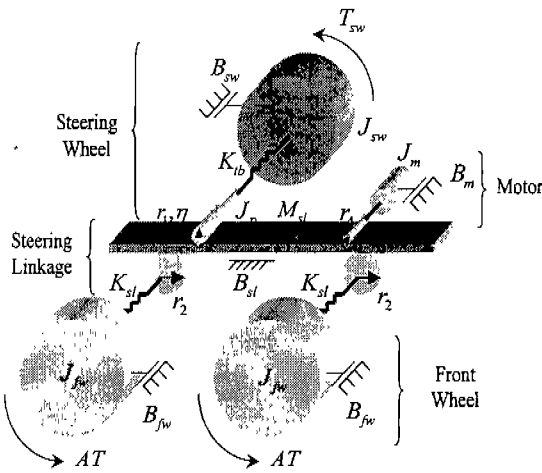


Fig. 2 Lumped mass model of a ball screw type of MDPS system

그림에서 볼 수 있듯이 피니언과 모터의 회전자(rotor)는 랙바에 대한 종속 운동을 하므로 다음의 운동 방정식과 같이 총 3자유도의 운동을

하게 된다.

$$J_{sw} \ddot{\theta}_{sw} + B_{sw} \dot{\theta}_{sw} + K_{tb}(\theta_{sw} - \frac{1}{r_1} X_{sl}) = T_{sw} \quad (1)$$

$$M_{SL} \ddot{X}_{sl} + B_{SL} \dot{X}_{sl} + K_{SL} X_{sl} - \eta \frac{K_{tb}}{r_1} \theta_{sw} - 2 \frac{K_{sl}}{r_2} \theta_{fw} = \frac{1}{r_4} K_m I_{in} \quad (2)$$

$$J_{fw} \ddot{\theta}_{fw} + B_{fw} \dot{\theta}_{fw} + K_{sl} \theta_{fw} - \frac{K_{sl}}{r_2} X_{sl} = AT \quad (3)$$

여기서 M_{SL}, B_{SL}, K_{SL} 은 종속 운동을 하는 피니언 및 모터의 회전자를 랙바의 운동방향으로 환산한 등가 관성 및 등가 감쇠계수 그리고 등가 강성을 나타내며 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_{SL} = M_{sl} + \eta \frac{J_b}{r_1^2} + \frac{J_m}{r_4^2} \quad (4)$$

$$B_{SL} = B_{sl} + \frac{B_m}{r_4^2} \quad (5)$$

$$K_{SL} = 2 \frac{K_{sl}}{r_2^2} + \eta \frac{K_{tb}}{r_1} \quad (6)$$

r_4 는 볼스크류의 단위회전각 당 랙바의 이송 거리를 나타내며 1보다 매우 작은 값이다. 따라서 위의 (4)식에서 볼 수 있듯이 모터 관성은 볼스크류 회전비인 r_4 의 제곱에 반비례하여 커지기 때문에 모터 관성의 영향이 매우 커지게 된다. 이는 기구 적으로 볼스크류의 피치(pitch)를 크게 함으로써 어느 정도 해결이 가능하나, 이 값은 모터의 토크 출력 용량과 반비례하기 때문에 일정한 값으로 제한이 될 수밖에 없다. 이 때는 관성을 줄이기 위한 제어기 설계를 하여야 한다.

조향 입력이 운전자 토크가 아닌 회전각 일 때는 조향휠이 조향각 입력에 대한 종속 운동을 하게 되고, 이때는 위의 운동방정식중 (1)식을 제외한 (2), (3)식이 지배 운동방정식이 되고, 입력은 조향각(θ_{sw}) 및 모터 입력전류(I_{in})가 된다.

2.2 모델의 검증

본 논문에서 모델의 검증을 위하여 위에서 유도한 조향장치 모델과 전체 차량 모델을 결합하여 컴퓨터 시뮬레이션을 하였다.

일반적으로 제어 알고리즘 도출을 위해서는 적절한 자유도의 차량 모델의 선택이 중요하며, 너무 높은 자유도의 모델은 작업의 효율성 및 명료성을 해치게 된다. 그러나 조향 입력에 대한 차량의 안정성을 보다 정확히 판별하기 위해서는 조향 응답에 따른 운동을 자세히 나타내어 주는 전체 차량 모델이 필요하게 된다.

Table 1 D.O.F of Full Vehicle Model

		Parameter	No. of Part	D.O.F.
Body		x,y, yaw,roll	1	4
Wheel	Spin	ψ	4	4
	Steer	ϕ		1
Total		9 D.O.F.		

Table 2 Full vehicle model parameter

Parameter	Value	Unit
Vehicle (sprung)mass	1245(1045)	kg
Yaw moment of inertia of vehicle	2014	kgm ²
Dist. from C.G. to front,rear axle	1.29,1.37	m
Front, rear track width	1.42,1.42	m
Front, rear cornering stiffness	38400,30666	N/rad
Tire rolling resistance coeff.	0.012	Dim.less
Front, rear roll stiffness	37356,31420	Nm/rad
Front, rear roll damping	1600,1600	Nms/rad
Distance from C.G. to roll axis	0.4	m

여기에서는 다음 Table 1에 나타낸 자유도를 가지는 전체 차량의 모델¹²⁾을 구성하였으며, 이때 사용한 차량의 파라미터는 table 2와 같다.

시뮬레이션을 위하여 앞서 기술한 조향장치 모델과 차량 모델을 상용 프로그램인 SimuLink를 사용하여 구성하였으며 다음 Fig. 3에 나타내었다.

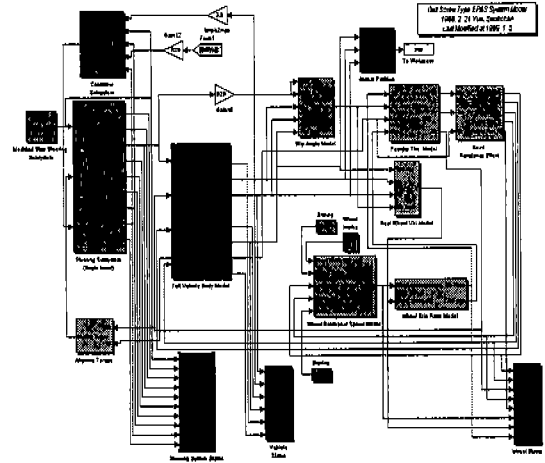


Fig. 3 Simulink model of entire system

구성한 MDPS시스템의 검증 방법으로는 J-turn시험 수행 시 차량의 중요한 인자인 요(yaw) 각속도, 횡 가속도(lateral acceleration)를 통하여 검증하고자 한다.

J-turn 시험은 급격한 조향시 차량의 상태를 알아보기 위한 방법으로 기존 시험 방법은 ISO 규격에 명시되어 있다. 본 연구에서는 차량이 2초간 80km/h의 속도로 정속 주행 후 0.2초 안에 45도의 조향각 입력을 가하도록 한다.

다음 Fig. 4에서는 차량의 대표적인 상태 변수들을 나타내었으며, 차량의 요 각속도나, 횡 가속도의 값들을 실차 데이터와 비교하였을 때 타당한 결과를 보여준다. 이 결과로 조향 장치 및 차량 모델이 타당함을 알 수 있으며, 이 모델을 이용하여 제어 알고리즘이 유도될 수 있다.

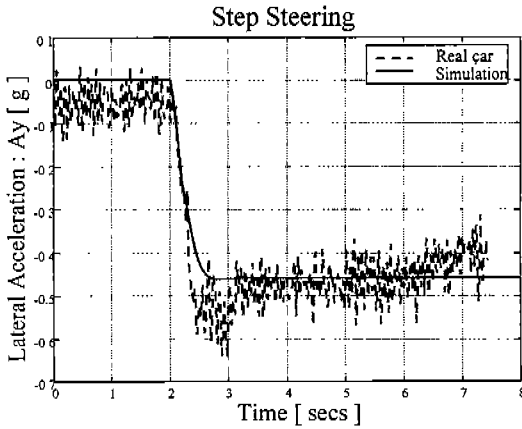
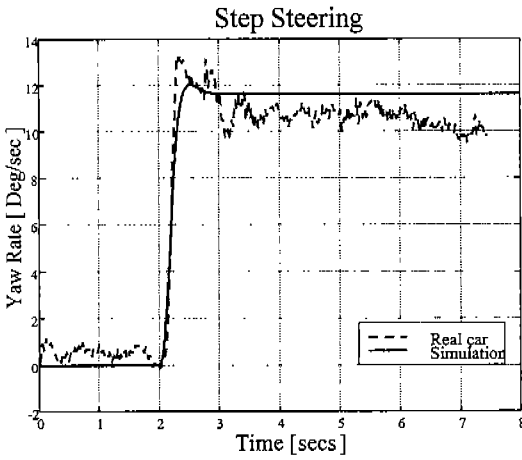


Fig. 4 J-turn test results

3. 구동 및 시뮬레이션

3.1 구동 알고리즘

기본적인 구동 알고리즘은 차량의 속도와 조향 토크에 따른 속도 감응형 제어이며 이는 조향 토크에 비례하는 제어 계인을 다음 Fig. 5와 같이 설정함으로써 가능하다¹¹⁾. 이 값을 구하기 위해서는 먼저 차량에서 속도 및 조향각에 따른 조향력을 계산한 다음 이 값에서 운전자가 부담하여야 할 조향토크를 빼서 보조 조향력을 산출해 낸다. 다음은 모터상수와 기어비등을 고려하여 속도 및 조향 토크에 따른 전류 입력값을

구하면 된다.

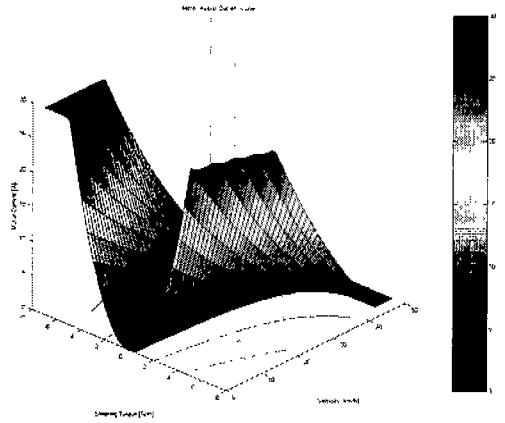


Fig. 5 Basic speed-sensitive gain curve

위와 같은 계인을 사용하여 조향력 경감은 가능하나 조향감을 보다 좋게 하기 위해서는 새로운 제어 항목이 필요하다. 본 논문에서는 기본적인 속도 감응형 제어기 외에, 운전자 반력 토크를 개선시키고 모터 관성의 영향을 개선시키기 위한 조향 토크의 변화율에 비례하는 계인 (K_{d1})과, 감쇠효과와 복원속도를 제어하기 위한 조향각속도에 비례하는 제어 계인(K_{d2})을 추가하였다. 이를 나타내면 다음 식(7)과 같다.

$$I_{in} = K_p G(\theta_{sw} - \frac{r_2}{r_1} \theta_{fw}) + K_{d1} G(\dot{\theta}_{sw} - \frac{r_2}{r_1} \dot{\theta}_{fw}) + K_{d2} \dot{\theta}_{sw} \quad (7)$$

위의 구동 알고리즘을 이용하여 실제 모터를 구동시키기 위한 알고리즘은 다음 Fig. 6과 같다. 여기서는 조향토크대 속도의 관계 그래프와 조향토크대 모터 전류관계 그래프를 보간 하여 보조 동력을 결정하며, 각각의 미분 보상 계인은 차속에 의한 함수로 표시된다.

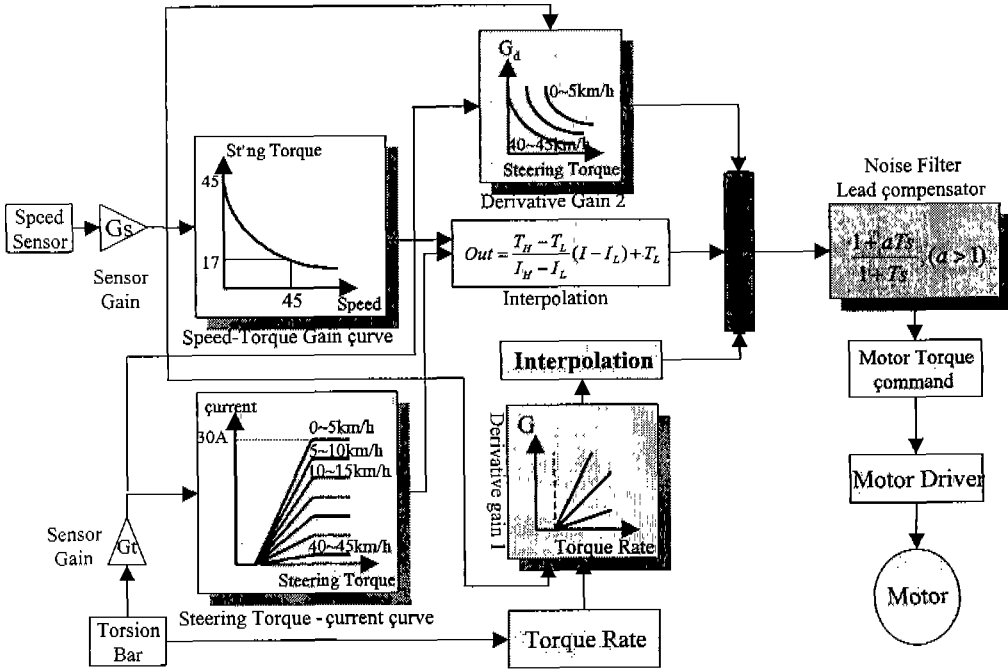


Fig. 6 Control block diagram

3.2 조향각 게인(Steering angle gain)

전동식 동력 조향장치는 여러 특징과 장점을 가지고 있지만 설계시 한가지 취약점은 조향감 (steering feel)이 유압식에 비해서 좋지 못하다는 점이다. 조향감은 운전자의 반력 토크 (driver's feedback torque)와 관계가 있고, 조향감을 수학적으로 나타내기 위해서는 조향 조작과 조향 반력 토크가 연관된 식이 필요하다. 본 논문에서는 다음과 같이 조향각과 반력 토크가 전달함수의 형식으로 표시된 조향각 게인 (steering angle gain)을 사용하여 조향감을 나타내는 지표로 삼고자 한다.

본 논문에서 지표로 삼은 조향각 게인은 다음과 같이 표현되며 자세한 식의 유도는 부록에 나타내었다.

$$G_h = \frac{T_{sw}}{\theta_{sw}} \quad (8)$$

3.3 주파수 응답

본 논문에서 제안한 제어 알고리즘과 일반적인 동력보조 제어의 성능 비교를 위하여 조향 특성을 나타내는 (4)식의 주파수 응답을 살펴보기로 한다.

3.3.1 모터 관성의 영향

일반적으로 조향감에 크게 영향을 주는 요소 중의 하나는 모터 회전자 관성이다. 다음 Fig. 7에 관성의 영향에 의한 조향각 게인을 나타내었다. 그림에서 볼 수 있듯이 본 논문의 대상인 볼스크류형태는 적은 기어비와 낮은 회전 속도로 인하여 모터 관성의 영향이 아주 작게 나타남을 알 수 있다.

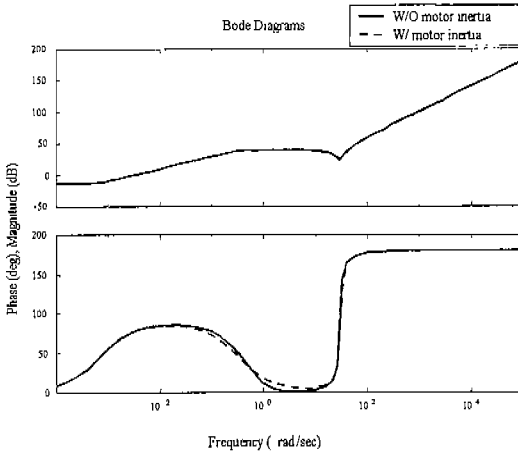


Fig. 7 Motor armature inertia effect

3.3.2 동력 보조 특성(Power boosting characteristics)

동력의 보조에 의한 주파수 응답을 다음 Fig. 8에 나타내었다. 여기에서 조향각 게인의 크기는 동일한 조향각을 입력하였을 때 조향을 하기 위한 조향토크의 크기를 말한다⁶⁾. 따라서 그래프상의 크기를 비교함으로써 동력 보조 특성을 파악할 수 있다. 다음 그림에서 볼 수 있듯이 조향각 게인의 크기를 비교하였을 때 P제어를 한 부분이 제어 가 없는 부분보다 크기가 작으므로 동력 보조가 되고 있음을 확실히 알 수 있으나 고주파수 영역의 응답이 나빠짐을 알 수 있다.

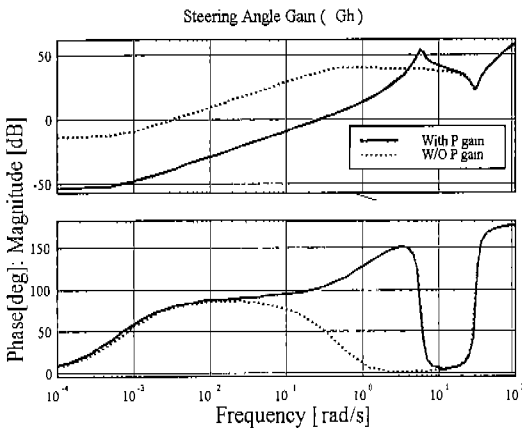


Fig. 8 Power boosting characteristics

3.3.3 Derivative gain 1의 영향

다음 Fig. 9는 위의 제어 알고리즘에서 미분 게인 1의 영향을 나타내고 있다. 그림에서 볼 수 있듯이 이 게인은 위에서 설정한 동력 보조 게인에 의해 나빠진 고주파수 영역에서의 응답을 개선시킴을 알 수 있다.

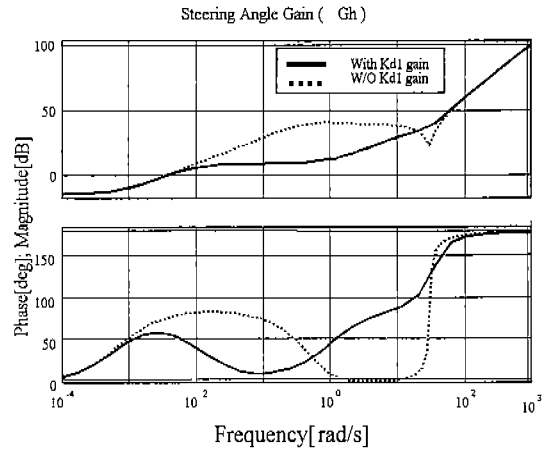


Fig. 9 Effect of Kd1 gain

3.3.4 Derivative gain 2의 영향

다음 Fig. 10은 미분 게인 2의 영향을 나타내고 있다.

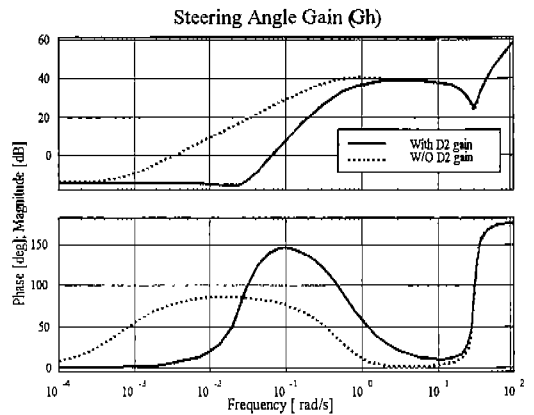


Fig. 10 Effect of Kd2 gain

그림에서 볼 수 있듯이 이 계인은 저주파수 영역에서 조향각 계인의 크기를 일정하게 유지시키는 역할을 할 수 있다. 이는 저주파수 대역에서 일정한 조향각 응답을 연속적으로 얻을 수 있음을 말한다.

3.3.5 전체 제어기의 영향

다음 Fig. 11에 모든 제어 입력을 주었을 때의 결과와 제어하지 않았을 때의 결과를 나타내었다. 그래프를 비교하여 보았을 때, 조향각 계인의 크기로부터 동력 보조가 설정한 대로되고, 저주파수 영역의 응답이나 고주파수 영역의 응답이 평활해 졌다고 말할 수 있다. 따라서 위의 결과로부터 제안된 제어 알고리즘이 효과적으로 작동하고 있음을 알 수 있다.

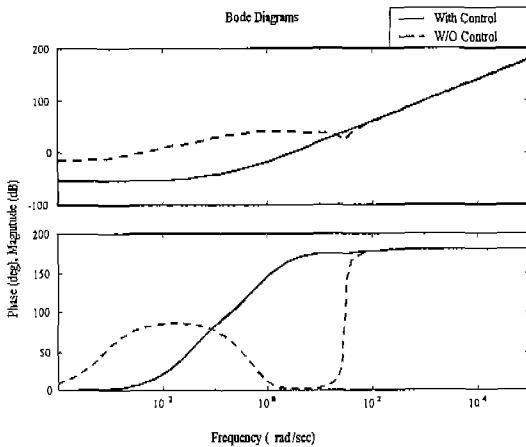


Fig. 11 Control effect of MDPS controller

3.4 시간영역 응답

조향각 입력에 대한 차량 응답 외의 조향력, 복원성, 시간지연 등의 조향 특성 응답을 살펴보기 위해서는 실제 차량의 조향장치와 거의 유사한 모델이 필요하다. 그러나 실제 차량의 조향계는 부싱(bushing)이나, 비선형 마찰, 현가 장치의 조향 효과 등 정확하게 모델링 하기에 난해한

요소들이 많다. 본 연구에서는 실제 차량에 가까운 응답을 얻어내기 위하여 실제 차량의 속도 및 조향각에 따라 랙바에 걸리는 힘을 측정하고, 이 값을 이용하여 시뮬레이션상의 조향력을 보정하였다.

이렇게 보정된 차량 모델에 시속 40km/h로 주행 중 정현파의 조향 입력을 가하여 최대 횡 가속도가 약 0.2g가 되도록 정현 입력을 가한 후의 응답을 실시하였다. Fig. 12에는 제어를 하지 않아서 동력 보조가 없는 때와 동력보조 제어를 하였을 때의 조향각대 조향 토크 그래프의 예를 나타내었다. 그래프에서 조향각이 0일 때의 조향 토크값(A 부분)은 운전자의 조향 조작시 조향휠(steering wheel)에서의 조향력(steering effort)을 나타낸다. 횡 가속도가 약 0.2g가 되도록 조향입력에 대한 차속별 조향 토크의 그래프를 다음 Fig. 13에 나타내었다. 그래프에서 볼 수 있듯이 수동조향(manual steering)은 저속에서는 조향력이 매우 크고 고속에서는 조향력이 너무 작아지나, 제어기를 작동시켰을 때는 전속도 영역에서 비교적 일정한 조향력을 얻을 수 있음을 알 수 있다. 그러나 일반 P제어기에 비해 본 연구에서 제안한 제어기는 조향각속도 및 조향 토크에 곱하여 지는 미분항의 제어 계인이 추가되기 때문에 조향력이 조금 더 감소된다.

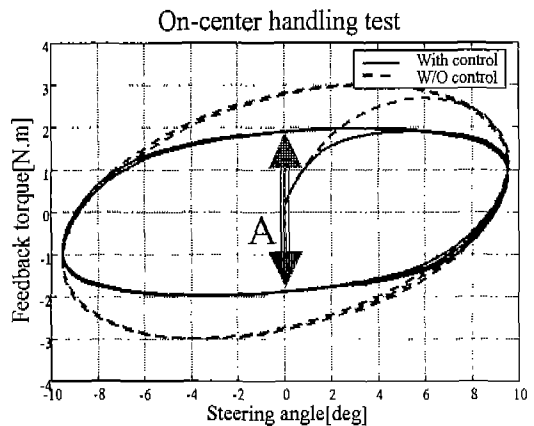


Fig. 12 On-center handling test

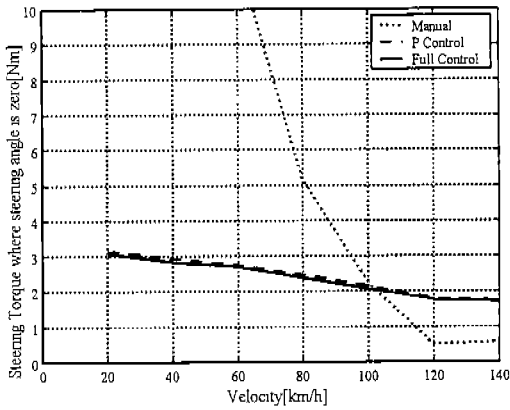


Fig. 13 Quantitative evaluation of steering torque

다음 Fig. 14는 정현파의 조향 입력을 가할 경우의 조향 토크 대 횡가속도의 그래프를 나타낸다. 점선은 보조 조향력을 가하기 위한 제어롤 나타내며, 실선은 본 연구에서 제안한 제어 입력의 예를 나타낸다. 그림에서 조향 토크가 0일 때의 횡가속도(B부분)는 조향 시스템의 복원성(returnability)을 나타내는 척도⁵⁾이다.

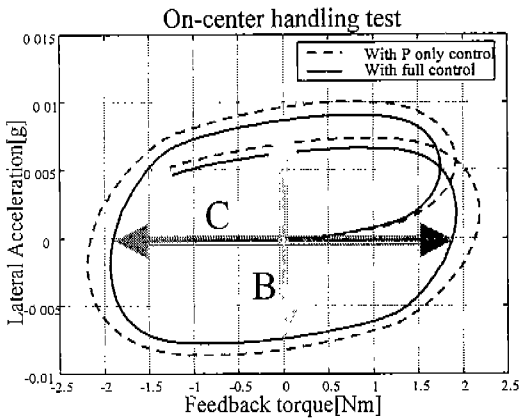


Fig. 14 Steering torque Vs. Lateral acceleration plot

Fig. 15에 횡가속도가 0.2g가 되도록 조향 입력을 가했을 때 차속별 복원력을 나타내었다. 수동 조향일 경우는 저속에서 복원성이 나빠지고 고속에서는 복원이 과도해지며, 단순 동력 보조

의 경우 수동 조향보다 향상되기는 하지만 여전히 고속에서 복원성이 과도한 상태임을 알 수 있다. 그러나 본 연구의 제어기는 저속의 복원성을 향상시키며 고속에서도 과도한 복원성을 억제하여 속도에 관계없이 거의 일정한 복원성을 유지시킬 수 있다.

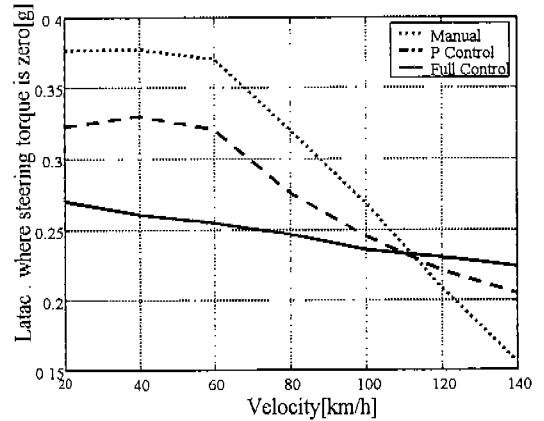


Fig. 15 Quantitative evaluation of steering returnability

운전자의 조향력에서 횡가속도가 0일 때의 조향력을 뺀 값(A-C)은 운전자 토크의 위상 지연을 나타내는 척도이다[5]. 다음 Fig. 16에 각 차속별 계산값을 나타내었다. 시험결과 본 논문에서 제안한 제어기가 더욱 향상된 위상 지연 성능을 보임을 알 수 있다.

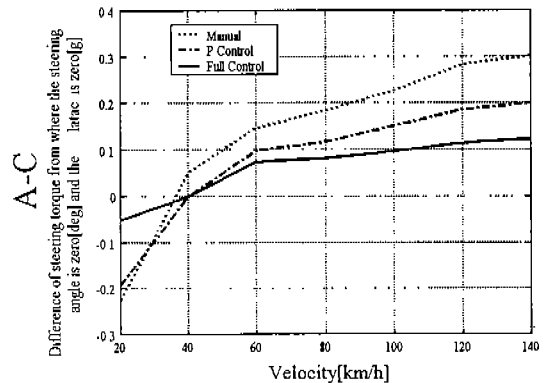


Fig. 16 Quantitative evaluation of steering torque phase lag

4. 결 론

본 논문에서는 볼 스크류형의 MDPS 시스템에 대한 모델링을 수행하였으며, 이를 위한 제어기를 설계하였다. 제어기는 조향 토크 외에 토오크의 변화율, 그리고 조향 각속도에 비례하는 제어기를 사용하였다. 조향 응답 특성으로써 조향각 계인을 정의하였으며, 시뮬레이션을 통하여 제안된 제어기에 대한 조향각 계인의 성분별 주파수 응답 특성을 분석하였으며, 시간영역 응답으로부터 설계된 제어기가 복원성이나 위상 지연의 측면에서도 좋은 성능을 발휘함을 보였다.

참 고 문 헌

1. 大下 幸一郎ほか, '電動式パワーステアリングシステム', 自動車技術, Vol. 41, No. 10, pp. 1206 ~ 1212, 1987.
2. 清水 康夫ほか, '電動パワーステアリングについて', 自動車技術, Vol. 45, No. 10, 1991, pp. 53 ~ 60, 1991.
3. 嶋田 敏ほか, '電動パワーステアリング用パワーユニットの開発', 自動車技術, Vol. 46, No. 2, pp. 12 ~ 16, 1992.
4. Shin Takehara et. al. 'Improvement of motor inertia influence of electric power steering", JSAE, 1997.

5. Hirofumi Sato, et al. 'The Quantitative Analysis of Steering Feel', JSAE review Vol. 12 No.2, 1991.
6. I. Chikuma and S. Shimada, 'Electric Power Steering for Passenger Car', NSK Technical Journal No. 654, 1992.
7. John C. Dixon, Tires, Suspension and Handling, Cambridge University Press.
8. 박동진, 윤석찬, 한창수, 이상곤, 구상순, 우덕현, '고속 주행시 횡가속도 제어를 위한 MDPS 시스템 개발에 관한 연구', 한국자동차공학회 추계학술대회 논문집, 1998.
9. 윤석찬, 한창수, 'Ball screw형 전동식 동력 조향 장치의 제어에 관한 연구', 한국자동차공학회 춘계학술대회 논문집, 1999.
10. D. C. Karnopp, D. L. Margolis, R. C. Rosenberg, System Dynamics A unified Approach 2nd Ed. , John Wiley & Sons Inc..
11. 윤석찬, '전동식 동력 조향장치의 개발을 위한 연구', 한양대학교 석사 학위 논문, 1995.
12. 이상호, 황교성, 이연구, 한창수, "후륜의 능동적 독립 토우제어에 의한 차량 안정성 향상," 한국자동차공학회논문집 제7권 제2호, 한국자동차공학회, 1999.

부 록

Steering angle gain

$$G_k = \frac{A_1 S^6 + A_2 S^5 + A_3 S^4 + A_4 S^3 + A_5 S^2 + A_6 S + A_7}{B_1 S^4 + B_2 S^3 + B_3 S^2 + B_4 S + B_5}$$

$$A1 = -J_{fw} J_{sw} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4$$

$$A2 = -B_{SL} J_{fw} J_{sw} r_1^2 r_2^2 r_4 - B_{sw} J_{fw} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 - B_{fw} J_{sw} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4$$

$$A3 = -G J_{fw} J_{sw} K_m K_p r_1 r_2^2 - B_{SL} B_{sw} J_{fw} r_1^2 r_2^2 r_4 - B_{fw} B_{SL} J_{sw} r_1^2 r_2^2 r_4 - J_{fw} J_{sw} K_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 - B_{fw} B_{sw} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 + J_{sw} K_{at} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 - J_{sw} K_{sl} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 - J_{fw} K_{tb} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4$$

$$\begin{aligned}
A4 &= -B_{sw} G J_{fw} K_m K_p r_1 r_2^2 - B_{fw} G J_{sw} K_m K_p r_1 r_2^2 + J_{fw} K_{d2} K_{tb} r_1 r_2^2 r_4 - B_{fw} B_{SL} B_{sw} r_1^2 r_2^2 r_4 \\
&\quad + B_{SL} J_{sw} K_{at} r_1^2 r_2^2 r_4 - B_{SL} J_{sw} K_{sl} r_1^2 r_2^2 r_4 - B_{sw} J_{fw} K_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 - B_{fw} J_{sw} K_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 \\
&\quad - B_{SL} J_{fw} K_{tb} r_1^2 r_2^2 r_4 + B_{sw} K_{at} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 - B_{sw} K_{sl} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 - B_{fw} K_{tb} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 \\
A5 &= -B_{fw} B_{sw} G K_m K_p r_1 r_2^2 + G J_{sw} K_{at} K_m K_p r_1 r_2^2 - G J_{sw} K_m K_p K_{sl} r_1 r_2^2 + 2 J_{sw} K_{sl} K_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 \\
&\quad + \eta J_{fw} K_{tb}^2 r_2^2 r_4 + B_{fw} K_{d2} K_{tb} r_1 r_2^2 r_4 + B_{SL} B_{sw} K_{at} r_1^2 r_2^2 r_4 - B_{SL} B_{sw} K_{sl} r_1^2 r_2^2 r_4 \\
&\quad - B_{fw} B_{sw} K_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 + J_{sw} K_{at} K_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 - J_{sw} K_{sl} K_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 - B_{fw} B_{SL} K_{tb} r_1^2 r_2^2 r_4 \\
&\quad - J_{fw} K_{SL} K_{tb} r_1^2 r_2^2 r_4 + K_{at} K_{tb} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 - K_{sl} K_{tb} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 \\
A6 &= B_{sw} G K_{at} K_m K_p r_1 r_2^2 - B_{sw} G K_m K_p K_{sl} r_1 r_2^2 + 2 B_{sw} K_{sl} K_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 \\
&\quad + B_{fw} e_{ta} K_{tb}^2 r_2^2 r_4 - K_{at} K_{d2} K_{tb} r_1 r_2^2 r_4 + K_{d2} K_{sl} K_{tb} r_1 r_2^2 r_4 + B_{sw} K_{at} K_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 \\
&\quad - B_{sw} K_{sl} K_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 + B_{SL} K_{at} K_{tb} r_1^2 r_2^2 r_4 - B_{SL} K_{sl} K_{tb} r_1^2 r_2^2 r_4 - B_{fw} K_{SL} K_{tb} r_1^2 r_2^2 r_4 \\
A7 &= 2 K_{sl} K_{SL} K_{tb} r_1^2 r_2^2 r_4 - \eta K_{at} K_{tb}^2 r_2^2 r_4 + \eta K_{sl} K_{tb}^2 r_2^2 r_4 + K_{at} K_{SL} K_{tb} r_1^2 r_2^2 r_4 - K_{sl} K_{SL} K_{tb} r_1^2 r_2^2 r_4 \\
B1 &= J_{fw} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 \\
B2 &= B_{SL} J_{fw} r_1^2 r_2^2 r_4 + B_{fw} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 \\
B3 &= G J_{fw} K_m K_p r_1 r_2^2 + B_{fw} B_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 + J_{fw} K_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 - K_{at} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 + K_{sl} M_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 \\
B4 &= B_{fw} G K_m K_p r_1 r_2^2 - B_{SL} K_{at} r_1^2 r_2^2 r_4 + B_{SL} K_{sl} r_1^2 r_2^2 r_4 + B_{fw} K_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 \\
B5 &= -G K_{at} K_m K_p r_1 r_2^2 + G K_m K_p K_{sl} r_1 r_2^2 - 2 K_{sl} K_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 - K_{at} K_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4 + K_{sl} K_{SL} r_1^2 r_2^2 r_4
\end{aligned}$$