

<논 문>

## 조화진동유동을 포함한 곡선파이프계의 외평면 혼돈운동 연구

Chaotic Out-of-Plane Vibrations of Curved Pipe Conveying Oscillatory Flow

홍 성 철\*

Hong. Sung Chul

(2000년 5월 30일 접수 : 2000년 7월 27일 심사완료)

**Key Words** : Oscillatory Flow(조화진동유동), Curved Pipe(곡선파이프), Out-of-plane Vibration(외평면 진동), Melnikov Function(Melnikov 함수), Bifurcation(분기)

### ABSTRACT

In this paper the chaotic out-of-plane vibrations of the uniformly curved pipe with pulsating flow are theoretically investigated. The derived equations of motion contain the effects of nonlinear curvature and torsional coupling. The corresponding nonlinear ordinary differential equation is a type of nonhomogenous Hill's equation. This is transformed into the averaged equation by averaging theorem. Bifurcation curves of chaotic motion are obtained by Melnikov's method and plotted in several cases of frequency ratios. The theoretically obtained results are demonstrated by numerical simulation. And strange attractors are shown.

### 1. 서 론

플랜트 등에 설치된 파이프 계에서는 내부유체가 조화진동을 하며 흐르는 경우가 많다. 이러한 경우는 매개변수 공진(parametric resonance)이 문제가 되며, 더욱이 파이프의 지지부가 지진이나 외부가진을 받는 경우에는 공진이 문제가 된다. 이때 두개의 공진이 혼합된 조합공진(combined resonance)이 되기 때문에 그 운동 양상은 더욱 복잡하여지고 운동의 진폭은 커지게 되어 플랜트 계에 설치된 파이프 계에 심각한 문제가 발생할 수 있다. 진폭이 클 때 파이프의 비선형성을 고려해야하기 때문에 파이프 계에서 일어나는 제한된 범위의 주기운동과 이들의 운동 안정성에 따른 분기양상, 더 나아가서는 혼돈운동을 이론적으로 규명하는 연구가 필요하게 된다.

파이프의 비선형성을 고려한 연구는 Paidoussis와

Moon<sup>(1)</sup> 그리고 Paidoussis, Li, Rand<sup>(2,3)</sup>에 의하여 수행되었다. 그들은 외팔보 형태의 파이프에서 호프(Hopf) 또는 주기배중(periodic doubling)등의 분기현상을 거쳐서 혼돈이 일어남을 보이고 실험을 통하여 입증하였다. Melnikov<sup>(5)</sup>는 혼돈현상을 나타낼 수 있는 호모클리닉 궤도교차(transverse homoclinic orbit)가 존재함을 섭동법에 의해 처음으로 제안하였는데 이는 혼돈운동의 존재를 이론적으로 접근할 수 있는 방법으로 알려져 있다. 이를 바탕으로 Yagasaki<sup>(7,8)</sup>는 매개변수 가진(parametric excitation)과 외부가진을 받는 1자유도 약비선형계를 모델로 두 가진 주파수가 고유진동수의 특정비인 경우에 대하여 Melnikov방법을 사용함으로써 혼돈운동의 발생을 이론적으로 규명하고 있다. 박철휘 등<sup>(9)</sup>은 조화진동유체가 흐르는 직선파이프 계를 모델로 고유진동수와 가진 주파수 비가 일반적인 경우에도 혼돈운동이 존재함을 증명하여 혼돈운동의 존재 영역을 밝혔고, 곡선파이프에 대한 연구<sup>(10)</sup>에서는 내평면진동(in-plane vibration)만을 다루고 있다. 그러나 곡선 파이프에서는 내평면진동의 고유진동수가 외

\* 정회원, 한라대학교 기계공학부

평면진동의 고유진동수보다 크므로 외평면진동이 더 문제가 된다.

따라서 본 연구에서는 일정한 곡률을 갖는 곡선 파이프에 평균유량을 유지하면서 맥동하는 유체가 흐르고 있고 또한 파이프의 지지부는 지진이나 외부가진을 받는 곡선 파이프 계를 대상모델로 내평면운동과 외평면운동의 연성이 존재하지만 연성효과는 고려하지 않고 외평면진동만의 비선형 거동을 고찰하기로 한다.

### 2. 운동방정식

조화진동유동을 포함한 곡선파이프계의 외평면 운동방정식을 유도하기 위하여 Fig. 1과 같이 반경이  $R$ , 주어진 각이  $\theta$ 인 파이프 계를 생각하였다.

이 파이프 계는 Fig. 2와 같이 외평면 운동으로 인하여 파이프는  $Z$ 방향으로 변위  $w$ 로 처짐이 발생하고 이로 인하여  $\phi$ 만큼의 비틀림이 동시에 발생하게 된다. 이 때 지지부의 변위는  $v_g$  이고, 지지부에 상대적인 파이프의 변위는  $v$ 이다. 따라서, 파이프의 총 변위는  $w = v(\theta, t) + v_g(t)$ 가 된다. 한편, 내부 유체는 비압축성이고 유체의 속도 분포는 일정하며 유속은  $c$ 이다 파이프는 수직 방향의 변위와 이에 의한 비틀림 변위만 갖는다. 또한 비틀림의 관성은 무시하였다. Fig. 2는 변형된 파이프의 형상을

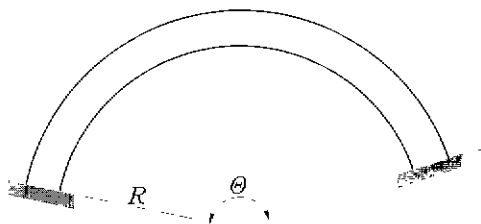


Fig. 1 Uniformly curved pipe.

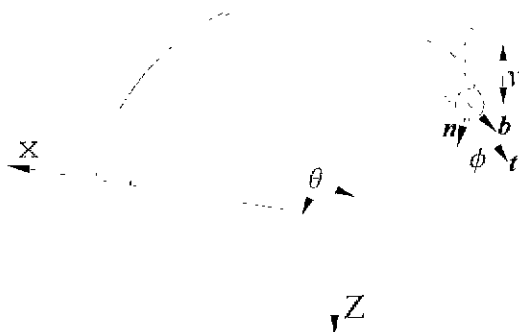


Fig. 2 Definition of coordinates displacements of a uniformly curved pipe.

나타낸다. 여기서  $\{i, j, k\}$ 는 고정좌표계(X, Y, Z)의 단위벡터이고  $\{n, t, b\}$ 는 파이프에 고정된 좌표계의 단위벡터이다.  $\{n, t, b\}$ 는 파이프의 변형에 따라 그 방향이 바뀌게 되며, 단위벡터  $\{i, j, k\}$ 와  $\{n, t, b\}$  좌표계 사이의 관계는 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\phi \cos\theta + \sin\alpha \sin\phi \sin\theta & -\cos\alpha \sin\theta \\ -\cos\phi \sin\theta - \sin\alpha \sin\phi \cos\theta & \cos\alpha \cos\theta \\ \cos\alpha \sin\phi & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n \\ t \\ b \end{pmatrix} \quad (1)$$

여기서  $\alpha$ 는 XY평면에 대한 Z방향 처짐각이다. 식 (1)을  $s$ 에 대하여 미분하고 미소길이  $ds = R d\theta$ 이고  $\alpha = \frac{dw}{ds}$ 를 대입하면, 곡률  $K_t, K_n$ 는 다음과 같이 근사식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} K_t &\approx \frac{1}{R^2} \left( R \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{\partial w}{\partial\theta} - \frac{1}{6R^2} \left( \frac{\partial w}{\partial\theta} \right)^3 \right) \\ K_n &\approx \frac{1}{R^2} \left( R\phi - \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

따라서 strain energy는 아래와 같이 된다.

$$V = \int_0^\theta \left( \frac{M_t^2}{2GJ} + \frac{M_n^2}{2EI} \right) R d\theta \quad (3)$$

여기서  $M_t = GJK_t, M_n = EIK_n$  이고  $GJ$ 와  $EI$ 는 비틀림 및 굽힘강성이다. 또한 미소요소의 위치벡터를  $r$ 이라고 하면 위치벡터  $r$ 은 아래와 같다.

$$r = R\cos\theta i + R\sin\theta j + w k \quad (4)$$

식 (4)를 이용하여 파이프 내부에 흐르는 유체의 속도  $V_f$ 는

$$\begin{aligned} V_f &= \frac{\partial r}{\partial t} + ct \\ &= -c \left[ 1 - \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial w}{\partial\theta} \right)^2 \right] \sin\theta i \\ &\quad + c \left[ 1 - \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial w}{\partial\theta} \right)^2 \right] \cos\theta j \\ &\quad + \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{c}{R} \frac{\partial w}{\partial\theta} - \frac{c}{6R^3} \left( \frac{\partial w}{\partial\theta} \right)^3 \right] k \end{aligned} \quad (5)$$

이 되며 파이프 미소요소의 속도는 식 (4)를 미분하므로써 다음과 같이 된다.

$$V_p = \frac{\partial w}{\partial t} k \quad (6)$$

그러므로 파이프의 운동에너지는

$$T = \frac{m_f}{2} \int_0^{\theta_0} \left\{ c^2 \left[ 1 - \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right]^2 + \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{c}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{c}{6R^3} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^3 \right]^2 \right\} R d\theta \quad (7)$$

$$+ \frac{m_p}{2} \int_0^{\theta_0} \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} \right\}^2 R d\theta$$

여기서  $m_f$ ,  $m_p$  는 각각 단위길이당 유체와 파이프의 질량이다.

식 (3)과 식 (7)에 Hamilton principle을 이용하여 얻어진 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{EI}{R^2} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - R\phi \right\} + \frac{GI}{R^2} \left\{ R \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right\} = 0$$

$$\frac{EI}{R^4} \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - R \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right\} - \frac{GI}{R^3} \left\{ R \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right\}$$

$$+ m_f \frac{c^2}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + 2m_f c \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \theta} + m_f \frac{\partial c}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial \theta} + (m_f + m_p) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

식 (8)에  $w(\theta, t) = v(\theta, t) + v_g(t)$  을 대입하고 아래의 무차원항 :

$$\bar{v} = \frac{v}{R}, \quad \bar{v}_g = \frac{v_g}{R}, \quad \xi = \frac{m_f}{m_f + m_p}, \quad \bar{c} = \left( \frac{m_f}{EI} \right)^{1/2} R c,$$

$$\tau = \left( \frac{EI}{m_p + m_f} \right)^{1/2} \frac{t}{R^2}, \quad k = \frac{GI}{EI}$$

들을 이용하여 무차원화 한후 감쇠 효과를 추가하면 무차원화된 운동방정식을 아래와 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} - \phi + k \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \theta^4} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - k \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} \right\}$$

$$+ \bar{c}^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} + 2\xi^{1/2} \bar{c} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \tau \partial \theta} + \xi^{1/2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \xi \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau}$$

$$+ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \tau^2} = - \frac{\partial^2 \bar{v}_g}{\partial \tau^2} \quad (9)$$

Galerkin 방법은 편미분방정식을 상미분방정식으로 전환하는데 사용할 수 있다. 식 (9)의 근사해는 유체가 흐르지 않는 양단고정 곡선보의 선형정규모드(normal mode)를 이용하여 근사적으로 구할 수 있다. 따라서, 주어진 식 (9)로부터 양단고정 곡선보의 선형정규모드와 고유진동수를 구해보도록 한다. 식 (9)에서  $\bar{c} = \bar{v}_g = \xi = 0$  으로 놓

고 비선형항을 무시하면, 해를 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\bar{v}(\theta, \tau) = \eta(\theta) e^{i\bar{\Omega}\tau} \quad \text{and} \quad \bar{\phi}(\theta, \tau) = \phi(\theta) e^{i\bar{\Omega}\tau} \quad (10)$$

여기서  $i = \sqrt{-1}$  이고  $\bar{\Omega} = \left( \frac{m_p + m_f}{EI} \right)^{1/2} R^2 \Omega$  인 무차원 고유진동수 이다. 가정된 해를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{d^2 \eta}{d\theta^2} - \phi + k \left\{ \frac{d^2 \phi}{d\theta^2} + \frac{d^2 \eta}{d\theta^2} \right\} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d^4 \eta}{d\theta^4} - \frac{d^2 \phi}{d\theta^2} - k \left\{ \frac{d^2 \phi}{d\theta^2} + \frac{d^2 \eta}{d\theta^2} \right\} - \bar{\Omega}^2 \eta = 0 \quad (12)$$

식 (11)과 식 (12)에서  $\eta$  를 소거하면,

$$\frac{d^6 \phi}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 \phi}{d\theta^4} + (1 - \bar{\Omega}^2) \frac{d^2 \phi}{d\theta^2} + \frac{\bar{\Omega}^2}{k} \phi = 0 \quad (13)$$

이 된다. 식 (13)의 해는

$$\phi = \sum_{n=1}^6 C_n e^{\lambda_n \theta} \quad (14)$$

와 같은 형태가 되며, 여기서  $C_n$  들은 경계조건에 의해서 결정되는 상수들이고,  $\lambda_n$  들은 식(13)의 특성방정식의 근이다. 이때 특성방정식은 아래와 같다.

$$\lambda^6 - 2\lambda^4 + (1 - \bar{\Omega}^2)\lambda^2 - \frac{\bar{\Omega}^2}{k} = 0 \quad (15)$$

한편,  $\eta$  는 식 (14)를 식 (11)에 대입하고 두 번 적분함으로써 아래와 같이 결정된다.

$$\eta = - \frac{1}{1+k} \sum_{n=1}^6 C_n \left( \frac{1}{\lambda_n^2} + k \right) e^{\lambda_n \theta} \quad (16)$$

그러므로 결정되어야할 계수  $C_n$  은 양단고정 경계조건에 대입하여 얻어진 아래의 대수방정식으로 부터 얻어진다.

$$[A_{jn}][C_n] = \{0\} \quad (17)$$

여기서  $[A_{jn}]$  의 각 요소는 아래와 같다.

$$A_{1n} = \frac{1}{\lambda_n^2} + k, \quad A_{2n} = \lambda_n \left( \frac{1}{\lambda_n^2} + k \right), \quad A_{3n} = 1,$$

$$A_{4n} = \left( \frac{1}{\lambda_n^2} + k \right) e^{i\lambda_n \theta_n}, \quad A_{5n} = \lambda_n \left( \frac{1}{\lambda_n^2} + k \right) e^{i\lambda_n \theta_n}, \quad A_{6n} = e^{i\lambda_n \theta_n}$$

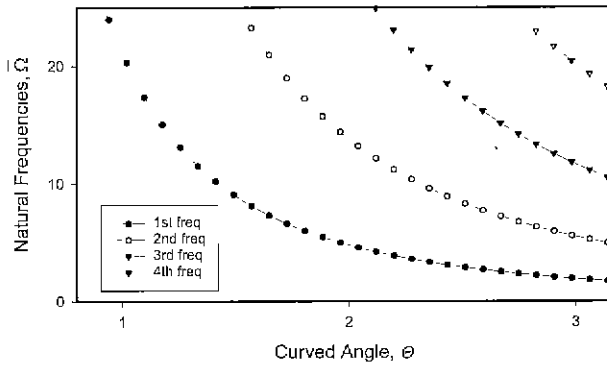


Fig. 3 Natural frequencies of a curved pipe when  $k = 0.3$

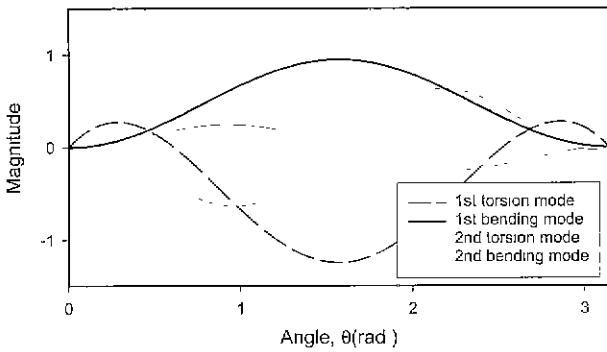


Fig. 4 Mode shapes of clamped-clamped curved pipe when  $\theta = \pi$ .

또한 식 (17)에서  $\det|A_m| = 0$  이어야 하므로

$$F(\bar{\Omega}, k, \theta) = 0 \quad (18)$$

인 고유진동수 방정식을 매개변수  $\bar{\Omega}, k, \theta$  에 대하여 얻게된다. Fig. 3은  $k = 0.3$  인 경우에  $\theta$ 의 변화에 대하여 식 (18)으로 부터 얻어진 고유진동수이다. 또한 Fig. 4는 식 (17)를 식 (14)와 식 (16)에 대입하여 얻어진 곡선 파이프의 정규모드를 나타낸다.

앞에서 얻어진 식 (14)와 식 (16)의 정규모드를 이용하여 식 (9)의 해를 다음과 같이 정의하였다.

$$\begin{aligned} \bar{v}(\theta, t) &= \sum \eta_i(\theta) q_i(t), \\ \phi(\theta, t) &= \sum \psi_i(\theta) b_i(t) \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)중 1차항만을 적용하여 Galerkin 방법으로 식 (9)의 편미분방정식을 상미분방정식으로 전환한 결과는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} a_1 q_1 - a_2 \dot{p}_1 - k(a_3 q_1 + a_2 b_1 + \frac{1}{2} a_4 q_1^3) \\ + \bar{c}^2 a_3 q_1 + a_5 \dot{\xi} \dot{q}_1 + a_5 \ddot{q}_1 = a_6 \bar{v}_g \end{aligned} \quad (20)$$

$$b_1 q_1 - b_2 \dot{p}_1 + k(b_3 p_1 + b_1 q_1 - \frac{1}{2} b_4 q_1^3) = 0 \quad (21)$$

여기서

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^\theta \frac{d^4 \eta_1}{d\theta^4} \cdot \eta_1 d\theta, \quad a_2 = \int_0^\theta \frac{d^2 \psi_1}{d\theta^2} \cdot \eta_1 d\theta, \\ a_3 &= \int_0^\theta \frac{d^2 \eta_1}{d\theta^2} \cdot \eta_1 d\theta, \quad a_4 = \int_0^\theta \left( \frac{d\eta_1}{d\theta} \right)^2 \frac{d^2 \eta_1}{d\theta^2} \cdot \eta_1 d\theta, \\ a_5 &= \int_0^\theta \eta_1 \cdot \eta_1 d\theta, \quad a_6 = \int_0^\theta \eta_1 d\theta \\ b_1 &= \int_0^\theta \frac{d^2 \eta_1}{d\theta^2} \cdot \psi_1 d\theta, \quad b_2 = \int_0^\theta \psi_1 \cdot \psi_1 d\theta, \\ b_3 &= \int_0^\theta \frac{d^2 \psi_1}{d\theta^2} \cdot \psi_1 d\theta, \quad b_4 = \int_0^\theta \left( \frac{d\eta_1}{d\theta} \right)^2 \frac{d^2 \eta_1}{d\theta^2} \cdot \psi_1 d\theta \end{aligned}$$

파이프 계를 흐르는 유체가 조화진동 유동인 경우이므로, 유체의 속도  $\bar{c}$ 는 다음과 같이 표현된다

$$\bar{c} = c_o (1 + K) \cos \omega_c \tau \quad (22)$$

여기서,  $c_o$ 는 평균유속,  $K$ 는 유속의 변동량을,  $\omega_c$ 는 유동의 변동 주파수를 의미하는 한다. 또한 지지부의 변위는 진폭  $G$ 이고 진동수가  $\omega$ 인 다음 식으로 가정한다.

$$\bar{v}_g = G \cos \omega \tau \quad (23)$$

식 (22), (23)을 식 (20)에 대입하고 식 (20)과 식 (21)에서  $p_1$ 을 소거하면 아래와 같은 곱셈에 대한 상미분 방정식을 얻게된다.

$$q + \bar{\delta} q + (\omega_1^2 - \bar{\beta} \cos(\omega_c \tau)) q + \bar{a} q^3 = \bar{\gamma} \cos(\omega \tau) \quad (24)$$

여기서,

$$\begin{aligned} q &= q_1 \\ \omega_1^2 &= \frac{1}{a_5} \left\{ a_1 - k a_3 - \frac{a_2 + k a_2}{b_2 - k b_3} (b_1 + k b_1) + a_3 c_o^2 \right\} \\ \bar{\beta} &= -2 c_o^2 K \frac{a_3}{a_5} \\ \bar{a} &= \frac{1}{2 a_5} \left\{ -k a_4 + \frac{a_2 + k a_2}{b_2 - k b_3} k b_4 \right\} \\ \bar{\gamma} &= \frac{a_6}{a_5} G \omega^2 \end{aligned}$$

유도된 비선형방정식 (24)는 기존의 연구결과<sup>(9)</sup>와 같은 형태의 방정식으로 비선형 비제차 Hill의 방정식이다. 선형 제차 Hill의 방정식의 경우<sup>(11)</sup>는 매개변수 가진주파수  $\omega_c$ 와 고유진동수  $\omega_1$ 의 비가 1 또는 2 근방에서 매개변수

공진(parametric resonance)이 존재한다. 서론에서도 언급한 바와 같이 매개변수 가진주파수  $\omega_c$ 와 고유진동수  $\omega_1$ 의 비가 특정값이 아닌 일반적인 경우를 고찰하기 위해  $\omega_c \approx n\omega_1$  그리고  $\omega \approx \omega_1$ 인 경우의 비선형거동을 다루고자 한다.

### 3. 평균시스템

평균법을 적용하기 위해 두개의 작은 값의 매개변수를 사용하기로 하고, 두 매개변수  $\epsilon, \mu$ 는  $0 < \epsilon \ll \mu \ll 1$ 인 관계를 만족한다고 가정한다. 그리고 식 (24)에서 계수들을  $\bar{\alpha} = \epsilon\alpha, \bar{\delta} = \epsilon\mu\delta, \bar{\gamma} = \epsilon\gamma$ 라고 하자. 또한,  $\omega_c$ 와  $\omega$ 는 조절매개변수(detuning parameter)  $\Omega$ 와  $\nu$ 를 도입하므로써 다음의 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \omega^2 - \omega_1^2 &= \epsilon\Omega \\ \omega_c &= n\omega + \epsilon\nu \end{aligned} \quad (25)$$

식 (24)에 식 (25)를 대입하여 상태방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\bar{q}} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 + \epsilon\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \bar{q} \end{pmatrix} \\ &+ \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu\delta\dot{q} + \mu\beta\cos(n\omega\tau + \epsilon\nu\tau)q - \alpha q^3 + \gamma\cos(\omega\tau) \end{pmatrix} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (26)$$

식 (26)은 fast time  $\tau$ 와 slow time  $\epsilon\tau$ 를 포함하고 있다. Van der Pol 좌표변환을 이용하여 식 (26)을 좌표변환하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r &= -\frac{\epsilon}{\omega} Q(r, s, \tau) \sin \omega\tau \\ s &= -\frac{\epsilon}{\omega} Q(r, s, \tau) \cos \omega\tau \end{aligned} \quad (27)$$

여기서

$$\begin{aligned} Q(r, s, \tau) &= \Omega(r \cos \omega\tau - s \sin \omega\tau) \\ &- \alpha(r \cos \omega\tau - s \sin \omega\tau)^3 + \gamma \cos \omega\tau \\ &+ \mu(\delta\omega(r \sin \omega\tau + s \cos \omega\tau) \\ &+ \beta \cos(n\omega\tau + \epsilon\nu\tau)(r \cos \omega\tau - s \sin \omega\tau)) \end{aligned}$$

식 (27)에는 느리게 변화하는 항  $\epsilon\nu\tau$ 가 포함되어 있기 때문에 약비선형계의 해석에 유용하게 사용되는 평균이론<sup>(6)</sup>

을 적용할 수 있으므로 평균이론에 대하여 살펴보기로 하자. 식 (27)은 아래와 같은 형태의 방정식이다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \epsilon \{ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega\tau) + \mu \mathbf{g}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \omega\tau) \}, \quad \dot{\tilde{\tau}} = \epsilon\nu \quad (28)$$

식 (28)에서 오른쪽 항은  $\tau$ 에 대해  $T=2\pi/\omega$ 의 주기를 갖는다. 그러므로 식 (28)을 주기  $T$ 에 대해 평균하면 식 (28)의 평균시스템(averaged system)은 아래의 형태로 정리된다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \epsilon \{ \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) + \mu \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{y}, \tilde{\tau}) \}, \\ \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega\tau) d\tau, \\ \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{y}, \tilde{\tau}) &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{y}, \tilde{\tau}, \omega\tau) d\tau \end{aligned} \quad (29)$$

이때 식 (29)를 식 (28)에 대한 평균시스템(averaged system)이라 부른다. 평균이론<sup>(6)</sup>이란  $\mathbf{x}(\tau)$ 와  $\mathbf{y}(\tau)$ 가  $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$ 와  $\mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0$ 를 각각 초기치로 하는 식 (28)과 식 (29)의 해라고 할 때,  $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0| = O(\epsilon)$ 이면  $\tau \sim 1/\epsilon$ 에서 도  $|\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{y}(\tau)| = O(\epsilon)$ 를 만족한다는 정리이다. 즉, 평균이론은 평균시스템과 고유시스템의 해가 시간이 충분히 흐른 뒤에도  $O(\epsilon)$ 의 범위 내에서 두 계의 특성이 일치한다는 것이다.

따라서 우리가 해석하고자 하는 식 (27)에서  $\epsilon\nu\tau$ 를 새로운 상태변수로 간주하여 평균법을 적용하고  $\tau$ 를  $(2\omega/\epsilon)\bar{\tau}$ 로 치환하면 다음과 같은 평균시스템을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\left\{ -\Omega s + \frac{3}{4} \alpha(r^2 + s^2)s + \mu\delta\omega r \right. \\ &- 2\mu\beta \frac{\sin(n\pi)}{(n^2-4)n\pi} [-2s \cos(n\pi + \nu_0\bar{\tau}) \\ &+ nr \sin(n\pi + \nu_0\bar{\tau})] \left. \right\} \\ s &= -\left\{ \Omega r - \frac{3}{4} \alpha(r^2 + s^2)r + \mu\delta\omega s + \gamma \right. \\ &+ 2\mu\beta \frac{\sin(n\pi)}{(n^2-4)n\pi} [-2r \cos(n\pi + \nu_0\bar{\tau}) \\ &+ n^2 r \cos(n\pi + \nu_0\bar{\tau}) + ns \sin(n\pi + \nu_0\bar{\tau})] \left. \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

여기서  $\nu_0 = 2\omega\nu$ 이다. 아래의 좌표변환식:

$$J = \frac{r^2 + s^2}{2}, \quad z = \tan^{-1}(s/r) \quad (31)$$

을 이용하여 식 (30)을 극좌표계로 바꿔 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{J} = & -\gamma\sqrt{2J} \sin z + \mu \left\{ \beta J \frac{\sin(n\pi)}{(n^2-4)\pi} \right. \\
 & \times [(n+2) \sin(n\pi-2z+\nu_0\tau) \\
 & \left. - (n-2) \sin(n\pi+2z+\nu_0\tau)] - 2\delta\omega J \right\} \quad (31a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{z} = & -\Omega + \frac{3}{2} \alpha J - \frac{\gamma}{\sqrt{2J}} \cos z \\
 & - \mu\beta \frac{\sin(n\pi)}{2n(n^2-4)\pi} \{ 2(n^2-4) \cos(n\pi+\nu_0\tau) \\
 & + n(n+2) \cos(n\pi-2z+\nu_0\tau) \\
 & + n(n-2) \cos(n\pi+2z+\nu_0\tau) \} . \quad (32b)
 \end{aligned}$$

#### 4. 고정점과 호모클리닉 궤도

식 (32)의 고정점과 호모클리닉 궤도를 구하기 위해 식 (32)에서  $\mu = 0$  일 때, 식 (32)는 다음과 같은 적분가능 해밀턴계(integral Hamiltonian system)가 된다.

$$\begin{aligned}
 \dot{J} = & -\gamma\sqrt{2J} \sin z, \\
 \dot{z} = & -\Omega + \frac{3}{2} \alpha J - \frac{\gamma \cos z}{\sqrt{2J}} \quad (33)
 \end{aligned}$$

이때 식 (33)을 적분하므로써 해밀턴 에너지는

$$H(J, z) = -\Omega J + \frac{3}{4} \alpha J^2 - \gamma\sqrt{2J} \cos z \quad (34)$$

이 된다.  $\alpha > 0, \Omega > 0$  그리고  $0 < \gamma < \frac{4}{9} \left( \frac{\Omega^3}{\alpha} \right)^{1/2}$  일 때, 식 (33)은 3개의 고정점을 갖는다. 이 때 고정점  $f_1(j_1, \pi), f_3(j_3, 0)$ 는 중심점(center)이고,  $f_2(j_2, \pi)$ 는 안장점(hyperbolic saddle)이 된다 여기서  $j_1, j_2,$ 와  $j_3$ 는 다음 3차 방정식의 해이다.

$$J^3 - 2 \left( \frac{2\Omega}{3\alpha} \right) J^2 + \left( \frac{2\Omega}{3\alpha} \right)^2 J - 2 \left( \frac{\gamma}{3\alpha} \right)^2 = 0. \quad (35)$$

또한 안장점의 에너지 준위는 식 (34)로 부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$H(J, z) = H(j_2, \pi) \equiv H_0. \quad (36)$$

따라서, 식 (36)은 호모클리닉 궤도  $\Gamma_+, \Gamma_-$ 와 안장점  $f_2$ 로 구성되어지며 Fig. 5에 도시하였다. Fig. 5는 식 (33)에 대한 위상도로서 호모클리닉 궤도와 안장점을 잘 보여주고

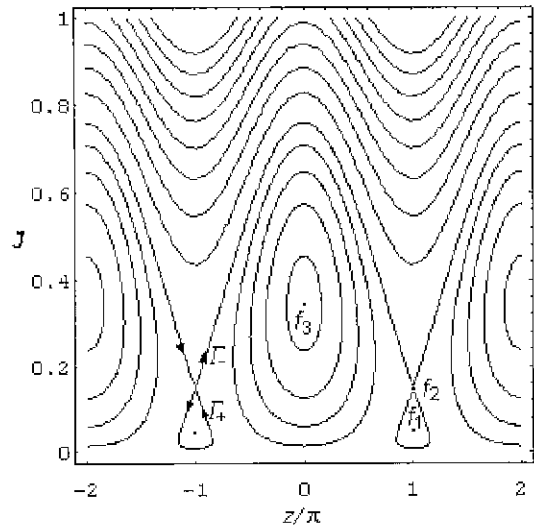


Fig. 5 Phase portrait in case of  $\alpha=12.4895, \Omega=5, \gamma=1.2$

있다. 한편, 호모클리닉 궤도  $\Gamma_{\pm}(J_{\pm}(t), \phi_{\pm}(t))$ 는 식 (33)의 미분방정식을 적분함으로써 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}
 J_{\pm}(t) = & \pm \frac{2r_+r_-}{(r_+ - r_-) \cosh at \pm (r_- + r_+) + j_2}, \\
 z_{\pm}(t) = & \arccos \left[ \frac{1}{\gamma\sqrt{2J_{\pm}(t)}} (-\Omega J_{\pm}(t) + \frac{3}{4} \alpha J_{\pm}^2(t) - H_0) \right] \quad (37)
 \end{aligned}$$

여기서  $a = 3\alpha\sqrt{-r_+r_-} / 4, r_{\pm} = 2(x \pm \sqrt{2xj_2}),$  그리고  $x = 2\Omega / 3\alpha - j_2$ 이다.

#### 5. Melnikov 함수

이 이론<sup>(6)</sup>은 특정한 계의 혼돈운동이 일어나는 범위를 해석적으로 구할 수 있는 방법으로 다음과 같은 특성의 계에 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} = & \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mu \mathbf{g}(\mathbf{x}, \bar{\tau}), \\
 \mathbf{x} = & \begin{pmatrix} J \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2, 0 < \mu \ll 1 \quad (38)
 \end{aligned}$$

이때 식 (38)에서  $\mu = 0$  이면 식 (38)은 다음과 같은 해밀턴 계가 된다.

$$J = f_1(J, z) = \frac{\partial H}{\partial J}, \quad \dot{z} = f_2(J, z) = -\frac{\partial H}{\partial z} \quad (39)$$

해밀턴 계인 식 (39)는 Fig. 5에서의 같이 안장점에 대한 호모클리닉 궤도  $\Gamma_{\pm}(J_{\pm}(\bar{\tau}), \phi_{\pm}(\bar{\tau}))$ 를 갖는다. 이와 같은

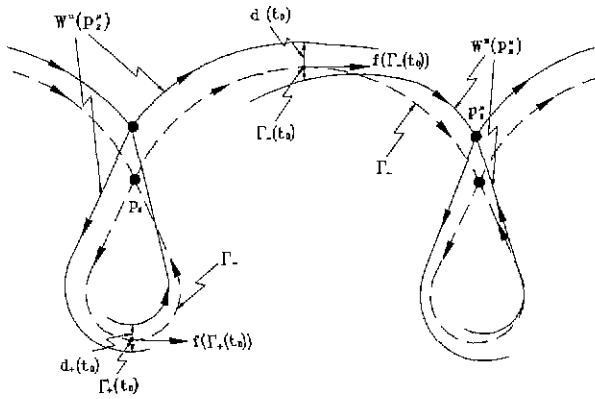


Fig. 6 Distance function of perturbed manifolds.

계에서  $\mu (> 0)$ 가 매우 작은 경우 Fig. 6에서와 같이 섭동 안정점  $p_2^s$ 와 섭동 안정다양체(perturbed stable manifold)  $W^s(p_2^s)$  및 섭동 불안정다양체  $W^u(p_2^s)$ 가 비섭동 안정점  $p_2$ 와 비섭동 안정다양체  $W^s(p_2)$  및 비섭동 불안정다양체  $W^u(p_2)$  근방에 존재한다. 이때  $W^s(p_2^s)$ 와  $W^u(p_2^s)$  사이의 거리  $d(\bar{\tau}_0)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$d_{\pm}(\bar{\tau}_0) = \frac{\mu M_{\pm}(\bar{\tau}_0)}{|f(\Gamma_{\pm}(\bar{\tau}_0))|} + O(\mu^2) \quad (40)$$

여기서  $M(\bar{\tau}_0)$ 는 Melnikov 함수라고 하며 다음과 같이 주어진다.

$$M_{\pm}(\bar{\tau}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\Gamma_{\pm}(\bar{\tau})) \wedge g(\Gamma_{\pm}(\bar{\tau}), \bar{\tau} + \bar{\tau}_0) d\bar{\tau}, \quad (41)$$

여기서 wedge product는  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$  이다. 식 (40)으로 부터  $M_{\pm}(\bar{\tau}_0)$ 가 다음과 같은 조건(simple zero)이면  $W^s(p_2^s)$ 와  $W^u(p_2^s)$ 는 서로 교차한다는 것을 의미한다.

$$M_{\pm}(\bar{\tau}_0) = 0, \quad \frac{\partial M_{\pm}(\bar{\tau}_0)}{\partial \bar{\tau}_0} \neq 0 \quad (42)$$

따라서 Smale-Birkoff 호모토피 이론에 따라 혼돈운동의 충분조건을 이론적으로 규명하게 된다.

식 (32)는 식 (38)과 같은 특성을 모두 만족하므로 Melnikov 이론을 적용하여 식 (32)에 대한 혼돈운동의 존재를 이론적으로 규명할 수 있다. 그러므로 식 (32)에 대한 Melnikov 함수는 다음과 같이 유도된다.

$$M_{+}(\bar{\tau}_0) = \frac{4\pi\beta}{27\alpha^2\gamma^2 \sinh\left(\frac{4\nu_0\theta_0}{3\alpha\rho}\right)} \left[ M_1 \cosh\left(\frac{4\nu_0\theta_0}{3\alpha\rho}\right) - M_2 \sinh\left(\frac{4\nu_0\theta_0}{3\alpha\rho}\right) \right] - \frac{16\delta\omega}{3\alpha} \left( \Omega\theta_0 - \frac{9}{8}\rho\alpha \right), \quad (43)$$

$$M_{-}(\bar{\tau}_0) = \frac{4\pi\beta}{27\alpha^2\gamma^2 \sinh\left(\frac{4\nu_0}{3\alpha\rho}\right)} \left[ M_1 \cosh\left(\frac{4\nu_0(\pi-\theta_0)}{3\alpha\rho}\right) + M_2 \sinh\left(\frac{4\nu_0(\pi-\theta_0)}{3\alpha\rho}\right) \right] + \frac{16\delta\omega}{3\alpha} \left( \Omega(\pi-\theta_0) + \frac{9}{8}\rho\alpha \right), \quad (44)$$

여기서

$$\theta_0 = \arccos[(r_+ + r_-)/(r_+ - r_-)], \quad \rho = (-r_+ r_-)^{1/2}$$

$$M_1 = A_{1s} \sin(\nu_0 \tau) + A_{1c} \cos(\nu_0 \tau)$$

$$M_2 = A_{2s} \sin(\nu_0 \tau) + A_{2c} \cos(\nu_0 \tau)$$

$$A_{1s} = \frac{\cos(n\pi)\sin(n\pi)}{(n^2-4)\pi} [-108\alpha\gamma^2 + 54aj_2(2\Omega-3aj_2)^2 + n(2\Omega-3aj_2)(2\Omega+9aj_2)\nu_0 - 4nv_0^3]$$

$$A_{1c} = \frac{\sin^2(n\pi)}{(n^2-4)\pi} [-108\alpha\gamma^2 + 54aj_2(2\Omega-3aj_2)^2 + n(2\Omega-3aj_2)(2\Omega+9aj_2)\nu_0 - 4nv_0^3]$$

$$A_{2s} = \frac{\cos(n\pi)\sin(n\pi)}{(n^2-4)\pi} [72\alpha\gamma^2\Omega + (9naj_2\nu_0 - 36aj_2\Omega)(2\Omega-3aj_2)^2 - 18n\alpha\gamma^2\nu_0 + 2(2\Omega-3aj_2)(2\Omega+9aj_2)\nu_0^2 + 8v_0^4] + 18\alpha\gamma^2\nu_0 \frac{\cos(n\pi)\sin(n\pi)}{n\pi}$$

$$A_{2c} = \frac{\sin^2(n\pi)}{(n^2-4)\pi} [72\alpha\gamma^2\Omega + (9naj_2\nu_0 - 36aj_2\Omega)(2\Omega-3aj_2)^2 + 2(2\Omega-3aj_2)(2\Omega+9aj_2)\nu_0^2 + 8v_0^4] - 18\alpha\gamma^2\nu_0 \left[ \frac{n \cos(n\pi)\sin(n\pi)}{(n^2-4)\pi} - \frac{\cos(n\pi)\sin(n\pi)}{n\pi} \right]$$

식 (43)과 식 (44)를 정리하여 간략하게 표현하면 다음과 같은 형태,

$$M_{\pm}(\bar{\tau}_0) = \beta \sin(\nu_0\bar{\tau}_0 + \phi) \cdot C_{\pm}(\alpha, \gamma, \Omega, \nu_0) + \delta\omega D_{\pm}(\alpha, \gamma, \Omega). \quad (45)$$

로 표현할 수 있으며, 이때 식 (45)가 simple zero가 될 조건식은 다음과 같다.

$$\beta / \delta\omega > |D_{\pm}(\alpha, \gamma, \Omega) / C_{\pm}(\alpha, \gamma, \Omega, \nu_0)| = R_{\pm}(\alpha, \gamma, \Omega, \nu_0). \quad (46)$$

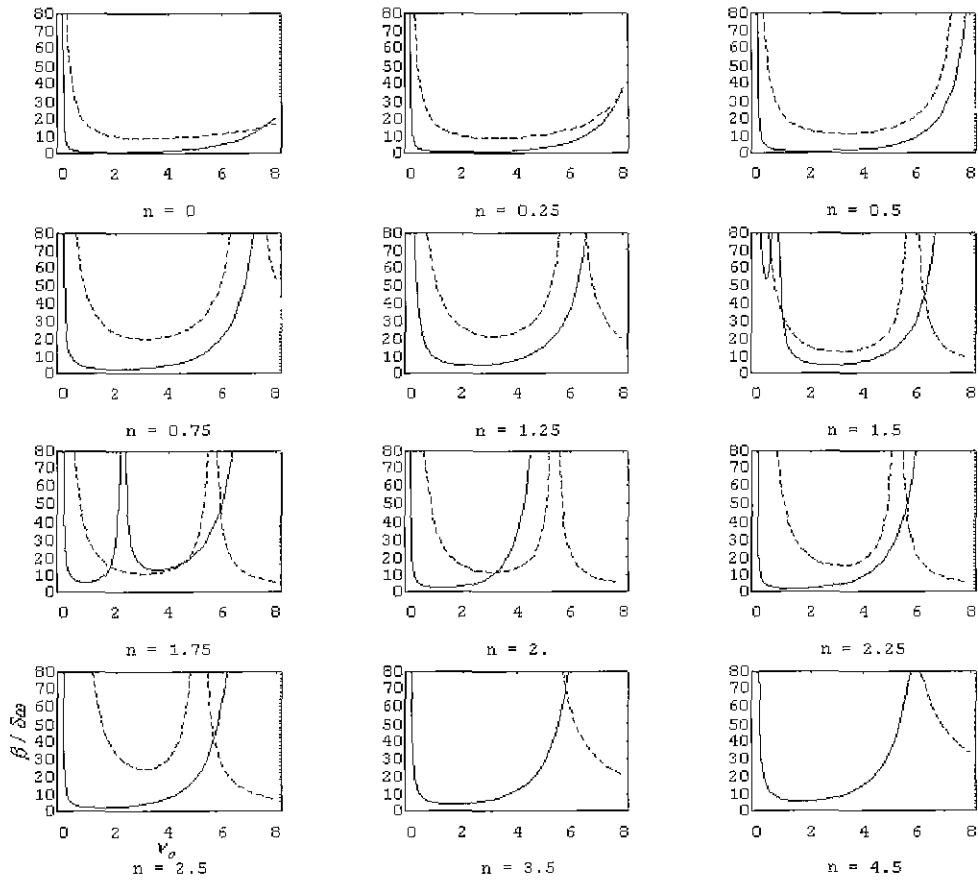


Fig. 7 Homoclinic bifurcation curve when  $\alpha=12.4895$ ,  $\Omega=5$ ,  $\gamma=1.2$   
 (— :  $R_+(\nu_0)$ , - - - :  $R_-(\nu_0)$ )

따라서 식 (45)의 Melnikov 함수로부터 식 (32)에서 야기되는 혼돈운동의 충분조건 식 (46)을 얻을 수 있으므로 식 (32)에서 야기되는 혼돈운동의 발생범위를 계의 매개변수에 따라 얻을 수 있다. 앞에서 언급된 바와 같이 평균시스템 식 (32)에서 혼돈운동이 존재한다는 것은 고유시스템 식 (26)에서도 혼돈운동이 존재한다는 것을 의미하게 된다. Fig. 7은 매개변수 가진주파수  $\omega_c$ 와 고유진동수  $\omega_1$ 의 비가  $n$ 이 되는 주파수 근방에서의 분기영향을 고찰하기 위해,  $n$ 값의 변화에 따라 호모클리닉 분기곡선  $\beta/\delta\omega = R_{\pm}$ 를  $\beta/\delta\omega - \nu_0$  평면상에 도시한 것으로 이들 곡선의 위 영역이 혼돈운동의 존재영역을 의미하게 된다. 이들 분기곡선으로부터, 세가지 형태의 혼돈운동을 예상할 수 있다.  $\beta/\delta\omega > R_+$ 인 영역에서는  $\Gamma_+$ 를,  $\beta/\delta\omega < R_-$ 인 영역에서는  $\Gamma_-$ 를 따라  $z = \pi$  근방에 접근하면서 크게 진동하는 운동(tangling)이 일어난다. 또한  $\beta/\delta\omega > R_+$ 이고  $\beta/\delta\omega < R_-$ 인 영역에서는 앞의 두 가지 운동이 복합된 더욱 복잡한 혼돈운동이 일어난다  $n = 1, 3, \dots$ 인 정수의 경우는 melnikov 함수가 항상 양값을 갖기 때문에 혼돈운

동은 일어나지 않는 공진의 경우이다.

### 6. 수치해석

Melnikov 방법을 통해 매개변수 값의 변화에 따라 혼돈운동이 존재한다는 것을 이론적으로 증명해 보았다. 이러한 결과를 4차 Runge-Kutta 수치해석 방법을 사용하여 살펴보고자 한다. 시간증분은  $T/200$  ( $T = 2\pi/\nu_0$ , forcing period)로 하고 분기선도 및 포앙카레 사상을 이용하여 운동 양상의 변화를  $n = 2.25$ 인 경우에 대하여 고찰하였다. Fig. 8은 포앙카레 사상에 대한 분기도(bifurcation diagram)를 나타낸다. Fig. 8에서 보는 바와 같이  $\beta$ 의 증가에 따라  $\beta = 8.35$ 과  $15.1$  근방에서 주기배증이 일어나며  $\beta = 16.6$  근방에서 급격한 주기배증이 일어나 혼돈운동으로 발전한다. Fig. 8과 Fig. 9는 혼돈운동의 존재영역내의 매개변수 값  $\beta/\delta\omega = 20$ 을 선택하였때 각각  $r-s$  그리고  $J-z$  평면상에 도시된 포앙카레 사상을 나타내며, 혼돈운동을 나타내는 이상 끌개를 확인할 수 있다.



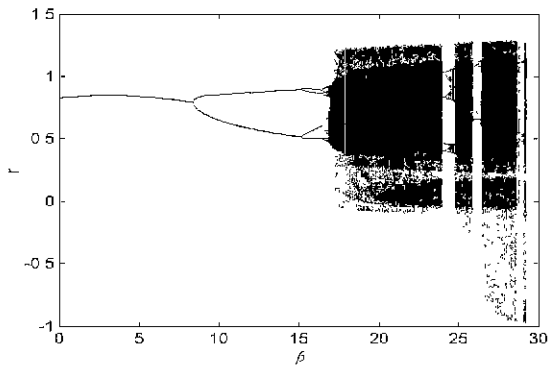


Fig. 8 Bifurcation diagram of averaged system(30) with  $\alpha=12.4895$ ,  $\Omega=5$ ,  $\gamma=1.2$ ,  $\nu_o=3$ ,  $n=2.25$ ,  $\delta=1.0$ ,  $\epsilon=0.01$ ,  $\mu=0.1$

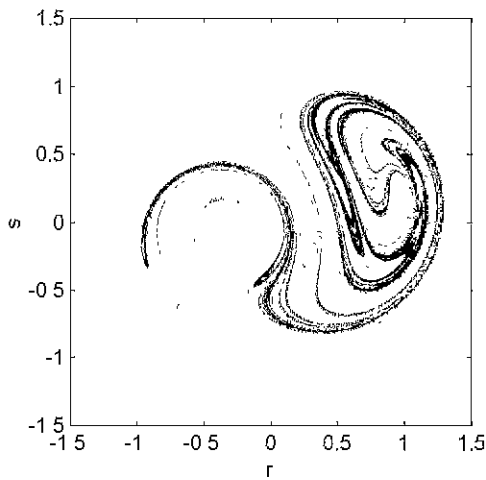


Fig. 9 Poincare map of averaged system(30) with  $\alpha=12.4895$ ,  $\Omega=5$ ,  $\gamma=1.2$ ,  $\nu_o=3$ ,  $\beta/\delta\omega=20$ ,  $n=2.25$ ,  $\delta=1.0$ ,  $\epsilon=0.01$ ,  $\mu=0.1$

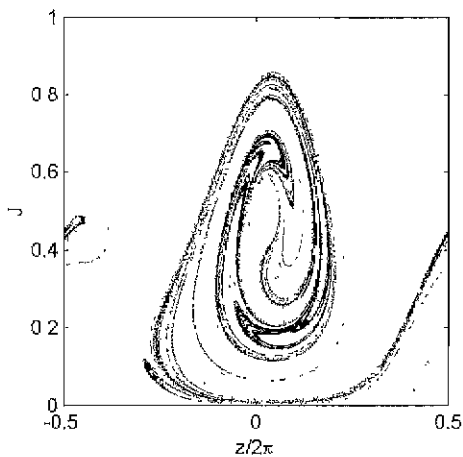


Fig. 10 Poincare map of averaged system(32) with  $\alpha=12.4895$ ,  $\Omega=5$ ,  $\gamma=1.2$ ,  $\nu_o=3$ ,  $\beta/\delta\omega=20$ ,  $n=2.25$ ,  $\delta=1.0$ ,  $\epsilon=0.01$ ,  $\mu=0.1$

## 7. 결 론

본 연구에서는 조화진동유동을 포함한 곡선파이프의 외평면 혼돈운동에 대하여 연구되었다. 곡률의 비선형성을 고려하여 곡선파이프계의 외평면 비선형 운동방정식을 유도하였고 평균이론과 Melnikov 방법을 사용함으로써 호모클리닉 궤도의 교차와 이로 인한 혼돈운동의 존재영역을 계의 매개변수 값의 변화에 따라 이론적으로 규명할 수 있었으며, 수치해석을 통해 검증하였다. 또한 혼돈운동의 경로가 주기배가 분기현상이라는 것을 알 수 있었다. 따라서 곡선파이프계의 외평면 비선형거동 및 유체유발진동 구조를 파악할 수 있으므로 파이프 계를 구성하는 설계변수들의 설계범위 및 진동제어에 활용될 수 있다.

## 참 고 문 헌

- (1) Paidoussis, M. P., and Moon, F. C., 1988, "Nonlinear and Chaotic Fluid-Elastic Vibrations of a Flexible Pipe Conveying Fluid", *Journal of Fluid and Structures*, Vol. 2, pp. 567~591.
- (2) Paidoussis, M. P., Li, G. X., and Moon, F. C., 1989, "Chaotic Oscillations of the Autonomous System of a Constrained Pipe Conveying Fluid", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 135, pp. 1~19.
- (3) Paidoussis, M. P., Li, G. X., and Rand, R. H., 1991, "Chaotic Motions of a Constrained Pipe Conveying Fluid", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 559~565.
- (4) Tang, D. M., and Dowell, E. H., 1988, "Chaotic Oscillations of a Cantilevered Pipe Conveying Fluid", *Journal of Fluid and Structures*, Vol. 2, pp. 263~283.
- (5) Melnikov, V. K., 1963, "On the Stability of the Center for Time Periodic Perturbations", *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, Vol. 12, pp. 1~56.
- (6) Guckenheimer, J., and Holmes, P. J., 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York.
- (7) Yagasaki, K., Sakata, M., and Kimura, K., 1990, "Dynamics of a Weakly Nonlinear System subjected to Combined Parametric and External Excitation", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 209~217.
- (8) Yagasaki, K., 1991, "Chaos in a Weakly Nonlinear Oscillator with Parametric and External Resonances", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 244~250.

(9) 박철휘, 홍성철, 정욱. 1996. "조화진동유동을 포함한 직선파이프계의 혼돈운동 연구," 한국소음진동공학회지, 제 6권, 제 2호, pp. 233~244.

(10) 박철휘, 홍성철, 김태정. 1997. "조화진동유동을 포함한 곡선파이프계의 혼돈운동연구," 한국소음진동공학회지, 제 7권, 제 3호, pp. 489~498.

(11) Lee, U. Pak, C. H., and Hong, S. C., 1995. "Dynamics of Piping System with Internal Unsteady Flow". J. of Sound and Vibration, Vol. 180(2), pp. 297~311.