

<논 문>

## 경계 요소 해석과 진동 실험을 이용한 단순 평판의 방사 음향 예측

Estimation of Sound Radiation for A Flat Plate by Using BEM and  
Vibration Experiment

김 관 주\* · 김 정 태\* · 최 승 권\*\*

Kwanju Kim, Jeungtae Kim and Sungkwon Choi

(2000년 5월 23일 접수 ; 2000년 9월 14일 심사완료)

**Key Words:** Modal Expansion(모드 확장), Accelerance(가속도 주파수 응답 함수), Phase Information(위상 정보), BEM(경계 요소 해석)

### ABSTRACT

BEA(Boundary Element Analysis) based on Kirchhoff-Helmholtz integral equation is widely used in the prediction of sound radiation problems of vibrating structures. Accurate estimation of sound pressure distribution by BEA can be possible if and only if dynamic behavior of the relating structure was described correctly. Another plausible method of sound radiation phenomena could be the NAH (Nearfield Acoustic Holography) method. NAH also based on the identical governing equation with BEA could be one of the best acoustic imaging schemes but it has disadvantages of the complexity of measurement and of the need of large amount of measuring points. In this paper, modal expansion method is presented for taking accurate dynamic data of the structures efficiently. This method makes use of vibration principle an arbitrary dynamic behavior of the structure is described by the summation of that structures mode shapes which can be calculated by FEA easily and accurately. Sound pressure field from a vibrating flat plate is calculated using the combination of vibration signal on that flat plate from experiment, and of the natural mode shapes from FEA. When sound pressure field from vibration signal is calculated the importance of the phase information was emphasized.

### 1. 서 론

구조물의 진동에 기인한 음향 방사로 형성되는 음장을 예측하기 위해서는 진동 표면의 속도 분포 혹은 인접한 위치의 음압 정보를 정확히 알고 있어야 한다. 임의의 위치에 대한 음장 예측 기법을 크게 두 가지로 나누어 보면, 첫째는 실험

에 기본을 둔 근음장 음향 홀로그래피(nearfield acoustical holography) 방법으로써 진동 표면에 인접한 마이크로폰들로부터 속도 혹은 음압을 측정하고 그 값으로 임의의 위치의 음장 분포를 예측하는 방법이다. 두 번째 방법은 전산 해석을 이용하는 경계 요소 해석 방법(BEA)이라 할 수 있겠다. 여기서 유한 요소 해석에 의한 구조물의 모드 형상(mode shape)과 실험에 의한 구조물의 진동 데이터를 경계 요소 해석의 경계 조건으로 사용하는 음장 예측 방법을 모드 확장(modal expansion) 방법이라 한다. 위의 두 방법의 기본 원리는 유사하다. 근음장 음향 홀로그래피는 마이크로폰으로

\* 정회원, 홍익대학교 공과대학 기계공학과

\*\* 홍익대학교 일반대학원 기계공학과

측정된 음압과 속도를 키르히호프-헬름홀츠 적분 방정식에 적용하는 형태이며, 모드 확장 방법은 실험으로 얻은 진동 표면의 속도와 유한 요소 해석으로 얻은 모드를 이용하여 속도 경계 조건을 형성하고 이 속도 경계 조건을 헬름홀츠 적분 방정식에 적용하는 형태이다. 키르히호프-헬름홀츠 적분 방정식을 간략히 표현하면 식 (1)과 같다.<sup>(1)</sup>

$$-\frac{1}{4\pi} \iint [G \cdot \nabla p - p \cdot \nabla G] \cdot n_s dS = p \quad (1)$$

식 (1)에서  $G$ 는 Green 함수,  $p$ 는 음압을 나타내며  $n_s$ 는 수직 벡터이다. 이 때  $\nabla p = i\rho c k v_n$ 으로 음압의 공간 미분을 수직 방향 속도 성분과 연관지을 수 있다. 이 적분 방정식은 수치 적분을 위한 이산화(discretization)를 거쳐 계산된다. 실험에 근거한 근음장 음향 홀로그래피는 모드 확장 방법보다 많은, 보다 정확한 정보를 제공해 줄 뿐 아니라 시변(time variant), 과도(transient) 음향 예측에도 적용할 수 있는 장점이 있다. 그러나 홀로그래피 해상도의 극대화를 위하여 많은 마이크로폰이 필요하게 되어 실험 비용이 증가되고 측정이 복잡하다는 단점이 있다.<sup>(2)</sup> 이에 반해 모드 확장 방법은 제한된 측정점의 속도 분포를 이용하여 복잡한 구조물에 대해서도 높은 신뢰도를 갖는 결과를 얻을 수 있다.<sup>(2,3)</sup> 본 논문에서는 모드 확장 방법을 사용하여 단순 평판의 진동에 의해 형성되는 음장 분포를 예측해 보고 기존의 모드 확장 방법을 다른 논문들에서 언급하지 않았던 진동 표면의 가속도 신호 처리 방법에 대해 다루었다.

## 2. 본 론

### 2.1 모드 확장 방법의 기초 이론

음향 예측의 경계 조건으로 사용하는 속도 분포는 두가지 방법으로 얻을 수 있다. 첫째는 유한 요소 해석을 이용하는 방법이고, 둘째는 실험에 의한 방법이다. 유한 요소 해석을 이용하는 방법은 구조물의 물성치, 기하학적 경계 조건, 구조 감쇠 등의 많은 불확실성에 의해 정확도가 제한된다. 반면 실험을 통한 진동 응답은 구조물의 동적 거동을 정확히 표현할 수 있는 많은 절점들에 대한 측정이 가능하면 최상의 값을 제공해 줄 것이다.<sup>(1)</sup> 모드 확장 방법은 이러한 두 방법의 장점을 취한 방법이다. 즉 유한 요소 해석의 용이성과 실험의 정확성을 절목시킨 복합(hybrid) 해석 방법이다. 모드 확장 방법의 기본 개념은 복잡한 진동 응답을 조화 함수의 선형 조합으로 표현할 수 있다는 가정으로 시작한다.  $i$  절점에서  $j$  방향의 변위로 표현되는  $m$ 번째 진동 모드 형상의 선형 조합은 식 (2)와 같이 쓸 수 있다

$$u_{ij} = \sum_{k=1}^m a_k \phi_{ijk} \quad (2)$$

여기서,

$u_{ij}$  :  $i$  절점의  $j$  방향 변위

$a_k$  : 모드  $k$ 의 모드 기여도

$\phi_{ijk}$  : 모드  $k$  고유 벡터의 절점  $i$ 의  $j$  방향 변위

을 의미하며, 절점  $i$ 의 수직 방향 속도 크기  $v_{n,i}$ 는 식 (3)과 같다.

$$v_{n,i} = \sum_{k=1}^m (i\omega a_k) \cdot \phi_{ijk} \quad (3)$$

이 때 우리가 알게 되는 값은 우항의  $\phi_{ijk}$ 인 모드 형상과 좌항의  $u_{ij}$ 이다. 이 식으로부터 모드 기여도(modal participation factor)  $a_k$ 를 구하고 식 (3)과 같은 선형 행렬을 이용하여 다른 모든 절점들의 변위와 경계 요소 해석의 경계 조건으로 입력되는 수직 방향 속도를 구할 수 있다. 조화 함수로 가정하였으므로 식 (2)에서 좌항이 가속도라면 식 (3)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$v_{n,i} = \sum_{k=1}^m \left( \frac{a_k}{i\omega} \right) \cdot \phi_{n,ijk} \quad (4)$$

즉 모드 형상 행렬은 유한 요소 해석으로 구하고 가속도 벡터는 실험으로부터 얻는 것이다. 이로부터 모드 확장 방법은 구조물의 정확한 진동 응답을 얻기는 힘들나 비교적 쉽고 근접한 모드 형상을 얻을 수 있는 유한 요소 해석의 장점과 제한된 절점이지만 동적 거동 특성과 감쇠 계수 특성 등이 포함된 정확한 진동 응답을 제공해 주는 실험의 장점을 조합한 방법임을 알 수 있다.

### 2.2 평판의 유한 요소 해석

본 논문에서는 간단한 형상임에도 모드 밀도(modal density)가 높아 저주파 대역에서도 복잡한 고차 굽힘 모드 형상이 나타나는 얇은 두께의 평판을 대상으로 하였다. 해석

Table 1 Size and B.C of the plate

	Size(W×H×T) (meter)	B.C.
Flat Plate	0.914×0.838×0.003	simply supported at the four corners

Table 2 Material properties of the plate

Material	Poisson's ratio	Density	Young's Modulus
Steel	0.29	7820 kg/m <sup>3</sup>	206.8 MPa

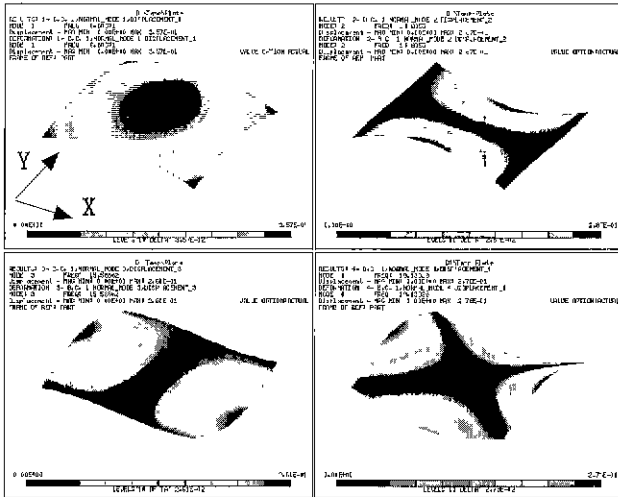


Fig. 1 First 4 mode shapes from modal analysis of FEA

주파수 대역은 0 Hz부터 200 Hz로 선정하였다. 해석 모델은 4 절점 선형 사각 요소  $32 \times 32 = 1024$ 개, 절점  $33 \times 33 = 1089$ 개로 이루어져 있다. 최소 4개의 절점으로 한 파장을 형성한다고 가정하면 약 8개의 파장을 표현할 수 있으며 6개의 절점으로는 5.5개의 파장을 표현할 수 있다. 유한 요소 모델의 기하학적 경계 조건을 네 모서리 단순 지지(simply supported)로 하였으므로 반 파장을 이루는 모드 형상들도 나타난다. 해석과 실험에 사용한 평판의 제원은 Table 1과 같고 관련된 재료의 특성은 Table 2와 같다.

Fig. 1은 유한요소 자유진동해석(normal modes analysis)을 통해 얻은 처음 4개의 고유 주파수와 모드 형상을 보여 주고 있다. 왼쪽 상단의 첫 번째 모드는 X 방향으로 각각 반 파장이 형성되는 모드이며 오른쪽 상단의 그림은 두 번째 모드로서 X 방향으로 반 파장의 모드가 형성되는 것을 볼 수 있다. Table 3은 유한 요소 해석으로 구한 처음 10개의 고유 주파수와 모드 형상을 정리한 것이다.

Table 3 Description of first 10 mode shapes  
( $l_x$  : length of  $x$ ,  $l_y$  : length of  $y$ )

No.	Freq. (Hz)	$(\lambda_x, \lambda_y)$
1	6.80371	$(\frac{1}{2}l_x, \frac{1}{2}l_y)$
2	14.89550	$(\frac{1}{2}l_x, 0)$
3	15.58862	$(0, \frac{1}{2}l_y)$
4	19.13929	$(\frac{1}{2}l_x, \frac{1}{2}l_y)$
5	36.92222	$(1l_x, 1l_y)$
6	42.78980	Peak at center
7	45.77336	$(1l_x, \frac{1}{2}l_y)$
8	54.53943	$(\frac{1}{2}l_x, 1l_y)$
9	67.16016	$(1l_x, 1l_y)$
10	75.66618	Peak/Valley

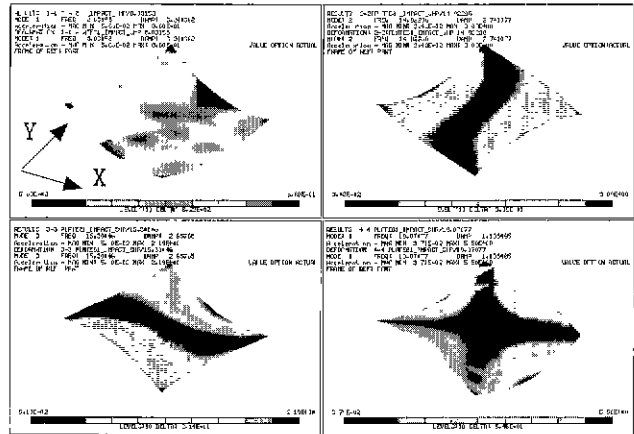


Fig. 2 Mode shapes from test

Table 4 Correlation of results from both test and FEA(T: Test, A: Analysis, ×: Not appear)

Mode No.		Test	Analysis	Rel. Change (%)	MAC
T	A				
1	1	8.032	6.80371	-15.167	0.957
2	3	14.923	15.58862	4.836	0.882
3	2	15.300	14.89550	-2.288	0.892
4	4	19.071	19.13929	0.181	0.975
5	5	33.711	36.92222	9.851	0.913
6	8	45.344	54.53943	13.560	0.943
7	7	48.115	45.77336	-5.030	0.801
8	6	57.268	42.78980	-25.020	0.617
9	×	60.011	---	---	---
10	9	66.782	67.16016	0.408	0.958
11	×	81.598	---	---	---
12	×	83.442	---	---	---
13	×	84.964	---	---	---
×	10	---	75.66618	---	---

### 2.3 평판의 모드 해석

다음으로는 유한 요소 해석으로 구한 모드 형상이 타당한 결과인지 검증하기 위하여 모달 해석을 수행하였다. 충격 해머와 4개의 가속도계를 이용하여 평판 위의 가로, 세로 각각 9점, 총 81점에 대해 모드 해석을 수행하였다. 주파수 대역은 유한 요소 해석의 주파수 대역과 동일한 0 Hz~200 Hz로 하였으며 주파수 해상도는 0.5 Hz 간격으로 하였다. Fig. 2는 모달 해석에 의한 네 개의 모드 형상을 보여 주고 있다. Fig. 2와 Fig. 1을 비교하면 각 모드 형상의 유사함을 알 수 있다.

Table 4는 실험 결과와 유한 요소 해석 결과에서 10개의 고유 주파수에 대한 상호 관계(correlation)를 나타낸 것이다.

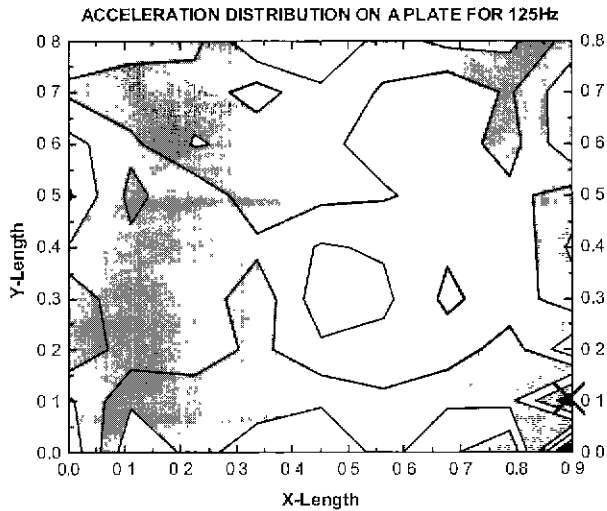


Fig. 3 Acceleration distribution of a plate surface for 125Hz excitation

앞서 언급했듯이 모드 확장 방법은 식 (2)와 같은 선형 조합을 기반으로 하므로 상호 관계가 밀접할수록 예측 음장은 보다 정확한 결과를 가질 것이다. MAC에 의해 4번째 모드까지 해석과 실험이 거의 정확히 일치하는 것을 볼 수 있다. 모드 확장 방법에 의해 음장 예측을 수행할 때는 유한 요소 해석에 의한 모드 형상과 모드 기여도 그리고 실험에 의한 속도 분포, 세 변수가 가장 중요하므로 유한 요소 해석과 실험의 상호 관계를 검토하는 것은 반드시 필요한 과정이다. 이렇게 하여 식 (2)의 우항에 해당되는 모드 형상 획득과 검증의 과정이 완료되었다. 다음은 좌항에 해당되는 평판의 진동 신호 분포를 얻기 위한 실험을 알아보겠다.

### 2.4 평판의 진동 신호 측정

모드 확장 방법을 이용한 음장 예측을 위해 평판의 진동 신호 측정 실험을 수행하였다. 가진은 힘 측정기(force transducer)가 부착된 가진기를 이용하여 125 Hz 순음 가진(pure tone excitation)을 하였다. 모달 해석과 동일한 총 81 점의 절점에 대해 가속도 주파수 응답 함수(Accelerance)를 측정하였다. Fig. 3은 실험으로 구한 평판의 가속도 분포 크기를 도시화 한 것이다. 가진기가 부착된 절점의 위치에 해당되는 약 (0.9 m, 0.1 m) 위치의 가속도 값이 다른 부분보다 상대적으로 높은 값을 보인다.

이렇게 실험을 통해 얻은 가속도 분포는 식 (2)의 좌항에 가속도로 입력된다. 이 값과 2.2절에서 구한 유한 요소 해석의 모드 형상이 우항에 입력되어 식 (4)의 관계를 이용하여 모드 기여도를 계산하고 속도 경계 조건을 구성하게 된다. 다음은 이러한 진동 신호를 측정함에 있어 반드시 고려해야 할 사항과 구체적인 측정 방법에 대해 언급하겠다.

### 2.5 평판의 진동 신호 측정시 고려 사항

2.1절에서 서술한 바와 같이 모드 확장 방법은 유한 요소 해석의 모드 형상과 실험에 의한 진동 표면의 진동 신호를 이용하여 음장 예측을 수행하는 방법이다. 따라서 유한 요소 해석의 모드 형상은 실제 구조물의 모드 형상을 적절히 표현해야 하고 진동 표면의 진동 신호는 정확한 그 크기와 위상을 갖고 있어야 한다. 여기서 위상 정보는 구조물의 감쇠 계수, 기하학적 경계 조건 등 구조물의 동적 거동 특성을 표현하는 변수이기 때문에 위상 정보에 많은 오류를 갖고 있다면 매우 부정확한 음장 예측이 이루어진다. 따라서 본 절에서는 보다 정확한 진동 신호를 측정하기 위한 방법을 구체적으로 설명하도록 하겠다. 2.1절의 평판 위 가속도 주파수 응답 함수는 기준 가속도계(reference accelerometer) 혹은 기준 힘 측정기와 응답 가속도계(response accelerometer)를 이용하여 측정한다. 이전 논문<sup>(1)</sup>에서는 가속도 크기와 위상을 표현하는 방법으로 응답 가속도 신호의 파워 스펙트럼(power spectrum)과 기준 가속도 신호와의 교차 파워 스펙트럼(cross power spectrum)을 이용하였다. 즉 파워 스펙트럼으로 진동 신호의 크기를 구하고 교차 파워 스펙트럼으로 두 신호 간의 위상각(phase angle)을 이용하여 (+/-) 부호로 위상 정보를 표현하였다. 결국 진동 신호를 표현함에 있어 복소수가 아닌 (+/-) 부호를 갖는 실수만을 사용한 것이다. 그러나 이 방법은 (+/-) 부호와 실수만을 사용하므로 구조물의 감쇠 계수 및 동적 거동 특성의 명확한 표현에 부족함이 있다. 또한 여러 주파수에 대한 진동 신호를 획득하기 위해서 각 주파수별 파워 스펙트럼과 교차 파워 스펙트럼을 검사해야 하는 비효율적인 작업이 필요하다. 본 논문에서는 이 보다 정확한 위상 정보와 노동 시간을 줄일 수 있는 방법으로 주파수 응답 함수(frequency response function)의 원리를 이용하였다. 주파수 응답 함수를 힘 스펙트럼과 가속도 스펙트럼의 비로 표현하면,

$$A(\omega) = \frac{\ddot{x}(\omega)}{F(\omega)} \tag{5}$$

$$\dot{x}(\omega) = F(\omega) \cdot A(\omega) \tag{6}$$

여기서  $A(\omega)$ 는 가속도 주파수 응답 함수(accelerance)이고,  $\ddot{x}(\omega)$ 는 가속도 주파수 스펙트럼,  $F(\omega)$ 는 힘 스펙트럼이다. 따라서 SI 단위계일 경우, 식 (5), (6)의 관계로부터  $F(\omega) = 1 N$ 이라면 가속도 응답 함수는 곧 진동 표면의 가속도가 된다. 즉, 분모의 힘 스펙트럼의 값을 알고 있다면 식 (6)과 같이 가속도 응답 함수  $A(\omega)$ 에 힘 스펙트럼  $F(\omega)$ 를 곱하여 진동 표면의 가속도 스펙트럼  $\ddot{x}(\omega)$ 를 얻을 수 있는 것이다. 이렇게 계산된  $\dot{x}(\omega)$ 는 복소수가 며 진동하는 구조물의 감쇠 특성뿐 아니라 동특성 정보를 지되

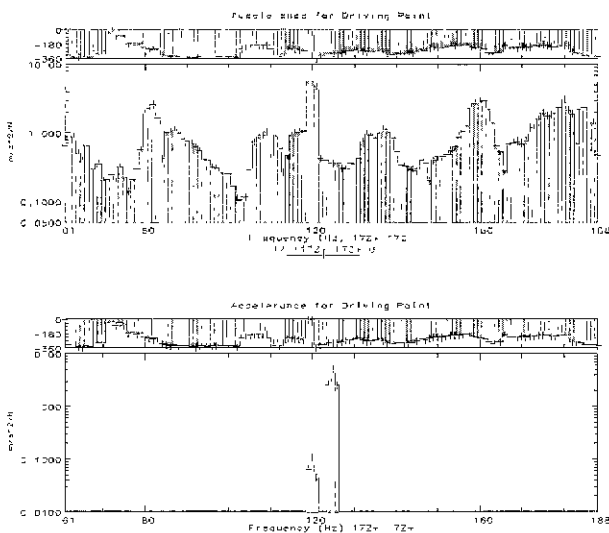


Fig. 4 Accelerance(Top), and acceleration distribution w.r.t frequency(Bottom)

니고 있다. 이러한 관계를 이용하는 것은 앞선 논문<sup>(1)</sup>에서 사용한 방법과 달리 임의 주파수 변화에 따른 힘 스펙트럼 크기에 관계없이 진동 표면의 가속도를 보다 효율적이고 정확하게 복소수 형태로 얻을 수 있는 장점이 있다. Fig. 4는 위 방법으로 구한 주파수 응답 함수를 보여 준다. 상단의 그림은 식 (5)의 가속도 주파수 응답 함수의 크기(하단 그림)와 위상각(상단 그림)을 보여주고 있으며, 하단의 그림은 식 (6)으로 주파수 변화에 따른 힘 스펙트럼을 곱하여 구한 진동 표면의 가속도 크기(하단 그림)와 위상각(상단 그림)을 보여 주고 있다. 가진 주파수 125 Hz가 가장 지배적인 가속도 신호임을 볼 수 있으며 120 Hz의 진동 신호는 해당 주파수에 평판의 모드가 있기 때문에 발생하는 것이다. 다음은 2.4절에서 구한 평판의 진동 신호를 본 결에서 언급한 주파수 응답 함수로 구하고 2.2절에서 얻은 모드 형상을 조합하여 임의 위치에 대한 음장 예측을 수행해 본다.

### 2.6 모드 확장 방법에 의한 평판의 음장 예측

앞서 구한 모드 형상과 진동 신호를 경계 요소 해석에 적용하여 모드 확장 방법으로 음장 예측을 수행하였다. 예측에 사용한 모델은 256개의 다항 요소(parabolic element)와 833개의 절점을 갖고 있다. 모드 확장 방법의 기본 식인 식 (2), (3) 그리고 (4)의 행렬 계산을 수행하면 Fig. 5와 같은 속도 경계 조건을 얻을 수 있다. 왼쪽 그림은 평판의 고유 모드가 존재하여 파생된 120 Hz의 속도 분포이며, 오른쪽 그림은 가진 주파수 125 Hz의 표면 속도 분포이다. 속도 값을 비교해 보면 125 Hz의 값이 상대적으로 매우 큰 것을 알 수 있다

Fig. 6은 경계 요소 해석의 결과로써 왼쪽은 평판의 표면

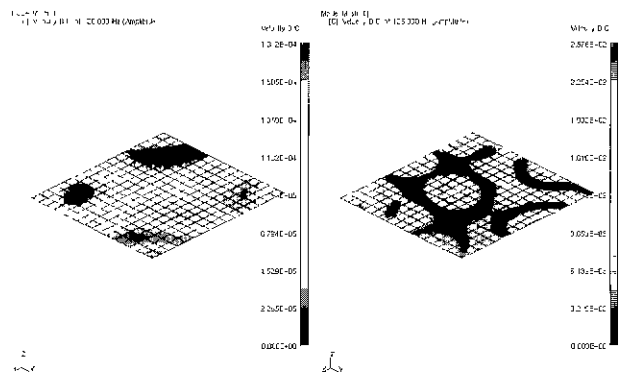


Fig. 5 Velocity boundary condition at 120Hz(Left), and velocity boundary condition at 125Hz (Right)

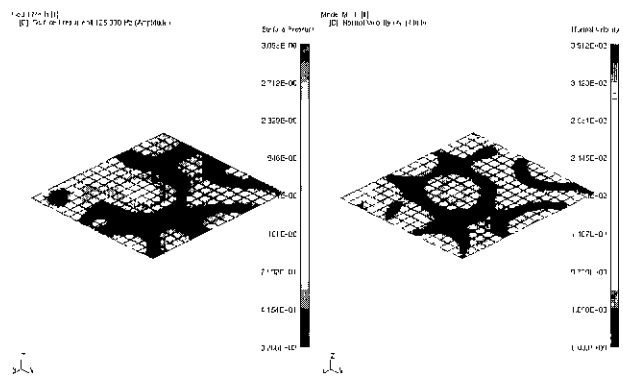


Fig. 6 Surface pressure at 125Hz(Left), normal sound intensity at 125Hz(Right)

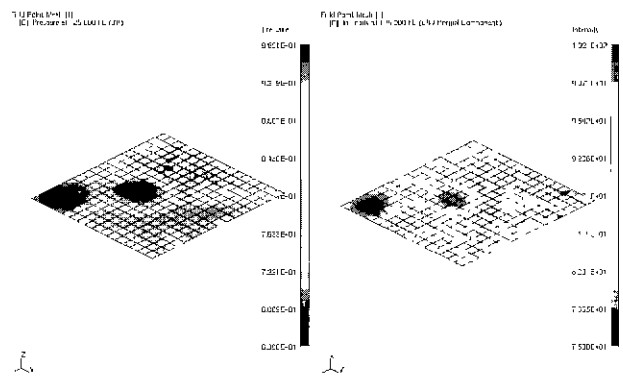


Fig. 7 Field sound pressure at 5cm above(Left), and field normal sound intensity at 5cm above(Right)

음압이고, 오른쪽은 수직 음향 세기(normal sound intensity)이다. 두 그림 모두 가진기가 부착된 부분에서 높은 값을 갖는다. Fig 7은 평판에서 5 cm 상단의 음압 분포와 음향 세기를 보여 준다.

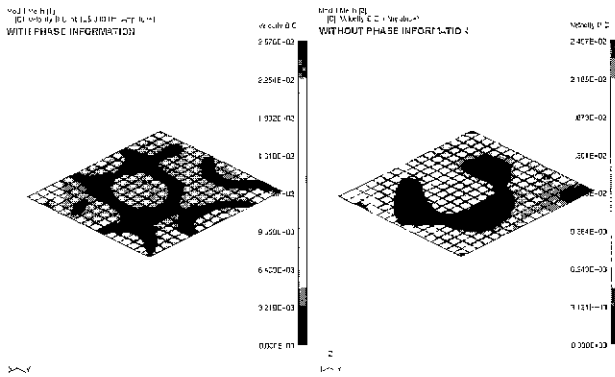


Fig. 8 Comparison of velocity B.C for a plate. With phase information(Left), without phase information(Right)

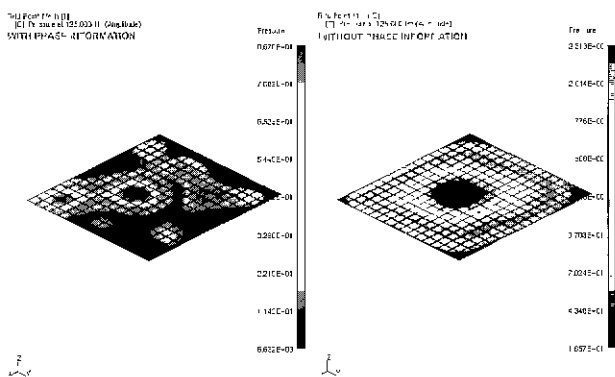


Fig. 9 Comparison of field pressure. With phase information(Left), without phase information(Right)

2.7 위상 정보 유무에 따른 음장 분포

진동 신호의 위상 정보 유무에 따라 예측 음장에 어떠한 변화가 있는지 알아보았다. Fig. 8의 왼쪽 그림은 위상 정보가 있는 경우에 대한 평판의 속도 경계 조건이며 오른쪽은 위상 정보가 없는 경우이다. Fig. 9는 그에 따른 음압 분포를 보여 준다. 위상 정보가 없는 경우 전혀 다른 형태의 속도 경계 조건이 형성되며 그에 의해 잘못된 음압 결과가 계산되는 것을 볼 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서는 진동하는 구조물에 의해 발생하는 음향 방사를 모드 확장 방법으로 예측해 보았다. 그 결과 모드 확장

방법은 간단하고 비교적 높은 정확성을 갖는 유한 요소 해석의 장점과 제한된 측정점에서 얻을 수 있으나 진동하는 구조물의 동적 거동 현상을 명확히 표현하는 실험의 장점을 이용한 전산 해석 방법임을 알 수 있었다. 이 때 실험을 통한 진동 신호를 정확히 얻기 위해 주파수 응답 함수를 이용하였다. 또한 위상 신호의 유무에 따른 음장 예측의 변화도 살펴 보았다. 논문<sup>(2,4)</sup>에서는 복잡한 구조물의 음향 방사 문제를 모드 확장 방법으로 예측하고 실험과 비교하여 매우 높은 정확도의 결과를 도출하였다. 이로부터 제한된 구조 기인 소음 예측에 있어 모드 확장 방법은 비교적 저가이고 간단한 실험을 이용하면서도 매우 높은 신뢰도를 갖는 예측 방법임을 알 수 있다.

후 기

본 논문은 한국학술진흥재단 과학기술기초 중점연구의 지원을 받았으며, 관련자 분들께 감사 드립니다.

참 고 문 헌

- (1) 김양한, 1996, "소음원 규명 방법론: 통합된 개념 및 특성들," 한국소음진동공학회지 제 6 권, 제 6 호, pp. 692~700
- (2) Pierre Gussert, Marc Brughmans, "Modal Expansion of Experimental Vibration Data for Numerical Acoustic Radiation Prediction," NIT Technical Paper.
- (3) P. Gussert, J. P. Roisson, H. Wynendaele, 1991, "Comparing Acoustic Measurements with Combined MSC/NASTRAN-SYSNOISE Sound Radiation Predictions of an Engine Block," MSC World User's Conference.
- (4) 이봉노, 김관주, 1998, "모드확장기법을 이용한 평판의 진동·소음해석," 한국소음진동공학회지 제 8 권, 제 4 호
- (5) E. G. Williams, Henry D. Dardy, 1987, "Generalized Nearfield Acoustical Holography for Cylindrical Geometry: Theory and Experiment," JASA 81(2).
- (6) F. J. Fahy, 1989, "Sound Intensity," Elsevier Applied Science.
- (7) Maynard J. D., Williams E. G., Lee Y., 1985, "Nearfield Acoustic Holography: I Theory of Generalized Holography and the Development of NAH", JASA 78(4).