

<논 문>

# BLDC 전동기의 동적 편심 및 전자기적 불평형력을 고려한 편심 회전자의 과도 동적 해석

## Transient Dynamic Analysis of a Dynamic Eccentric Rotor with Unbalanced Magnetic Forces in BLDC Motors

김 태 중\* · 황 상 문\* · 박 노 길\*

Tae-Jong Kim, Sang-Moon Hwang and No-Gill Park

(1999년 10월 11일 접수 ; 2000년 4월 22일 심사완료)

**Key Words** : Brushless DC Motor(브러쉬레스 직류 전동기), Misaligned Eccentric Rotor(편심된 회전자), Rotor-Motor System(회전축-전동기 시스템), Mechanical Force(기계적 가진력), Unbalanced Magnetic Force(불평형 전자기력), Finite Element-Transfer Matrix Method(유한요소 전달행렬법), Transient Whirl Response(과도 휘돌림 응답)

### ABSTRACT

Vibration of a BLDC motor is a coupled phenomenon between mechanical characteristics and magnetic origins through the motor air-gap. When a relative misalignment of rotor in the air-gap center exists on the assemblage, it is considered to influence the motor system characteristics, depending on the degree of misalignment. The rotor-motor system used in a washing machine is modeled using FE-TM and a magnetic force of BLDC motor with radial rotor eccentricity is analyzed. And, the transient whirl responses of a rotor system with relative misalignment in the motor air-gap are investigated considering mechanical origins and magnetic effects. Results show that rotor misalignment in the air-gap affect the vibration of the rotor-motor system.

### 1. 서 론

기존의 교류 전동기에 비해 고효율, 고토크의 특성을 가진 BLDC(Brushless Direct Current) 전동기의 실용화가 이루어짐으로써 주요 전동력의 응용기종으로 각광을 받게 되었다. 이 전동기는 넓은 속도 범위에 걸쳐 높은 효율을 유지하고 제어가 용이하므로, 정밀 기계의 구동용 회전기계에 널리 이용되고 있다. 대칭 형상의 전동기의 경우 회전자와 고정자의 공극 중심과 정확히 동심 위치에 있다면 불평형 전자기력은 완전히 제거되지만, 제조 공정시 가공 및 조립 오차에 의해 회전자가 고정자의 중심에서 어긋난 위

치에 있음으로 인해 불평형 가진력이 작용한다. 또, 탄성 축-베어링계의 과도한 휘돌림 운동으로 인해 회전자와 고정자 사이에는 불평형 전자기력이 발생하게 된다. 이 전자기적 가진력은 회전자의 공진을 발생시켜 BLDC 전동기의 진동 및 소음을 초래하고, 위치 및 속도의 제어에 어려움을 초래한다. 전동기의 휨 진동에 영향을 주는 변수로써 회전자 및 축의 형상 인자, 지지 베어링의 특성, 회전축에 작용하는 불평형 질량에 의한 동기 가진력과 전동기 회전자에 작용하는 전자기적 가진력을 고려할 수 있다. 이와 같이 BLDC 전동기의 진동과 소음은 기계적 및 전자기적으로 연성 되므로, 저진동과 저소음의 설계를 만족하기 위해서는 이들 특성을 함께 고려하여 회전자의 진동 특성을 해석할 필요가 있다.

\* 정회원, 부산대학교 기계공학부 및 기계기술연구소

탄성 회전축의 휨 진동해석은 유한요소법이 널리 적용되고 있으며<sup>(1)</sup>, 회전축의 휨 진동에 영향을 미치는 인자들에 대한 해석은 대개 기계적 및 전자기적 인자들에 대한 개별적인 특성을 회전축 모델에 적용하여 그 인자가 진동 특성에 미치는 영향을 보여주고 있다<sup>(2, 3)</sup>. 본 논문에서는 유한요소 모델링을 이용하고 적절한 시간 경과의 Houbolt 수치적분 알고리즘을 사용하여, 전달행렬 방법을 시간영역 및 동적 계의 비선형 해석까지 전개가 가능한 유한요소-전달행렬(FE-TM)방법을 적용하였다<sup>(4)</sup>. 이 해석 모델은 축의 성질을 관성을 나타내는 절점 요소 및 강성을 나타내는 영역 요소로서 이산화 하므로, 절점 행렬 및 영역 행렬을 각각 구하여 이들의 곱으로서 요소의 전달 행렬이 계산된다. 편심에 기인하는 전동기의 특성 해석은 오래 전부터 많은 주목을 받아왔으며<sup>(5)</sup>, 유도전동기의 특성에 관해서는 많이 보고되어져 있다. 편심 효과에 의한 불평형 전자기력의 해석<sup>(6)</sup>, 슬롯(slot) 및 스큐(skew)효과를 고려한 불평형 전자기력 해석<sup>(7)</sup>, 불평형 전자기력을 고려한 회전자의 안정성 해석<sup>(8)</sup> 등이 있다. BLDC 전동기의 전자기력에 관한 연구로서 Jang은 균일한 공극에 대하여 전자기 가진력의 고조파 성분을 제거함으로써 고정자 공진의 가능성을 줄일 수 있음을 발표하였다<sup>(9)</sup>. 또, Chao는 BLDC 전동기에서 회전자의 편심에 의한 토크 맥동의 야기 가능성에 관해 보고하였다<sup>(10)</sup>. 그러나, BLDC 전동기의 편심에 관한 이전의 연구는 기계적 및 전자기적 가진원의 각각의 경우에 한정하여 진동, 소음의 연관성을 밝혔을 뿐, 이들의 연성된 가진원에 대한 평가는 아직 미비한 실정이다. 회전자의 질량 불평형에 의한 기계적인 가진력과 외부 가진력에 의한 전동기의 휘둘림 운동은 전동기 내의 공극을 변동시켜 회전자 표면에 작용하는 전자기력을 발생시키고, 이 전자기력은 다시 전동기의 휘둘림 운동에 영향을 주게 된다. 그러므로, BLDC 전동기의 고효율화를 위해 회전자와 고정자 사이에 형성되는 공극 및 가공, 조립 과정에서 회전자가 공극의 중심에서 어긋나게 위치되는 편심량 등이 최적으로 설계되

어야 하며, 이는 회전축-베어링계의 동적 거동 해석을 기반으로 하여 결정될 수 있다.

본 논문에서는 기존의 연구결과에 근거하여 드럼식 세탁기용 BLDC 전동기에서 회전자가 공극 중심에서 어긋난 위치에 있는 경우의 동적 편심에 기인하는 불평형 전자기력을 섭동법(perturbation method)을 이용하여 해석적으로 유도하였다. 전자기적 힘 및 기계적 불평형 힘을 고려한 편심된 위치에 있는 회전자의 동적 거동을 유한요소 전달행렬법을 사용하여 해석하였다. 시간의 변화에 대한 회전축-베어링계의 휘둘림 궤적의 형태를 볼 수 있는 비정상상태의 과도응답을 구하였다. 또, 질량불평형 및 전자기력을 동시에 고려한 회전자의 과도상태 응답을 회전자의 어긋난 편심량을 변화시켜 해석함으로써 그 영향을 조사하였다.

## 2. 축-베어링계의 운동방정식

해석 대상 전동기의 회전축-베어링계는 Fig. 1과 같이 구름 베어링으로 양단 지지되는 축의 중심부에 질량 불평형을 갖는 회전자가 위치하고, 이 회전자의 중앙부에 전자기적 가진력이 작용한다. 회전축계의 동적 거동은 전자기적 가진력, 회전자의 질량 불평형에 의한 힘, 구름 베어링에 의해 발생하는 반력에 의해 영향을 받는다. 탄성 회전축의 휨 진동 해석을 위해 7개의 유한 요소로 이루어지는 회전축 및 2개의 구름 베어링으로 구성되는 해석 모델을 가정한다. 축-베어링계의 유한요소 해석에 있어서, 축의 회전 영향을 고려하기 위해 Rayleigh 빔 요소로 모델링하였다. Fig. 2 와 표시된 유한 축 요소의 모델링에서, 양단에서 절점  $i$  및  $i+1$  을 갖는 요소  $j$  의 운동방정식 행렬은 다음과 같이 표시된다<sup>(1)</sup>.

$$[M^e]\{\ddot{q}(t)\} + [C^e]\{\dot{q}(t)\} + [K^e]\{q(t)\} = \{F^e(t)\} \quad (1)$$

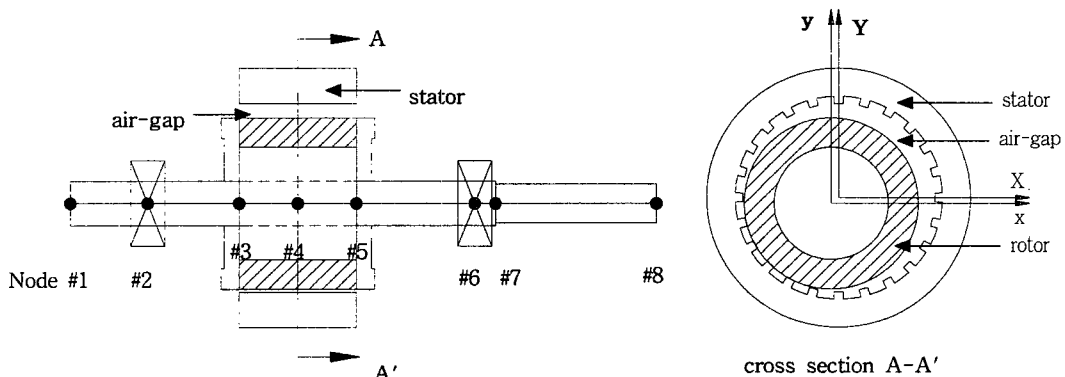


Fig. 1 Rotor-motor system configuration

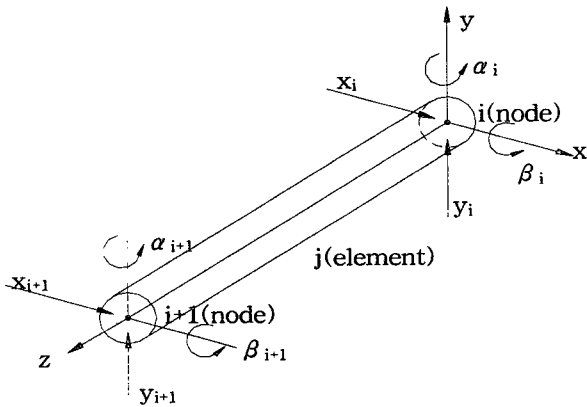


Fig. 2 Typical finite rotor element and coordinates

여기서,  $[M^s]$ 는 유한 축 요소의 질량 행렬,  $[C^s]$ 는 자이로 영향을 나타내는 행렬,  $[K^s]$ 는 강성 행렬을 표시한다.

회전축을 지지하는 이산화된 베어링 요소는 다음과 같이 모델링 된다.

$$[K^b]\{q(t)\} = \{F^b(t)\} \quad (2)$$

여기서,  $\{F^b(t)\}$ 는 베어링의 외부에서 작용하는 힘 벡터이고,  $[K^b]$ 는 구름 베어링의 강성행렬을 표시한다.

축-베어링계의 모든 요소에 대한 운동방정식의 행렬은 유한 축의 영역 요소 및 강제 원판의 불평형 하중과 지지 베어링 위치에서의 점 요소를 포함하여 유도된다. 해석 대상의 축-베어링계의 요소는 유한 축 및 구름 베어링이 조합되므로 식 (1), (2)을 결합하여 절점  $i$  및  $i+1$ 을 갖는 요소  $j$ 의 일반화된 운동방정식을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$[M_j]\{\ddot{q}(t)\} + [C_j]\{\dot{q}(t)\} + [K_j]\{q(t)\} = \{F(t)\} \quad (3)$$

여기서,  $\{F(t)\} = \{^R f_i | ^L f_{i+1}\}^T$ ,  $\{q(t)\} = \{x_i, y_i, \beta_i, \alpha_i | x_{i+1}, y_{i+1}, \beta_{i+1}, \alpha_{i+1}\}^T$ 는 절점  $i$  및  $i+1$ 에서 각각 일반화된, 시간에 따라 변동하는 힘 및 변위를 표시한다. 회전축에 작용하는 힘은 전동기 회전자의 질량 불평형에 의한 힘 및 전자기적 가진력을 포함한다. 절점  $i$ 는 요소  $j-1$ 과 요소  $j$ 의 공유점으로  $j-1$  요소의 오른쪽에 위치할 때  $^L f_i$ 로 표시하고,  $j$  요소의 왼쪽에 위치할 때  $^R f_i$ 로 한다. 그러므로,  $^R f_i(t)$ 는 요소  $j$ 의 왼쪽 절점에 작용하는 힘을,  $^L f_{i+1}(t)$ 는 같은 요소의 오른쪽 절점에서의 힘을 나타낸다. 또,  $[M_j]$ 는 유한 축의 질량 행렬,  $[C_j]$ 는 유한 축 요소의 자이로 영향을 나타내는 감쇠 행렬,  $[K_j]$ 는 축 및 지지 베어링의 강성이 결합된 행렬을

나타내고 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$[M_j] = \begin{bmatrix} (m_{11})_j & (m_{12})_j \\ (m_{21})_j & (m_{22})_j \end{bmatrix}, [C_j] = \begin{bmatrix} (c_{11})_j & (c_{12})_j \\ (c_{21})_j & (c_{22})_j \end{bmatrix},$$

$$[K_j] = \begin{bmatrix} (k_{11})_j & (k_{12})_j \\ (k_{21})_j & (k_{22})_j \end{bmatrix} \quad (4)$$

### 3. 전자기력 해석

이론적인 모델링을 위해 전동기 내의 전자기장을 준정적(quasi-static)이라 하며, 철의 자기 투자율(permeability)은 무한대로 가정한다. 즉, 자속밀도 해석시 철의 자기저항을 무시하고, 자기포화는 고려하지 않는다. 축방향으로 회전자의 철심표면이 평활(smooth)하므로 회전자 표면의 거칠기를 무시한다. Fig. 2에서와 같이 반경 반향의 전자기력만 고려하므로 슬롯의 영향은 무시된다(8, 9). 또한, 회전자의 진동만을 고려하기 위해 회전자에 비해 고정자를 강제로 고려한다.

Fig. 3은 BLDC 전동기의 회전자가 동적 편심을 가질 경우 자속밀도 해석을 위한 슬롯이 없는 내부 회전자 형태의 전동기 형상을 나타낸다.  $X-Y$  좌표계는 고정자 중심  $O_s$ 를 원점을 갖는 고정좌표계,  $x-y$  좌표계는 회전자의 중심  $O_r$ 을 원점으로 갖는 회전 좌표계를 각각 표시한다. 회전자가 편심되어 휘돌림 운동을 할 경우 고정좌표계와 회전 좌표계의 관계는 다음과 같다.

$$\xi = r - \varepsilon \cos(\theta - \phi) + O(\varepsilon^2) \quad (5)$$

$$\phi = \theta - \omega t + \frac{\varepsilon}{r} \sin(\theta - \phi) + O(\varepsilon^2) \quad (6)$$

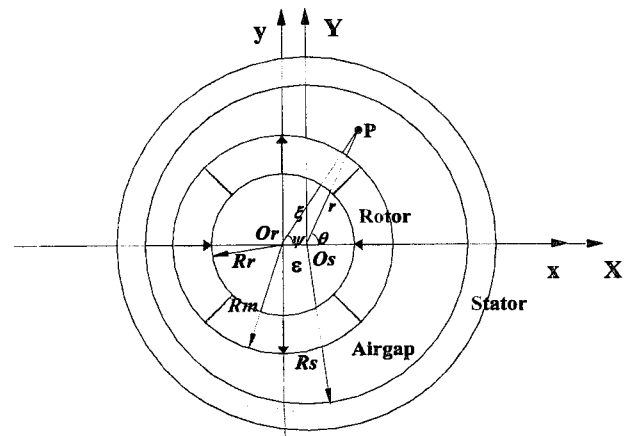


Fig. 3 Schematic of surface mounted BLDC motor with rotor eccentricity

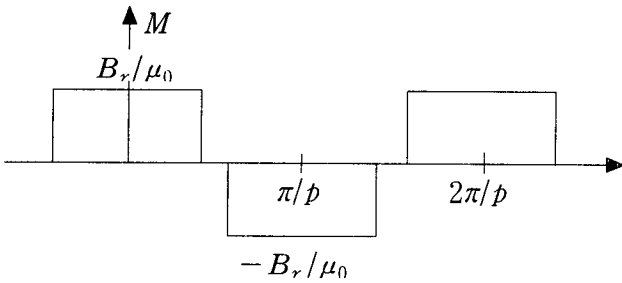


Fig. 4 Radial magnetization of permanent magnet

여기서,  $\epsilon$  는 고정 좌표계와 회전 회전자 이의 편심거리,  $\phi$  는 편심의 위상각이다.

Fig. 4와 같이 영구자석의 자화 상태를 반경 방향으로 자화되어 있다고 설정하면, 영구자석의  $\xi$  방향 자화분포량  $M_\xi$  를 푸리에 전개하면 다음과 같다<sup>(11)</sup>.

$$M_\xi = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} M_n \cos(np\phi) \quad (7)$$

여기서,  $p$ 는 극쌍수(pole pair)를 나타내고, 푸리에 계수

$$M_n = 2 \left( \frac{B_r}{\mu_0} \right) \alpha_p \frac{\sin \frac{n\pi\alpha_p}{2}}{\frac{n\pi\alpha_p}{2}} \text{이다. 또, } B_r \text{은 영구자석의}$$

잔류자속밀도,  $\mu_0$  는 공기의 자기 투자율,  $\alpha_p$  는 극 피치에 대한 극호의 비(pole-arc/pole-pitch)를 나타낸다.

전동기 내의 자계의 세기(magnetic intensity)  $H$  를 스칼라 포텐셜의 음의 구배로 정의할 수 있으므로 ( $H = -\nabla\Phi$ ), 맥스웰 자계 방정식으로부터 유도된 지배 방정식을 극좌표계로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \phi^2} = 0: \text{ 공극 영역} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \phi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \phi^2} = \frac{1}{\mu_r} \frac{M_\xi}{\xi} : \text{ 영구자석 영역} \quad (9)$$

여기서,  $\Phi_1, \Phi_2$ 는 각각 공극과 영구 자석에서의 스칼라 포텐셜,  $\mu_r$  은 영구자석의 비투자율(relative permeability)을 나타낸다.

전자기력의 유도하기 위해, 고정자와 회전자의 경계면에서 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H_{\phi,1}(\xi, \phi, \epsilon) + \frac{\epsilon}{\xi} \sin(\phi + \omega t - \phi) \cdot H_{\phi,2}(\xi, \phi, \epsilon) \Big|_{\xi=R_r} = 0 \quad (10)$$

$$H_{\xi,1}(\xi, \phi, \epsilon) \Big|_{\xi=R_r} - \cos(\phi + \omega t - \phi) = 0 \quad (11)$$

$$B_{\phi,1}(\xi, \phi, \epsilon) \Big|_{\xi=R_m} = B_{\phi,2}(\xi, \phi, \epsilon) \Big|_{\xi=R_m} \quad (12)$$

$$H_{\phi,1}(\xi, \phi, \epsilon) \Big|_{\xi=R_m} = H_{\phi,2}(\xi, \phi, \epsilon) \Big|_{\xi=R_m} \quad (13)$$

여기서,  $R_r$ 은 회전자의 내측 반경,  $R_m$ 은 회전자의 외측 반경,  $R_s$ 는 고정자의 내측 반경을 나타낸다. 지배 방정식 (8)과 (9)에 경계 조건 식 (10)~(13)을 고려하여 구한 해를 공극영역에서의 반경방향 자속밀도 분포로 표현하면 다음과 같다. 자세한 수식 유도과정은 참고문헌 (12)를 참고하면 된다.

$$B_{\xi,1}(\xi, \phi, \epsilon) = -\mu_0 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \{ npA_0(\xi^{np} - 1 + R_s^{2np}\xi^{-np-1}) \cos(np\phi) + \epsilon(np-1)(W_n \xi^{np-2} - X_n \xi^{-np}) \cos[(np-1)\phi - \omega t + \phi] + \epsilon(np+1)(Y_n \xi^{np} - Z_n \xi^{-np-2}) \cos[(np+1)\phi + \omega t - \phi] \} \quad (14)$$

여기서,

$$A_0 = \frac{\mu_0 M_n}{\mu_r} \cdot \frac{R_m^{-(np-1)}}{(np)^2 - 1} \cdot \left\{ \frac{(np-1)R_m^{2np} + 2R_r^{np+1}R_m^{np-1} - (np+1)R_r^{2np}}{\frac{\mu_r+1}{\mu_r} [R_s^{2np} - R_r^{2np}] - \frac{\mu_r-1}{\mu_r} [R_m^{2np} - R_s^{2np}(R_r/R_m)^{2np}]} \right\}$$

$$W_n = \frac{-npA_0 R_s^{2np-2} \{ (1+\mu_r)R_m^{2np-2} - (1-\mu_r)R_r^{2np-2} \}}{(1+\mu_r)(R_r^{2np-2} - R_s^{2np-2})R_m^{2np-2} - (1-\mu_r)(R_m^{4np-4} - R_r^{2np-2}R_s^{2np-2})}$$

$$X_n = \frac{-npA_0 R_m^{2np-2} R_s^{2np-2} \{ (1-\mu_r)R_m^{2np-2} - (1+\mu_r)R_r^{2np-2} \}}{(1+\mu_r)(R_r^{2np-2} - R_s^{2np-2})R_m^{2np-2} - (1-\mu_r)(R_m^{4np-4} - R_r^{2np-2}R_s^{2np-2})}$$

$$Y_n = \frac{-npA_0 R_s^{2np} \{ (1+\mu_r)R_m^{2np+2} - (1-\mu_r)R_r^{2np+2} \}}{(1+\mu_r)(R_r^{2np+2} - R_s^{2np+2})R_m^{2np+2} - (1-\mu_r)(R_m^{4np+4} - R_r^{2np+2}R_s^{2np+2})}$$

$$Z_n = \frac{-npA_0 R_m^{2np} R_s^{2np} \{ (1-\mu_r)R_m^{2np+2} - (1+\mu_r)R_r^{2np+2} \}}{(1+\mu_r)(R_r^{2np+2} - R_s^{2np+2})R_m^{2np+2} - (1-\mu_r)(R_m^{4np+4} - R_r^{2np+2}R_s^{2np+2})}$$

이다.

식 (14)를 고정좌표계에 대해 좌표 변환하여 정리하면 고정좌표계에 대한 자속밀도 분포는 다음과 같다.

$$B_r(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (np)A_0 (r^{np-1} + R_s^{2np} r^{-np-1}) \cdot \cos[np(\theta - \omega t)] + \epsilon \sum_{n=1,3,5,\dots} [np \frac{A_0}{2} \{ (2-np)r^{np-2} + npR_s^{2np} r^{-np-2} \} - \mu_0(np-1)(W_n r^{np-2} - X_n r^{-np})] \cdot \cos[(np-1)\theta - np\omega t + \phi] + \epsilon \sum_{n=1,3,5,\dots} [np \frac{A_0}{2} \{ -npr^{np-2} + (np+2)R_s^{2np} r^{-np-2} \} - \mu_0(np+1)(Y_n r^{np} - Z_n r^{-np-2})] \cdot \cos[(np+1)\theta - np\omega t + \phi] \quad (15)$$

식 (15)에서와 같이 회전자 편심에 기인하는 공극의 변동은 공극 퍼미언스를 변화시켜 전동기내의 자속밀도 분포를 변화시키게 된다. 회전자 표면에 작용하는 반경방향의 전자기 국부 견인력(magnetic local traction)은 맥스웰 응력 텐서(Maxwell stress tensor)를 고정자 표면에 대해서 구하고, 철의 자기투자율이 무한대라고 설정한 가정을 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_r = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (16)$$

일반 직교 좌표계(generalized cartesian coordinate system)를 이용하여 회전자 표면에 작용하는  $x, y$ 방향의 국소 전자기 국부 견인력은 다음과 같다.

$$f_x = f_r \cos \theta, \quad f_y = f_r \sin \theta \quad (17)$$

회전자 중앙부에 작용하는 전자기적 전체 작용력(electromagnetic global forces)  $F_{x, mag}, F_{y, mag}$ 는 전자기 국소 견인력을 회전자 표면에 대해 적분함으로써 계산할 수 있다.

$$F_{x, mag} = \int_0^{2\pi} f_x r d\theta, \quad F_{y, mag} = \int_0^{2\pi} f_y r d\theta \quad (18)$$

식 (16)에 자속밀도의 식 (15)를 대입한 후, 식 (17)을 이용하여 직교 좌표  $x, y$ 방향의 성분을 각각 계산할 수 있다. 이 결과를 식 (18)에 대입하여 삼각함수의 직교성을 이용하여 적분과정을 계산하면, 회전자 중앙부에 작용하는 전자기적 전체 작용력은 다음과 같다.

$$F_{x, mag} = \frac{\pi R_s L_s \epsilon}{2\mu_0} \sum_n (A_n B_n + A_n C_n) \cos \phi \quad (19)$$

$$F_{y, mag} = \frac{\pi R_s L_s \epsilon}{2\mu_0} \sum_n (A_n B_n + A_n C_n) \sin \phi$$

여기서,  $A_n = (np) A_0 (r^{np-1} + R_s^{2np} r^{-np-1})$ ,  $B_n = [np \frac{A_0}{2} \{(-2-np)r^{np-2} + np R_s^{2np} r^{-np-2}\} - \mu_0(np-1)(W_n r^{np-2} - X_n r^{-np})]$ ,  $C_n = [np \frac{A_0}{2} \{2-np r^{np-2} + (np+2) R_s^{2np} r^{-np-2}\} - \mu_0(np+1)(Y_n r^{np} - Z_n r^{-np-2})]$ ,  $L_s$ 는 적층길이이다. 식 (19)에서 회전자의 동적 편심에 의해 야기되는 전자기력은 회전자의 편심거리에 선형적으로 비례함을 알 수 있다. 따라서, 식 (1)에서 전자기력을 고려하면 전동기 시스템의 강성은 감소하게 됨을 확인할 수 있다. 또한, 정적 편심에서 회전자의 회전에 따라 전자기력은 변

화는 없고, 회전자가 고정자의 중심을 회전속도로 회전할 경우 그 가진 주파수는 회전주파수로 가진하게 됨을 확인할 수 있다.

#### 4. 유한요소-전달행렬법의 적용

FE-TM방법에서, 임의의 시간  $t$ 의 요소 절점  $i$ 에서의 자유도의 가속도 및 속도는 적절한 정도를 가지면서 변위  $\{q_i(t)\}$ 의 선형적 함수로서 다음과 같이 표시된다.

$$\{\ddot{q}_i(t)\} = A(t) \cdot \{q_i(t)\} + \{B_i(t)\} \quad (20)$$

$$\{\dot{q}_i(t)\} = D(t) \cdot \{q_i(t)\} + \{E_i(t)\} \quad (21)$$

여기서,  $A(t), D(t), \{B_i(t)\}, \{E_i(t)\}$ 의 값은 적분방법에 따라 다양하게 정의되며, 요소 운동방정식의 시간 미분량을 대신한다. 식 (20), (21)을 (4)에 대입하여 유도되는 방정식을 유한 요소  $j$ 의 행렬의 항으로 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} (K_{11})_j & (K_{12})_j & (v_1)_j \\ (K_{21})_j & (K_{22})_j & (v_2)_j \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i(t) \\ q_{i+1}(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^R f_i(t) \\ {}^L f_{i+1}(t) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

여기서,

$$(K_{11})_j = A(t) \cdot (m_{11})_j + D(t) \cdot (c_{11})_j + (k_{11})_j$$

$$(K_{12})_j = A(t) \cdot (m_{12})_j + D(t) \cdot (c_{12})_j + (k_{12})_j$$

$$(K_{21})_j = A(t) \cdot (m_{21})_j + D(t) \cdot (c_{21})_j + (k_{21})_j$$

$$(K_{22})_j = A(t) \cdot (m_{22})_j + D(t) \cdot (c_{22})_j + (k_{22})_j$$

$$(v_1)_j = (m_{11})_j \cdot \{B_i(t)\} + (m_{12})_j \cdot \{B_{i+1}(t)\}$$

$$+ (c_{11})_j \cdot \{E_i(t)\} + (c_{12})_j \cdot \{E_{i+1}(t)\}$$

$$(v_2)_j = (m_{21})_j \cdot \{B_i(t)\} + (m_{22})_j \cdot \{B_{i+1}(t)\}$$

$$+ (c_{21})_j \cdot \{E_i(t)\} + (c_{22})_j \cdot \{E_{i+1}(t)\}$$

절점  $i$ 에서 다음의 평형 방정식이 성립한다.

$${}^R f_i(t) + {}^L f_i(t) = f_i^{ext}(t) \quad (23)$$

여기서,  $f_i^{ext}(t)$ 는 절점  $i$ 에 작용하는 일반화된 힘을 나타낸다. 식 (22), (23)에서 요소  $j$ 의 오른쪽 절점  $i+1$ 에서의 변위 및 힘을 왼쪽 절점  $i$ 의 전달행렬 관계식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} q_{i+1}(t) \\ {}^L f_{i+1}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -(K_{12})_j^{-1}(K_{11})_j & -(K_{12})_j^{-1} & (s_1)_j \\ (K_{21})_j & -(K_{22})_j & (K_{12})_j^{-1}(K_{11})_j - (K_{22})_j & (K_{12})_j^{-1} & (s_2)_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_i(t) \\ {}^L f_i(t) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

여기서,  $(s_1)_j = (K_{12})_j^{-1} \cdot [f_i^{ext} - (v_1)_j]$   
 $(s_2)_j = (K_{22})_j - (K_{12})_j^{-1} \cdot [f_i^{ext} - (v_1)_j] + (v_2)_j$  이다.

일반적인 축-베어링계의 유한요소 모델링의 경우, 식 (24)는 절점  $i+1$ 의 상태벡터는 유한 요소  $j$ 의 전달행렬  $[T(t)]_j$  및 절점  $i$ 의 상태벡터의 곱으로서 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\{u(T+\Delta t)\}_{i+1}^L = [T(t)]_j \cdot \{u(T+\Delta t)\}_i^L \quad (25)$$

전달행렬 관계식 (25)의 반복적인 적용으로 전체 축-베어링계에 관한 다음의 전달 관계식을 구할 수 있다.

$$\{u\}^L = [T]_n \cdot [T]_{n-1} \cdots [T]_2 \cdot [T]_1 \cdot \{u\}^{L_1} \quad (26)$$

전동기 회전축의 양쪽 끝이 자유단이므로 경계조건은 다음과 같이 가정하였다.

$${}^L f_1(T+\Delta t) = 0, \quad {}^L f_n(T+\Delta t) = f_n^{ext}(T+\Delta t) \quad (27)$$

### 5. 해석 결과

유한요소 전달행렬법을 이용하여 전자기적 불평형력을 고려한 편심 회전자 및 탄성 회전축-베어링계로 구성되는 BLDC 전동기의 동적 거동을 해석하였다. 해석 대상의 전동기는 드럼식 세탁기용으로, 10000 rpm의 정속으로 운전되는 모델이다. Table 1은 해석 대상 전동기의 양을 나타내고, 회전축의 단면 직경의 변화에 따라 7개의 요소로 나누어 모델링 하였으며 그 제원은 Table 2와 같다. 구름 베어링의 강성계수는  $K_{xx}, K_{yy}$ 의 값이 지배적이고, 2개의 베어링은 같은 조건으로 하여  $K_{xx} = K_{yy} = 1.0 \times 10^9 \text{ N/m}$ 의 값으로 하였다. 또, 회전축의 탄성계수  $E_s = 1.6 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ , 전동기 회전자의 탄성계수는  $E_m = 1.2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 로 하였다.

Table 1 Data for BLDC motor

Airgap length (g)	0.0006 m
Radius of rotor (R <sub>m</sub> )	0.0344 m
Pole pair (p)	2
Magnet remanent flux density (B <sub>r</sub> )	0.4T
Pole-arc/pole-pitch ratio (α <sub>p</sub> )	1
Relative permeability of PM (μ <sub>r</sub> )	1.061

Table 2 Rotor configuration data

Element number	Mass(kg)	Length(mm)	Radius(mm)
1	0.041	30	7.5
2	0.042	30.5	7.5
3	0.499	19.5	34.4
4	0.499	19.5	34.4
5	0.054	39.5	7.5
6	0.01	7	7.5
7	0.065	54	7.0

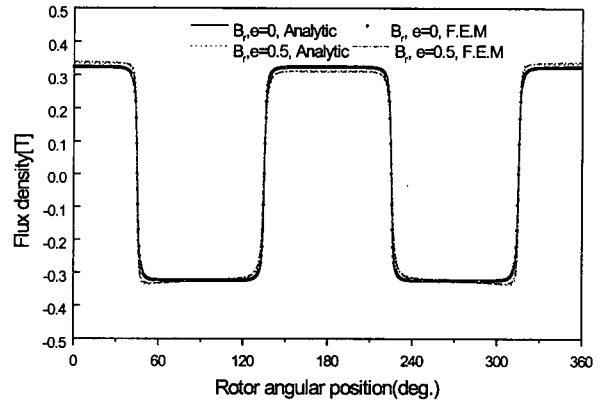


Fig. 5 Radial flux density on the rotor surface

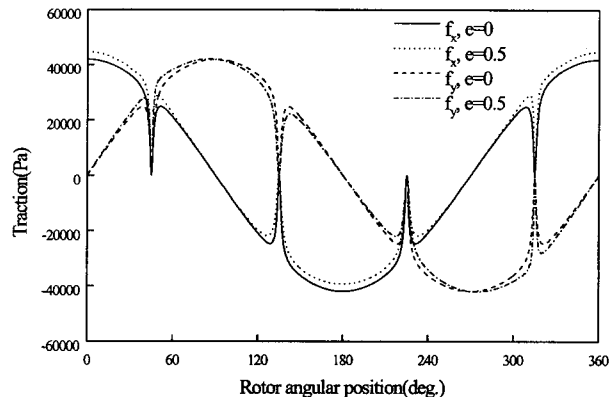


Fig. 6 Magnetic local traction on the rotor surface

Fig. 5 는 0.6mm의 균일 공극에 대하여 회전자의 편심률( $e$ =편심거리/공극길이)이 0.5와 편심이 없을 경우에 대해 각각 식 (15)를 이용하여 해석적으로 산정한 반경방향 자기 자속밀도와 그 검증을 위해 유한요소법을 이용하여 구한 결과를 도시하고 있다. 해석적 산정 결과와 유한요소법의 해석결과는 비교적 잘 일치함을 알 수 있다. Fig. 6 은 식 (16)을 이용하여 계산한 회전자 표면에 작용하는 전자기 극소 견인력을 회전자의 위치각에 대하여 도시하고 있다. 회전자가 동심 위치에서 벗어남에 따라, 공극이 좁게 되어진 측에서는 전자기 견인력은 더욱 강하게 되고, 넓어진 측에서는 반대로 감소하게 된다. 즉, 전자기력은 항상 좁은 공극 방향으로 작용함을 알 수 있다.

Fig. 7은 식 (19)에서 전자기 극소 견인력을 적분하여 산정한 전자기력의 최대 크기를 편심거리에 대해 나타내고 있다. 해석결과와 유한요소법에 의한 결과는 비교적 잘 일치하였다. 또한, 편심거리가 증가함에 따라 두 방법의 결과

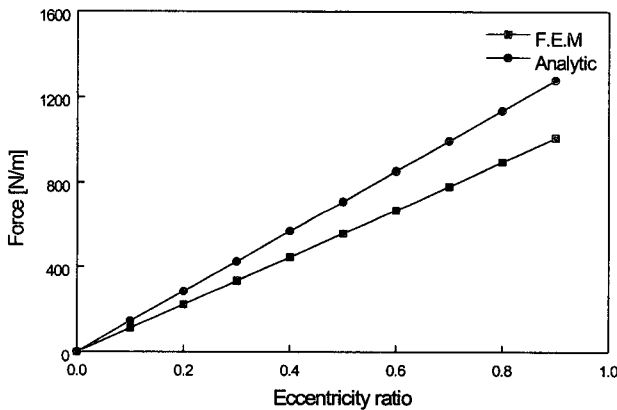


Fig. 7 The maximum magnitude of the magnetic global forces

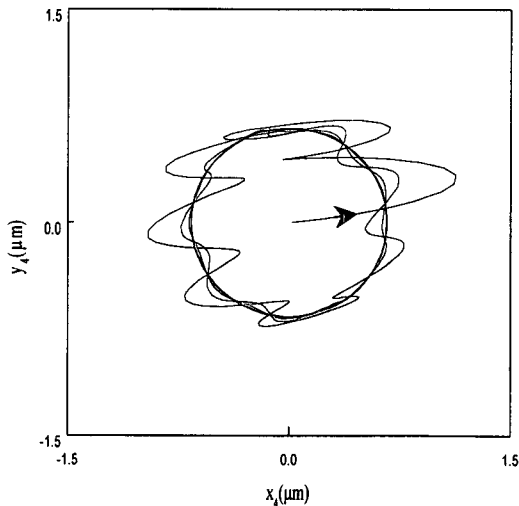


Fig. 8 Transient response of motor rotor at station #4 with no eccentricity(10000 rpm)

는 다소 차이가 있지만, 편심율에 따른 전자기력은 두 경우 모두 선형적으로 증가함을 보였다.

회전축-구름 베어링계의 동적 해석에서, 계산과정의 수렴은 시간 간격  $\Delta T=5 \times 10^{-5}$  s에서 얻어지고 수렴되는 궤적의 형태는 절점 # 4에서 Fig. 8과 같다. 원점 부근의 초기값에서 시작하여 4주기 이후 안정적인 원형 궤적의 형태를 나타내며, 안정적으로 수렴될 때까지 궤적이 변동되는 양상은  $\Delta T$ 에 따라 변하지만 수렴된 궤적의 형상 및 크기는 동일하였다.

해석 대상의 전동기는 회전자의 양 끝단 위치인 # 3 및 # 5의 절점에서 반경  $r_e=27.5$ mm의 불평형 질량  $m_e=150$ mg 이 존재한다. 절점 # 4에서 불평형 질량에 의한 하중 및 잔자기적 가진력을 고려하고 공극에서 회전자의 어긋남이 없는 경우, 구름 베어링으로 지지된 회전축계의 동적 휘들림 거동은 Fig. 9 와 같다. 결과에서 보듯이, 궤적의 크기는 전동기 회전축의 양단 # 1, # 8 에서 크게 나타난다. 궤적의 중심과 까만점으로 표시된 크랭크 각도  $0^\circ$ 의 시작점 이의 위상각은 각 절점에 따라 변화되

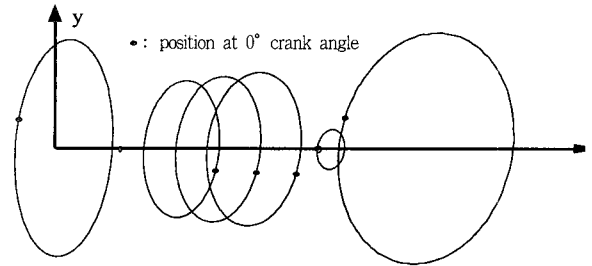


Fig. 9 Steady state orbital plots along the rotor axis with no eccentricity(10000 rpm)

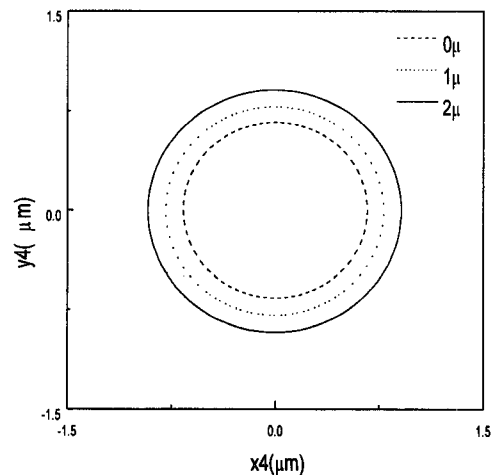


Fig. 10 Comparison of rotor orbits in the station #4 variation in magnitude of eccentricity(10000 rpm)

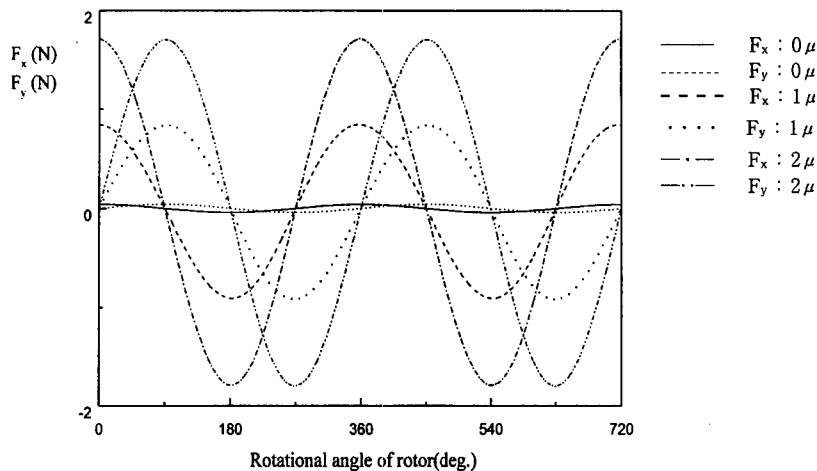


Fig. 11 Unbalanced magnetic forces in the station #4 variation in magnitude of rotor eccentricity

고, 지지 베어링을 경계로 하여 위상각이 180° 만큼 증가 되는 것을 볼 수 있다. 즉, 절점 # 1, 2의 위상각도는 177° 이고, 절점 # 3, 4, 5의 각도는 357° 이고, 다시 절점 # 6, 7, 8의 각도는 177° 이다. 전동기 회전자가 공극의 중심에서 어긋난 위치에 있는 경우 전자기적 가진력이 발생되고 이 하중에 의한 축 중심의 휘돌림 변화를 조사하기 위해 절점 # 3 및 5에서의 불평형 하중의 조건은 고정된 상태에서 절점 # 4에서의 회전자의 편심량  $x_e = 1 \mu$ ,  $y_e = 1 \mu$  및  $x_e = 2 \mu$ ,  $y_e = 2 \mu$  으로 변화시켰다. 이 조건에서, 절점 # 4에서의 휘돌림 궤적을 Fig. 10에서 나타내었으며, 그림에서 보듯이 편심량이 증가함에 따라 휘돌림 궤적이 증가한다. 즉, 회전자가 공극의 중심에 있는 경우에 비해 편심량  $x_e = 1 \mu$ ,  $y_e = 1 \mu$  의 어긋난 위치에 있는 경우 휘돌림의 크기는 17.7 % 증가하였으며, 편심량  $x_e = 2 \mu$ ,  $y_e = 2 \mu$  의 어긋난 위치의 조건에서 36.9 % 증가하였다. 회전자의 편심량의 증가에 따라 전동기의 전자기적 불평형 힘  $F_{x, mag}$ ,  $F_{y, mag}$  도 Fig. 11 과 같이 증가되었다. 즉, 회전자의 질량 불평형의 기계적 가진력 및 회전자가 공극 중심에서 어긋난 위치에 있는 경우 전자기적 가진력은 회전축의 휘돌림 운동을 발생시킨다. 이 운동은 전동기 내의 공극을 변동시켜 회전자 표면에 작용하는 전자기력을 발생시키고, 이 전자기력은 다시 회전축의 휘돌림 운동에 영향을 미친다.

## 6. 결 론

BLDC 전동기에서 기계적 불평형에 의해 발생하는 편심 회전자의 불평형 전자기력을 섭동법을 이용하여 해석적

으로 유도하였다. 유한요소-전달행렬법 및 Houbolt 적분방법을 이용하여 축-베어링계의 불평형 전자기력과 기계적인 가진력의 연성효과를 고려하여 편심된 위치에 있는 회전자의 과도 동적 거동을 해석하였다. 또, 불평형 전자기력의 해석적 결과와 유한요소해석 결과와의 비교를 통하여 그 계산결과가 잘 일치함을 확인하였다. 탄성 회전축-베어링 모델에 대해 기계적 가진력 및 회전자의 공극 중심에 어긋난 위치에 있을 때 발생하는 전자기력을 고려하여 과도 응답을 해석하였다. 편심된 위치에 있는 회전자에 기인한 불평형 전자기력은 전체 축계의 강성을 감소시켜 휘돌림 궤적을 증가시킨다. 즉, 회전자가 공극의 중심에 있는 경우에 비해 편심량  $x_e = 1 \mu$ ,  $y_e = 1 \mu$  의 어긋난 위치에 있는 경우 휘돌림의 크기는 17.7 % 증가하였으며, 편심량  $x_e = 2 \mu$ ,  $y_e = 2 \mu$  의 어긋난 위치의 조건에서는 36.9 % 증가하였다.

## 후 기

이 논문은 1998년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음. (KRF 1998-018-E00095)

## 참고문헌

- (1) Nelson, H. D. and McVaugh, J. M., 1976, "The Dynamics of Rotor-Bearing Systems using Finite Elements," J. Eng. For Industry, Vol. 98, pp. 593~600.
- (2) Özgüven, H. N. and Z. L. Özkan, 1984, "Whirl Speeds and Unbalance Response of Multi-bearing Rotors Using Finite Elements," J. of Vibration,



Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Trans. ASME, Vol. 106, pp. 72~79.

(3) Rahman, B. S. and Lieu, D. K., 1991, "The Origin of Permanent Magnet Induced Vibration in Electric Machines," J. of Vibration and Acoustics, Trans. ASME, Vol. 113, p. 476.

(4) Subbiah, R. and Kumar, A. S., 1988, "Transient Dynamic Analysis of Rotors Using the Combined Methodologies of Finite Elements and Transfer Matrix," Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 55, pp. 448 ~ 452.

(5) Swam, S. A., 1963, "Effect of Rotor Eccentricity on the Magnet Field in Air-Gap of a Non-Salient Pole Machine," Proc. IEEE Vol. 110, No. 5, pp. 903~905.

(6) Bradford, M., 1968, "Unbalanced Magnetic Pull in a 6~pole Induction Motor," IEE Proc. Vol. 115, No. 11, pp. 1619~1627.

(7) Dorell, D. G., 1996, "Calculation of Unbalanced Magnetic Pull in Small Cage Induction Motors with Skewed Rotors and Dynamic Rotor Eccentricity," IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 11, No. 3, pp.

483~488.

(8) 양보석, 손병구, 1998, "불평형 전자기력에 의한 유도전동기의 회전자의 안정성해석," 한국소음진동공학회지, 제 8권, 6호, pp. 1086~1092.

(9) Jang, G. H., and Lieu, D. K., 1991, "The Effect of Magnet Geometry on Electric Motor Vibrations," IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 27, pp. 5202~5204.

(10) Chao, Z. J. Liu and Low, T. S., 1996, "Unbalanced Magnet Pull in PM Synchronous Machines-Its Relation with Stator Teeth and Armature Winding," Proceedings of IMCSD 25th Annual Conference, pp. 79~84.

(11) Zhu, Z. Q., 1993, "Instantaneous Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent Magnet DC Motors, Part I: Open-Circuit Field," IEEE Trans. On Magnetics, Vol. 29, No. 1, pp. 124~134.

(12) Untae Kim and Dennis K. Liu, 1998, "Magnetic Field Calculation in Permanent Magnet Motors with Rotor Eccentricity: Without Slotting Effect," IEEE Trans. On Magnetics, Vol. 34, No. 4, pp. 2243~2252.