

QUADTREE 격자를 이용한 수치모델의 연구

박구용 (현대건설(주) 토목 설계실)

수치적 방법에 의해 미분방정식을 풀 때 국부적으로 적합화된(Adapted) 격자를 세분하기 위해서는 효율적인 격자 생성 기술이 요구된다. 본 연구에서는 계층적(Hierarchical) 4면 구조의 엇갈린 배치(Staggered) 구조 격자를 파랑과 흐름의 상호작용에 대한 수치모델에서 사용하였다. 4면 구조 격자 생성은 초기의 정방형을 4분면으로의 반복된 분할을 초래한다. 4면 구조의 데이터는 격자 정보를 저장하고 이웃에 대한 분별을 용이하게 한다. 격자 적합은 이동 경계 영역(예, Wet-Dry Zone)이나 파고와 같은 국부적 흐름 특성을 모델화하는데 사용함으로써 수행된다.

1. 서론

사각 혹은 균등 Curvilinear Boundary-fitted 격자(구조화된 격자)들로 이루어진 상용되는 수치모델은 해안선과 같이 복잡한 지형에 적용하여, 특히 상세한 흐름 양상과 같이 고 해상도의 정확한 해를 구하기 위해서는 계산적으로 매우 비효율적이다. 그러므로 관심 없는 지역에서는 요구되지 않으나 관심 지역에 있어서 국부적인 격자의 세밀을 위해서는 효율적이고 강력한 격자 생성 기술이 꼭 필요하다.

비구조화 된 전면 전진(Advancing front) 혹은 Voronoi 격자들은 지역적으로 복잡한 형상을 개략화시키는데 사용되어 왔다(예, Anastasiou와 Chan 1977, George 1990). 하지만 절점 지수 체계가 극히 조잡하고 절점 순서의 재배치를 종종 요구한다. 그렇

기 때문에 프로그램이 매우 어색하게 될 수 있다.

계층조직(Hierarchical)의 이러한 격자들은 자동적으로 단순한 영역 분할에 의해 만들어진다. 격자 정보는 격자가 극도로 비규칙적이라도 구조 안에 보유된다. 본 연구에서 사용된 계층조직의 4면 격자는 2차원에서 경계나 흐름에 대한 씨앗 점(Seeding Point) 데이터에 의해서 작고 같은 크기의 4면의 사각형으로 연속적으로 초기 정방형을 분할하는 것에 근거를 둔다. 그와 같은 격자들은 씨앗 점 데이터 군이 존재하는 지역에 높게 분포되고 다른 곳은 드물게 형성되게 된다.

격자의 진화는 계산의 수행보다 먼저 알 수 없기 때문에, 흐름의 해가 충분히 풀릴 때까지 격자가 동적으로 적합화 되는 것이 중요하다. 그렇게 함으로써 격자들의 재 생성은 빈번히 이루어지게 된다.

회귀 및 반복적인 구조로 인하여 4면 구조의 이웃 격자를 분별함으로써 찾아지게 된다. 반복적으로 연계된 목록 데이터 구조는 효율성을 개선하기 위해 사용된다. 하지만 이 격자들은 걸려져 있는(Hanging) 절점을 처리하기가 쉽지 않은 한계를 가지고 있다. 걸려진 상황이란 작은 격자의 교점이 근처의 큰 격자의 전면에 놓여져 있을 때 일어나게 되는데, 이것은 편미분 방정식을 모델화하는데 문제를 야기시킨다. 또한 이러한 격자들은 경계에 맞출 때 격자가 경계에 가깝게 인접하여 높게 세밀화 되더라도 아주 정확하지는 않는 한계가 있다.

2. 기존 적용 사례

사변 격자의 알고리즘은 Samet(1982)에 의하여 컴퓨터 像 처리에 맨 먼저 사용된 이래로 다양한 수치 문제에 적용되어 왔다. 계산 측면에서 보면 4면 격자들은 일반적으로 Curvilinear 격자나 비구조화 된 격자보다 싸고 쉽게 복잡한 지형에 적용될 수 있다.

Yerry와 Shephard(1983)은 구조 분석을 위해 삼각형 격자를 가진 4면 격자 알고리즘에 근간을 둔 유한 차분법을 사용하였다. Evans(1991)등은 FVM(Finite Volume Method)으로 압축성 비점성 흐름을 해석하는데 적용하였고 우주 항공 역학에 대해 정확한 해를 구하였다. 더더욱, Schmidt(1991)과 Evans(1993)은 또한 충격파를 모의화 하였다. Van Dommelen 과 Rundensteiner(1989)는 Cylinder 배후 흐름 해석을 위해 Lagrangian 방식으로 와류 해석에 이용하여 적합화된 4면 구조 격자에서 2차원적 Stream Function Poisson 방정식을 푸는데 사용하였다.

Gaspar(1991)등 과 Jozsa & Gaspar(1992)는 오염물질의 이동 Lagrangian 모델에 4면 격자 구조 기술을 사용하였고(예, Convective-Diffusion 문제), 다 격자 반복을 이용하여 복잡한 지형의 천해에서 바람에 의해 야기된 정상 수평 흐름을 모의화 하는데 사용되었다. Young(1991) 등은 포텐셜 흐름에 대해 Quadrilateral 와 육각 구조를 사용하였다. De Zeeuw 와 Powel(1993)은 Euler 방정식을 FVM에 의해 계층적인 4면 격자에서 풀었다. 부과적으로 Van der Maarel(1993)은 Euler 방정식에 대해서 계층적인 격자 세분 알고리즘을 제안하였다. 근래에 Yiu(1996)등은 연계된 목록(Linked List)와 2분 체계(Binary System), 그리고 유한 차분 형식의 참고 체계(Finite-Diffence-Type Referencing System)에 기준한 여러 가지 4면 격자 데이터 구조의 숫자 매김의 체계들을 비교하였고, 데이터 접근의 효율성 때문에 연계 목록 방법을 추천하였다.

격자 분포와 격자 농축(Enrichment)은 격자 적합화에 대한 중요한 접근들이다. Navier-Stokes 방

정식을 풀기 위하여 Patel(1995) 등은 격자 적합화와 Curvilinear 격자들을 잘 분포하는 기술을 고려하였고, 초기 미세 격자는 적합화를 위해 어떤 최소한의 세밀도를 가져야 한다고 결론하였다. 구조화(Structure)된 격자에 대해서 지역적으로 농축된 격자로부터 정보를 얻기는 쉽지 않다. 그러나 4면 격자 구조는 격자 농축과 밀집에 아주 알맞다. 이와 같은 격자 적합화는 여러 참고 문헌에서 잘 설명 되어져 있다.(예, Evans등 1991, Van Dommelen & Rundensteiner 1989, 그리고 Gaspar 1991).

최근에는 Greaves(1995)는 적합화된 4면 격자를 사용하여 Cylinder 배후에 생기는 분기된 층류 흐름에 대하여 Navier-Stokes 방정식을 풀었다. Saalehi(1996)는 FEM에 삼각 격자에 기초한 적합화된 4면 구조를 사용하였다. Borthwick(1997)은 4면 격자에서 완경사 방정식을 풀었는데, 이것은 Berkhoff 등에 의해 제공된 실험 데이터와 비교하여 좋은 일치치를 보였다. 또한 Cruz(1997)은 4면 격자 체계에서 멕시코에 있는 Nichupte 연안 Lagoon에서 바람에 의한 순환을 예측하기 위해 천해방정식(Shallow Water Equation)을 사용하였다.

3. 4면 격자 생성

3.1 계층화된 격자 알고리즘

4면 구조 격자의 생성은 단위 사각형에서 모두 이루어진다. 그 사각형은 4개의 똑같은 크기의 4면으로 나누어진다. 예제는 그림 1.에 나타나 있는데, 이것은 전형적인 씨앗 점의 무리를 가진 1차 레벨의 분할 후의 격자를 보여주고 있다. 각 격자는 똑같은 크기의 4개의 작은 격자로 나누어지고 이 과정은 각 격자가 정해진 한계치를 만날 때까지 연속적으로 되풀이 되어진다. 이 한계치란 각 격자가 한 개 이상의 씨앗 점을 포함하는 것을 허용하지 말아야 하는 것인데, 그렇지 않으면 그림 2.에서 보는 바와 같이 격자는 더 분할하게 된다. 그러므로 해상도는 대상영역 내에서 직접적으로 씨앗 점에 의해 제어된다.

초기 격자 세분으로 그들의 접하고 있는 모서리에

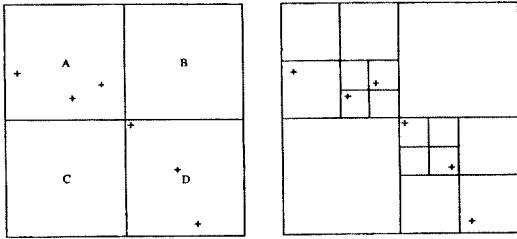


그림 1. 1차 레벨 분할 후 사면 그림 2. 3차 레벨 분할 후 사면 구조 격자

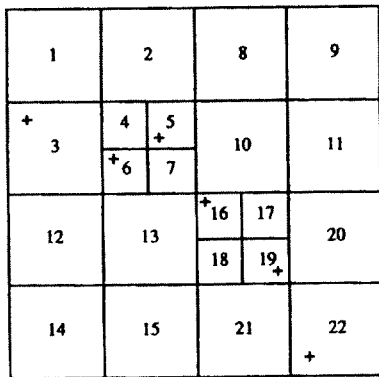


그림 3. 제어된 4면 구조 격자

걸려져 있는 절점(Hanging Node)에 다른 크기의 이웃 격자가 생길 수 있다. 그림 2.에서 걸려져 있는 절점은 3차 레벨이 1차 레벨의 격자에 인접하거나, 한 격자의 교점이 이웃 격자의 모서리에서 만나는 곳에 일어난다. 복잡한 개략화는 편미분 방정식을 모델화할 때 걸려진 절점을 다룰 때 필요하다. 그래서 인접한 격자를 통과하는 Flux를 다룰 때 특히 주의를 기울여야 한다. 이렇게 함으로써 보존의 법칙이 정확하게 유지될 수 있다. 그렇기 때문에 기하의 형태에서 걸려져 있는 점의 숫자의 최소화가 요구된다. 이러한 이유로 2:1 법칙을 적용 함으로써 4면 격자의 생성을 제어할 수 있다. 이것은 대상 격자와 이웃 격자의 1차 레벨 이상의 세분 차이를 제한할 수 있다. 이 비율이 적용된 격자는 그림 3.에서 보여주고 있다. 또한 격자에서의 구멍(Hole)은 국부적 모델화의 Error를 줄이기 위하여 제거 될 수 있다. 여기서 구멍이란 뜻은 1차 레벨 높은 이웃 격자에 의해 두개 혹은 세 개의 격자들에 둘러 쌓여 있을 때를 가리킨

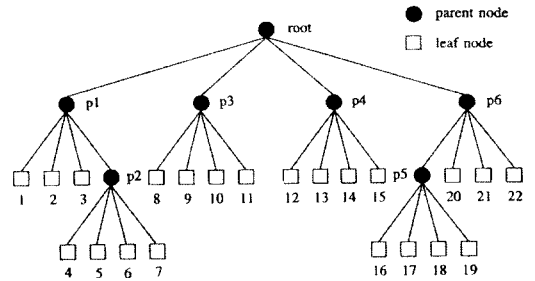


그림 4. 그림 3의 4면 구조 격자에 상응한 계통도

다. 그림 4.는 그림 3.의 제어된 4면 격자에 따른 구조를 표현하고 있다. 순서 매김은 좌측 면부터 시작 된다.

3.2 데이터 구조와 이웃 발견

계층화된 4면 구조는 여러 데이터 저장 기술에 의해 설정될 수 있다. 예를 들면 Yiu(1996)등은 세 가지의 데이터의 저장 방법을 기술하였다. 그 세 가지는 앞서 기술한 바와 같이 연계 목록 접근 방법, Binary 체계방법, 유한 차분 형식 참고 방법들이 있다. 본 연구에서는 Yiu 등이 설명한 바와 같이 기억 Pointer를 사용함으로써 데이터 처리에 효율성을 개선시킬 수 있는 연계 목록 방법이 채택되었다. 이 연계 목록 방법은 C 언어로 프로그램 되어졌다. 각 연계는 대상 격자로부터 그의 부모 격자와 그 분할된 격자로 Pointer에 의해 만들어진다. 그래서, 모든 격자는 뿌리(Root)까지의 가계도의 길(Path)을 앞으로 써 분별된다.

m 의 level이고 k 번째 격자인 가계 길은 $\{c_1, \square, \square, c_m\}$ 과 같이 정할 수 있고 여기서 $(c_i, 0(1, 2, 3, 4), = 1, 2, \square, m)$. 격자의 고유 식별 숫자 (n_k)는 다음식으로부터 구할 수 있다.

$$n_k = c_1 5^{m-1} + c_2 5^{m-2} + \dots + c_{m-1} 5 + c_m (m > 1)$$

뿌리 격자 (0의 레벨)의 분별 숫자는 '0'으로 놓는다. 분별 숫자를 5으로 계속하여 나눔으로서 가계도는 나머지에 의해 탐색 될 수 있다. 분별 숫자는 4 바이트에 부호가 없는 정수로서 저장한다. 여기서 허

락된 분할의 최대 레벨은 26이다.

어떤 주어진 대상 격자의 이웃 격자를 분별하도록 하는 것은 매우 중요하다. 이웃의 격자가 다른 사분면에 있을 때, 그 격자들은 가계도 안에서 서로가 떨어져서 연결 되어있다. 이것은 근접 공통 조상(Nearest Common Ancestor)이라 부르며 가계도 조사에 중요한 열쇠가 된다. 예를 들어, 우리가 격자 C를 이웃의 격자 N과 같이 고려한다면, C와 N의 NCA는 가계도에서 C와 N을 함께 연결하는 첫번째 격자가 된다. C와 N은 NCA의 다른 사분면에 있더라도 예를 들어 그림 4를 참고하면, 격자 5와 7의 NCA는 p2이고 5와 9의 NCA는 뿌리이다. 각각 격자 5와 7이 p2의 다른 4분면에서 보여지고 5와 9는 뿌리의 다른 4분면에 있다. 이웃 격자의 위치를 위하여, NCA는 가계도에서 윗 방향으로 올라가면서 먼저 분별되고 반대방향으로 NCA로부터 하강하면서 분별된다.

3.3 좌표의 결정

4면 격자 알고리즘으로부터 네 개의 모서리 좌표는 x , y 방향에 따라 결정된다. 그 계산은 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$x_{west} = x - \frac{1}{2^{1+level}}, \quad x_{east} = x + \frac{1}{2^{1+level}}$$

그리고

$$y_{south} = y - \frac{1}{2^{1+level}}, \quad y_{north} = y + \frac{1}{2^{1+level}}$$

또한 격자의 크기는 다음과 같이 단위 직사각형 안에서 계산되어 질 수 있다.

$$h = \frac{1}{2^{level}}$$

계산에서 실제적인 크기로서 이 수치를 사용하기 위해서는 위 격자 크기는 x , y 방향에 대해 다음과 같이 실제 축척에 의해 곱해져야 한다.

$$x = R L_x h \text{ and } y = R L_y h$$

여기서 RL 은 전체 길이의 실제 축척이다.

3.4 2:1 비율에 의한 제어

효과적인 수치모델을 만들기 위해서는 제어를 하는 것이 필요하다. 전체 영역을 통해 2:1 비율을 적용하기 전 각 이웃 격자는 가계도 탐험에 의해 확인 되어진다. 2:1 비율 제어는 2단계로 이루어 지는데, 첫번째 단계는 대상 격자에 다 닿을 때까지 뿌리로부터 시작하여 각 레벨에 있는 모든 격자를 방문하는 것과 같이 가계도가 탐험 된다. 모두 8개의 이웃 격자들 (4개의 마주한 격자들, 4개의 대각선 위치 격자들)은 각 격자에 대해 2:1 비율에 대해 검토 된다. 그리고 만약 격자가 2:1 비율에 의해 만족하지 않으면 주위 이웃 격자들은 자동적으로 더욱 분할된다. 첫 번째 단계 후 그 이웃들이 분할될 때 이웃 격자들의 이웃들이 모두 방문 되지 않기 때문에 2:1 비율을 여기는 어떤 이웃 격자들이 있을 수 있다. 그래서 2 단계에서는 가장 높은 레벨로부터 시작하여 뿌리가 다 닿을 때까지 검사가 레벨 별로 이루어 진다. 각 레벨에서 대상 레벨에 있는 모든 격자들은 위치 설정 및 제어 되어진다.

3.5 4면 구조 격자 생성 프로그램 진행순서

4면 격자 제조기는 다음과 같은 일들을 수행하는 부 프로그램으로 이루어진다.

1. 주요한 경계와 다른 지역을 규정하는 씨앗 점을 설정한다.
2. 1개 이하의 씨앗 점이 각 격자에 있을 때 까지 4분면으로 반복적으로 분할한다.
3. 연계된 목록 4면 구조 격자 데이터 구조를 개발한다.
4. 격자 숫자의 조작에 기인한 이웃 격자를 찾기 위한 알고리즘을 실행한다.
5. 2:1 이웃 격자의 크기 제한에 따라 격자 제어를 한다.
6. 가계도에 대해 절점 과 모서리 그리고 격자의

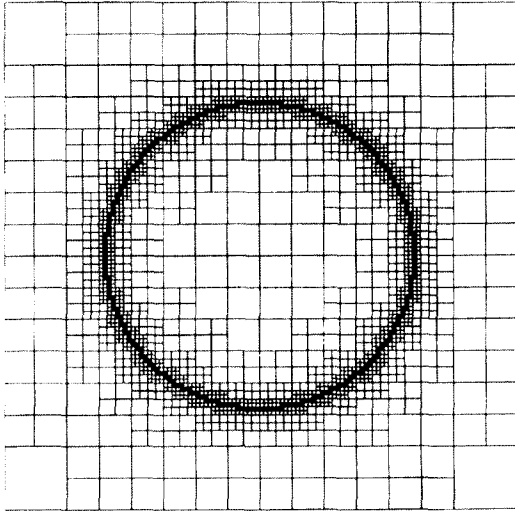


그림 5. 반경 0.3단위의 원에 대한 9차 레벨 4면 구조 격자의 예

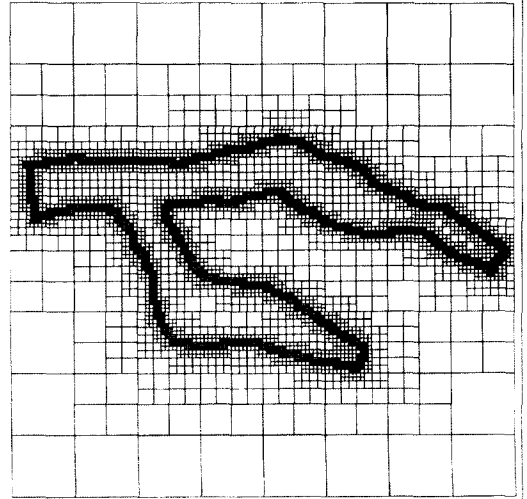


그림 6. 분기된 강 지형의 9차 레벨에서의 4면 구조 격자의 예

숫자를 결정한다.

7. 편미분 방정식의 최근 해를 위해 주 프로그램으로 격자 정보를 준다.

3.6 검 증

복잡한 지형에 대해 격자를 생산하는 4면 구조를 가진 격자 생성의 충분한 능력을 보여주기 위하여 다음과 같은 예제들을 수행하였다. 첫번째 격자는 단위 직사각형 안에 중간에 반경 0.3의 씨앗 점 군으로 이루어진 원에 대하여 생성된다. 최대 레벨 8의 4면 구조 격자는 그림 5.에서 보여주고 있다. 2:1 비율 한계는 원 경계의 안 과 바깥의 격자에 적용되어 졌다. 그 격자는 10000개의 씨앗 점으로부터 31096개의 면과 44805개의 절점이 포함된다.

두번째 4면 구조를 가진 격자는 복잡한 강의 경계 지형에 따라 그림 6.와 같이 그려져 있다. 전체 3143개의 씨앗 점 들은 강의 경계를 규정하는데 사용되었다. 그 격자는 최대 9레벨에서 9920개의 면과 11158개의 절점으로 생성된다. 격자의 생성 과정 동안 2:1 비율 제어는 흐름 경계의 안과 바깥의 격자에 부과된다. 그리고 저장을 하기 위해서는 16Bits wordlength 기계에 145Kbyte가 요구된다. 9220의

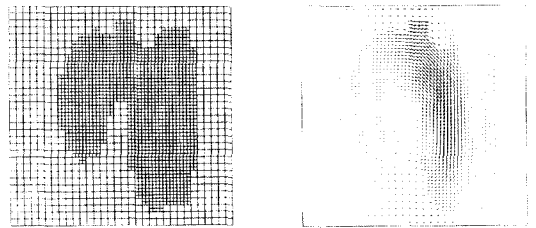


그림 7. 32(32)의 균등한 격자로부터 시작한 회전 인자에 따른 적합화된 격자 와 그 격자에서 수행하여 예측된 회전류

면의 모든 8개의 이웃은 Sun Ultrasparc Workstation에서 1초안에 이루어진다.

세 번째 격자는 연안에서의 회전류를 예측하기 위한 모델의 수행 결과로서 시간에 따라 격자가 운동학적으로 변화할 수 있고 그 격자에서 수행된 결과를 그림 7.에서 보여 주고 있다. 4면 분할 격자들은 $t = 150\text{sec}$ 일때 5차 레벨로 분할되었다

4. 결 론

본 연구는 2차원에서 계층적으로 4면으로 이루어진 격자의 생성 기술을 묘사하였다. 이것은 복잡한 형상의 쇄파대 역학의 예측에 적용을 위해 적합화된

격자를 생성할 수 있는 기술이다. 연계된 목록 접근은 직접적으로 반복수행 할 수 있도록 만드는 저장방법을 위해 채택되었다. 계층적인 격자의 생성에서 저장과 속도에 관해 수치 효율을 개선하기 위해 격자들은 전체 영역에 대해 2:1 비율에 의해 제어된다. 침

부적으로 Hole 경우는 두개 혹은 더 이상으로 면하고 있는 이웃들이 고해상도를 가질 때 더 분할된다. 이러한 과정들은 편미분 방정식의 모델화를 가능하게 해준다. ●

〈참고 문헌〉

- Anastasiou, K. and Chan, C.T. (1997), "Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 24, pp. 1225-1245.
- Borthwick, A.G.L., Yiu, K.F.C and Anastasiou, K. (1997b), "Solution of the Mild-slope equation on quadtree grids", *Proceedings XXVII IAHR Congress*, August, San Francisco, USA, pp. 11-14.
- Cruz, S. (1997), "Numerical Solution of the Shallow Water Equations on Quadtree Grids", D.Phil. Thesis, University of Oxford.
- De Zeeuw, D. and Powel, K.G. (1993), "An adaptively refined Cartesian Mesh Solver for the Euler equation", *Journal of Computational Physics*, Vol. 104, pp. 56-68.
- Evans, A. (1993), "Mesh Adaptivity in Compressible Flow", Ph.D. Thesis, University College of Swansea.
- Evans, A., Marchant, M.J., Szmelter, J. and Weatheril, N.P. (1991), "Mesh adaptivity with the quadtree method", *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields*, Barcelona, Spain, pp. 67-77. Elsevier-Science Publisher B.V. (North-Holland)
- G Δ sp Δ r, C. and J \square zsa, J. (1991) "A coupled Lagrangian particle tracking and quadtree-based adaptive multigrid method with application to shear layer evolution", *Proceedings XXIV IAHR Congress*, 9-13th September, Madrid, Spain
- G Δ sp Δ r, C., J \square zsa, J. and Simbierowicz, P. (1991), "Lagrangian modelling of convective diffusion problems using unstructured grids and multigrid techniques", *Proceedings 1st International Conference on Water Pollution (Modelling, Measuring and Prediction)*, 3-5th September, Southampton, U.K.
- George, P. L. (1990), "Automatic Mesh Generation, Application to finite Element Methods", John Wiley & Sons Inc., Paris.
- Greaves, D.M. and Borthwick, A.G.L. (1998), "On the use of adaptive hierarchical meshes for numerical simulation of separated flows", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 26, pp. 303-322.
- Greaves, D.M. (1995), "Numerical Modelling of Laminar Separated Flows and Inviscid Steep Waves Using Adaptivity Hierarchical Meshes", D.Phil. Thesis, University of Oxford.
- J \square zsa, J. and G Δ sp Δ r, C. (1992), "Fast, adaptive approximation of wind-induced horizontal flow patterns in shallow lakes using quadtree-based multigrid method", *Proceedings IX International Conference on Computational Methods in Water Resources*, 9-11 June, Denver, USA
- Park, K. (1999), "Quadtree Grid Numerical Model of Nearshore Wave-Current Interaction", D.Phil. Thesis, University of Oxford.
- Patel, M.K., Pericleous, K.A. and Baldwin, S. (1995), "The development of a structured mesh grid adaptation technique for resolin