

유 사 이 동 론

최 성 옥 (연세대학교 사회환경·건축공학부 조교수)

· 차 례 ·

1. 개설
2. 유사의 특성
3. 유체역학의 기본방정식
4. 유사입자의 운동
5. 소류사 이론
6. 부유사 이론

제 5 편

6. 부유사 이론

하상에 놓여있는 유사입자는 유수가 한계조건 이르면 운동을 시작하여 소류사 혹은 부유사의 형태로 하류방향으로 이동하게 된다. 유사가 바닥과의 접촉없이 유수와 함께 이동할 때 이를 부유사라 하며, 소류사와 구별한다. 자연하천에서 하류로 수송되는 유사량의 대부분은 부유사 형태로 발생한다. 유수중에 부상되어 유체와 함께 이동하는 유사입자는 중력의 작용으로 항상 연직하향의 힘을 받지만 유사를 부유상태로 지탱해주는 것은 亂流에 의한 효과이다. 그러므로 유사입자의 부유 여부를 결정짓는 가장 중요한 요소는 동수역학적 조건이라고 하겠다. 본 장에서는 부유사의 이동을 역학적으로 고찰하기 위한 간단한 이론을 소개하기로 한다.

(1) 부유사의 질량보존

부유사는 난류에 의해서 수직방향으로 확산된다는 점에서 소류사와는 구별된다. 시간 t 와 x_j 점에서 부유사의 순간 체적농도(instantaneous volume concentration of suspended sediment)를 $c(x_j, t)$ 로 정의하고, 동일한 점에서의 Eulerian 입자속도 $v_i(x_j, t)$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$v_i = u_i - v_s \delta_{i3} \quad (1a)$$

여기서 v_s 는 입자의 침강속도이다. 직교 좌표계에서 위의 관계를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$v_i = u_i - v_s k_i \quad (1b)$$

여기서 k_i 는 연직상향의 단위벡터를 나타낸다.

부유사 입자의 크기가 충분히 커서 브라운 운동(Brownian motion)을 하지 않는다고 가정하면, 입자들 사이에 작용하는 힘은 무시될 수 있다. 이러한 경우 부유사는 전적으로 이송흐름률(convective flux)에 의해서 수송된다고 볼 수 있으며, x_i 방향으로 부유사의 체적흐름률은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F_{si} = cv_i \quad (2)$$

검사체적내에서 부유사의 질량보존 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\text{mass in control volume}] = [\text{net mass inflow rate}] \quad (3)$$

여기서 면적 dA 로 들어오는 유사의 순유입량은 다음과

같이 주어진다.

$$-\rho_s F_{si} n_i dA$$

여기서 n_i 는 단면적 dA 에서 x_i 방향으로의 단위법선벡터이다. 위의 식을 이용하여 식(3)을 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \rho_s c dV \right] = -\rho_s \int_A F_{si} n_i dA \quad (4)$$

Divergence 정리에 의해서 위 식의 우변은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\rho_s \int_A F_{si} n_i dA = \rho_s \int_V \frac{\partial F_{si}}{\partial x_i} dV$$

위의 식을 식(4)에 대입하면 검사체적 V 에 대해서 다음과 같은 적분식을 얻을 수 있다.

$$\rho_s \int_V \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial v_i c}{\partial x_i} \right) dV = 0 \quad (5)$$

위의 식은 임의의 검사체적에 대하여 모두 성립하므로, 부유사의 질량보존식은 다음 식(6)과 같은 미분방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial v_i c}{\partial x_i} = 0 \quad (6)$$

위의 식에 식(2)를 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial F_{si}}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

여기서 $F_{si} = (u_i - v_s k_i)c$ 는 x_i 방향으로 부유사의 체적흐름률을 나타낸다. 만약 $x_3 (=z)$ 가 연직상향을 나타낸다면, 식(7)은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial uc}{\partial s} + \frac{\partial vc}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial z} [(w - v_s)c] = 0 \quad (8)$$

(2) 레이놀즈 평균

u_i 와 c 는 각각 순간적인 유속과 체적농도를 나타내므로, 이들을 난류에 대한 평균값과 평균의 변동항으로 나타낼 수 있다. 즉,

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' \quad (9a)$$

$$c = \bar{c} + c' \quad (9b)$$

위의 관계식을 식(7)에 대입하고 시간평균하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}_{si}}{\partial x_i} = 0 \quad (10a)$$

여기서

$$\bar{F}_{si} = (\bar{u}_i - v_s k_i)\bar{c} + \overline{u_i' c'} \quad (10b)$$

위의 식(10b)에 의하면 난류평균된 부유사 체적흐름률 (\bar{F}_{si})은 우변의 첫째항인 평균 이송흐름률(mean convective flux)과 두 번째 항인 레이놀즈 흐름률(Reynolds flux)로 분리된다. 만약 $x_3 = z$ 가 연직상향 방향이라면, 식(10a)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial s} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial n} + (\bar{w} - v_s) \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \\ = - \frac{\partial \overline{u' c'}}{\partial s} - \frac{\partial \overline{v' c'}}{\partial n} - \frac{\partial \overline{w' c'}}{\partial z} \end{aligned} \quad (11)$$

Boussinesq의 와점성개념(eddy viscosity concept)과 비슷하게 와확산개념(eddy diffusivity concept)을 레이놀즈 흐름률에 도입하면 식(11)을 다음과 같이 간략화시킬 수 있다.

$$\overline{u_i' c'} = -D_d \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} \quad (12)$$

여기서 D_d 는 난류에 의한 확산계수로서 스칼라 값이다. 식(12)는 양변에 밀도를 곱해주면 질량흐름율이 되므로, 난류에 의한 질량흐름율은 평균농도의 경사에 비례한다는 Fick의 제1법칙을 나타내기도 한다.

(3) 경계 조건

자유수면에서 부유사의 체적흐름율은 영이므로 이것을 자유수면 경계조건으로 정의할 수 있다. 즉, n_i^s 를 수면에 수직인 단위벡터로 정의하면 자유수면 경계조건은 다음과 같다.

$$\bar{F}_{si} \Big|_{\text{water surface}} \cdot n_i^s = 0 \quad (13)$$

z 가 하상에 대하여 연직상향이고, 수면이 거의 수평이라고 하면 $n_i^s = k_i = (0,0,1)$ 이다. 따라서 식(13)은 다음과 같이 된다.

$$\bar{F}_{sz} \Big|_{z=H} = 0 \quad (14)$$

여기서 $\bar{F}_{sz} = -v_s \bar{c} + \overline{w' c'}$ 이다.

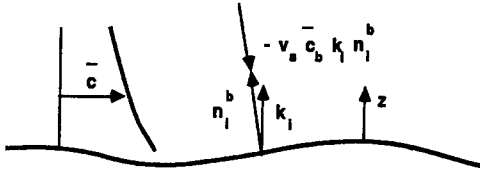


그림 1. Interactions between Bed and Open-Channel Flow

바닥면에서도 마찬가지로 흐름을 이용하여 경계 조건을 정의할 수 있다. 그러나 바닥면에서는 유수에 의한 유사의 유입현상과 유수로부터 하상의 퇴적을 고려해야 하므로 바다의 경계조건은 수면과는 다르다. 앞에서와 같이 평균 체적흐름을 \bar{F}_{si} 는 평균 이송흐름을 $(\bar{u}_i - v_s k_i) \bar{c}$ 와 레이놀즈 흐름을 $\overline{u_i' c'}$ 로 나누어 질수 있다. 공극에서의 흐름이 무시된다면, 바닥에서는 다음의 경계조건을 만족해야 한다.

$$\bar{u}_i|_{bed} \cdot n_i^b = 0$$

여기서 n_i^b 는 그림 1.에서와 같이 침식 가능한 하상에서 법선방향의 단위벡터를 의미한다. 위의 식을 식(10b)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\bar{F}_{si}|_{near-bed} \cdot n_i^b = -D + E \quad (15)$$

여기서 D 와 E 는 각각 유사의 퇴적률(deposition rate onto the bed)과 유입률(entrainment rate into suspension)을 의미한다. 유수로부터 하상의 퇴적률은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D = v_s \bar{c}_b k_i \cdot n_i^b \quad (16)$$

여기서 \bar{c}_b 는 하상부근의 체적농도(near-bed concentration)를 나타내며 식(16)은 단위면적당 단위시간에 퇴적되는 입자의 체적흐름율이다. 하상에서 수직상향으로 부유사의 레이놀즈 흐름율은 단위시간 동안에 단위하상 면적에서 유사가 浮上되는 유입율(혹은 유행율)이다. 부유사의 유수로의 유입율 E 는 다음과 같이 주어진다.

$$E = \overline{u_i' c'}|_{near-bed} \cdot n_i^b \quad (17)$$

여기서 하상 근처(near-bed)라는 말은 하상에서의

($z=0$) 수학적인 특이점문제를 피하기 위한 용어이다.

위에서 유도된 식을 이용하여 하상에서 부유사의 법선방향으로 순 흐름을 나타내면 다음과 같다.

$$\bar{F}_{si}|_{near-bed} \cdot n_i^b = v_s(e_s - \bar{c}_b k_i \cdot n_i^b) \quad (18)$$

여기서 $e_s (\equiv E/v_s)$ 는 유수로 부상되는 하상유사의 무차원 유입률을 의미한다. 河床形象(bed form)을 평균하여 평면하상이라고 가정하면 정상상태 등류에 대해서 식(18)을 다음과 같이 간략화시킬 수 있다.

$$\bar{F}_{si}|_{near-bed} \cdot n_i^b = v_s(e_s - \bar{c}_b) \quad (19)$$

정상상태의 등류조건하에서 부유사의 평형상태(equilibrium suspension)가 되면 하상에서는 순수 퇴적($\bar{F}_{si} < 0$)이나 침식($\bar{F}_{si} > 0$)이 발생하지 않는다. 즉, 평형부유상태에서는 $\bar{F}_{si} = 0$ 이 되어 다음 식이 성립하게 된다.

$$e_s = \bar{c}_b \quad (20)$$

(4) 평형부유상태의 관계식

하상이 침식가능한 광폭의 직사각형 수로에서 경사가 작아 z 방향은 거의 연직(quasi-vertical)에 가깝다고 가정하자. 그림 2.는 정상상태 등류의 유속분포와 이에 따른 평형부유상태에서 난류평균된 부유사의 농도분포를 보여주고 있다. 그림에서와 같이 c 는 z 만의 함수이다. 흐름과 부유율은 정상상태로서 s 와 n 축에 대해 일정하므로, 식(10)은 다음과 같이 된다.

$$\frac{d\bar{F}_{sz}}{dz} = 0 \quad (21)$$

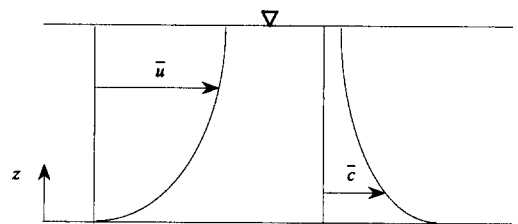


그림 2. Concentration of Suspended Sediment under Equilibrium Bondition

식(21)을 적분하면 \bar{F}_{sz} 는 상수가 되며, 수면에서 수직 한 체적흐름률은 영이므로 적분상수는 0이 된다.

$$\overline{w'c'} - v_s \bar{c} = 0 \quad (22)$$

와확산 가정에 의하면 $\overline{w'c'} = -D_d(\partial \bar{c} / \partial z)$ 이므로 이를 이용하여 식(22)를 정리하면 다음과 같다.

$$-D_d \frac{d\bar{c}}{dz} - v_s \bar{c} = 0 \quad (23)$$

식(23)에서 좌변의 두 번째 항은 중력에 의한 부유사의 퇴적률을 나타내며, 항상 아래방향으로 작용한다. 모든 유사가 침강하지 않으려면 뒷방향으로의 흐름률이 존재하여야 하며, 이것은 식(23)에서 좌변의 첫 번째 항인 레이놀즈 흐름률에 의한 난류효과에 의해서 제공된다. 레이놀즈 흐름률은 $d\bar{c}/dz < 0$ 이므로 항상 앞 방향으로 작용한다. 평형상태에서 부유사 농도는 z 가 증가함에 따라 감소하게 되므로 난류는 유사농도가 높은 지역에서 낮은 지역(수면 근처)으로 유사입자를 확산시키는 역할을 한다.

(5) 와점성 계수

앞에서 유도한 식(23)에서 확산계수인 D_d 가 상수라고 가정하면 적절한 경계조건하에서 다음과 같은 해석해를 구할 수 있다.

$$\bar{c}(z) = \bar{c}_b \exp(-v_s z / D_d) \quad (24)$$

위의 식에 의하면 평형상태에서 부유사의 농도분포는 바닥에서 최대값을 가지며 지수적으로 감소함을 알 수 있다. 그러나 일반적으로 확산계수 D_d 는 상수가 아니며 수심에 따라 변화한다. 본 기사에서는 확산계수를 구하는 간단한 방법으로 Rouse(1957)에 의해서 제시된 방법을 소개하기로 한다. Rouse는 와확산 개념과 Prandtl의 방법(난류에 의한 질량 및 열의 확산은 운동량과 비슷한 비율로 확산된다는 것)을 이용하여 평형상태에서의 농도분포를 구하였다. 이러한 해석법은 정확하지는 않지만 많은 난류문제에 있어 합리적인 접근방법으로 알려져 있다. 그러나 유사문제에 있어서는 많은 의문의 여지를 남기고 있는 것 또한 사실이다.

유속이 대수분포를 따른다고 가정하면 전단속도에 의해 무차원화 시킨 평균유속을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = \frac{1}{k} \ln(30 \frac{z}{k_c}) \quad (25)$$

여기서 k 는 von Karman 상수이고 k_c 는 하상형상을 포함하는 복합적인 조도 높이를 의미한다. 한편 유체 점성을 무시한 후, 와확산 개념을 도입하여 전단응력을 표현하면 다음과 같다.

$$\tau = -\rho \overline{u'w'} = \rho D_d \frac{d\bar{u}}{dz} \quad (26)$$

한편 전단응력은 2장에서 살펴본 바와 같이 다음과 같은 선형분포를 보인다.

$$\tau = \tau_b \left(1 - \frac{z}{H}\right) \quad (27)$$

여기서 τ_b 는 하상에서의 전단응력으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tau_b \equiv \rho u_* \cong -\rho \overline{u'w'} \Big|_{z=b} \quad (28)$$

식(28)에서 b 는 하상에 매우 근접한 점이다(즉, $b/H \ll 1$). 위의 식(25)-(28)을 이용하면 아래의 와확산계수를 얻을 수 있다.

$$D_d = k u_* z \left(1 - \frac{z}{H}\right) \quad (29)$$

위의 와확산계수는 식(25)와 같은 유속분포에서 난류가 운동량과 유사를 확산시키는 비율이 동일하다는 가정(Schmidt 수=1)하에 유도되었다. D_d 를 연직방향으로 평균하면, 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

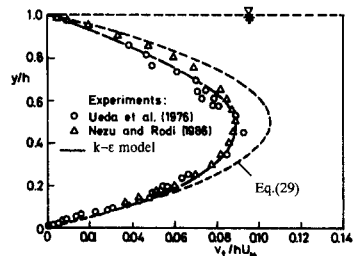


그림 3. Distribution of Eddy Diffusivity of Suspended Sediment(Celik & Rodi, 1988)

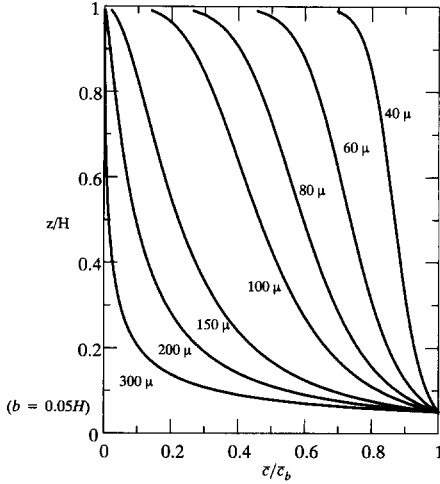


그림 4. Rousean Distribution of Suspended Sediment

$$D_d = \frac{k}{6} u_* H \cong 0.0667 u_* H \quad (30)$$

그림 3.은 식(29)에 의한 포물선형 와확산계수와 실험에 의한 측정값(원형 및 삼각형 기호로 표시) 그리고 $k-\epsilon$ 모형에 의한 계산값을 보여주고 있다. 모든 결과가 포물선형 분포를 보이며 수심의 중앙에서 최대값을 보이지만, 식(29)에 의한 확산계수가 약간 과대 추정하는 경향을 보이고 있다.

(6) 부유사의 Rousean 분포

와확산 계수인 식(29)를 식(23)에 대입하고, 하상 근처에서 ($z = b$)입의의 점 z 까지 적분하면 다음과 같다.

$$\int_b^z \frac{d\bar{c}}{\bar{c}} = -Z \int_b^z \frac{H dz}{b z(H-z)} = Z \ln \left[\left(\frac{H-z}{z} \right) \right]_b^z \quad (31)$$

여기서 Z 는 Rouse수이며 무차원의 형태로 다음과 같이 주어진다.

$$Z = \frac{v_s}{k u_*} \quad (32)$$

위의 식을 정리하면 다음과 같은 Rousean 농도 분포 식을 얻을 수 있다.

$$\bar{c} = \bar{c}_b \left(\frac{(H-z)/z}{(H-b)/b} \right)^Z \quad (33)$$

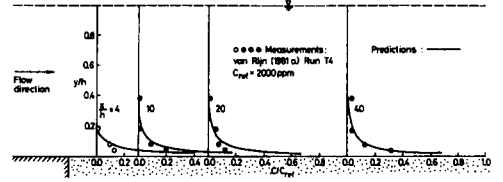


그림 5. Concentration of Suspended Sediment under Nonequilibrium Condition(Celik & Rodi, 1988)

그림 4.는 식(33)을 이용하여 입자의 크기별로 평형 부유상태의 무차원 농도를 도시한 것이다. 그림에서 $b = 0.05H$ 로 정의하였으며 입자의 직경에 따른 침강 속도는 Dietrich(1982) 공식을 이용하였다. 입자의 크기가 작을수록 전체 수심에 걸쳐 고르게 분포하고 있는 것을 확인할 수 있다. 참고적으로 그림 5.는 비평형(nonequilibrium) 부유사 상태에서 부유사 농도분포의 변화를 거리에 따라 도시한 것이다. 이동상에서 거리에 따라 부유사의 농도분포가 발달하는 것이 보이며 측정값과 수치모형을 이용한 예측값이 근사함을 알 수 있다.

식(20)에서와 같이 평형부유상태에서 c_b 는 무차원 유사유입률 e_s 와 같다. 이러한 관계를 이용하여 e_s 를 τ_{bs} (skin friction due to grain)와 다른 매개변수들의 함수로 구할 수 있다 (Garcia, 1999). Garcia와 Parker는 많이 사용되고 있는 여러 유입률 공식과 실험에 의한 \bar{c}_b 의 값과 비교하여 각각 공식들의 예측기능을 살펴보았으며, 다음과 같은 새로운 공식을 제시하였다.

$$e_s = \frac{A Z_u^5}{1 + \frac{A}{0.3} Z_u^5} \quad (34a)$$

여기서 $A = 1.3 \times 10^{-7}$ 이며 Z_u 는 類似變數(similarity variable)로서 다음과 같이 정의된다.

$$Z_u = \frac{u_{*s}}{v_s} Re_p^{0.6} \quad (34b)$$

위의 식에서 u_{*s} 는 입자에 의한 전단유속이고 Re_p ($\equiv \sqrt{gRD_s D_s / \nu u}$)는 입자 레이놀즈 수이다. 그림 6.은 무차원 유입률 e_s 와 유사변수 Z_u 와의 관계인 식(34a)를 도시한 것이다. 그림에서 Z_u 는 무차원의 전단속도

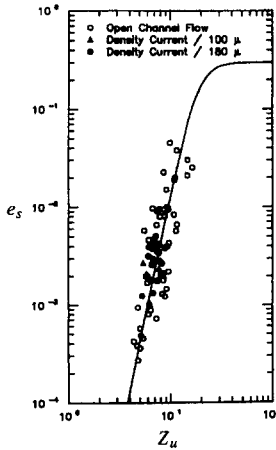


그림 6. Sediment Entrainment Function (Garcia & Parker, 1991)

와 입자 레이놀즈 수의 0.6 제곱과의 곱으로, 유사변수의 값이 증가할수록 무차원 유입 dbf의 값도 증가함을 알 수 있다.

〈참고 문헌〉

- Celik, I., and Rodi, W. (1988). "Modeling of suspended sediment transport in nonequilibrium situations." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 114(10), 1157-1191.
- Dietrich, P. (1982). "Settling velocity of natural particles." *Water Resources Research*, AGU, 18(6), 1615-1626.
- Garcia, M., and Parker, G. (1991). "Entrainment of bed sediment into suspension." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 117(4), 414-435.
- Garcia, M. (1999). *Sedimentation and Erosion Hydraulics. Chapter 6 in Hydraulic Design Handbook*. McGraw Hill, New York, NY.
- Rouse, H. (1957). "Modern conceptions of the mechanics of turbulence." *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 102.

강좌를 마치면서...

본 학술강좌는 '99년 5월호부터 시작하여 2000년 1월호까지 총 5회에 걸쳐 연재되었다. 강좌의 내용은 (미) Minnesota 대학의 Parker 교수의 강의노트를 근간으로 (미) Illinois 대학 Garcia 교수의 강의 내용과 필자의 연세대학교 강의노트로 구성하였음을 밝힌다. 처음 국립방재연구소의 김양수 박사님으로부터 학술강좌를 창탁 받았을 때에는 충실한 내용으로 우리나라 수공학 발전에 일조해 보겠다는 마음이 간절하였는데, 매호 출간 때마다 편집위원들로부터 독촉 전화를 받으면서 마감일을 겨우 맞추기에 급급하였

다. 따라서 필자 자신이 읽어보아도 어색한 부분을 많이 발견할 수 있었고 몇몇의 독자로부터 내용을 이해하기가 쉽지 않음을 지적받기도 하였다. 그러나 유사 이동에 관해서는 독자 여러분이 "모르겠다"고 답만 하여도 받은 맞는 것인 만큼 유사이동은 어려운 학문임에 틀림없다. 본 학술 강좌를 완성하는데 연세대학교 대학원의 최희훈군과 곽승주군의 도움이 있었음을 밝힌다. 지금까지 유사이동론을 읽어주신 독자 여러분에게 감사를 드리며, 올해안으로 이미 연재된 원고의 오류를 수정하여 정오표를 게재할 것을 약속드린다. ●