

분기좌굴이론의 탄소성 유한요소법에의 적용

김종봉* · 양동열* · 윤정환**

(1999년 7월 27일 접수)

An Introduction of Bifurcation Algorithm into the Elastic-Plastic Finite Element Analysis

J.B. Kim, D.Y. Yang and J.W. Yoon

Abstract

Wrinkling is one of the major defects in sheet metal products and may be also attributable to the wear of the tool. The initiation and growth of wrinkles are influenced by many factors such as stress state, mechanical properties of the sheet material, geometry of the body, and contact condition. It is difficult to analyze the wrinkling initiation and growth considering the factors because the effects of the factors are very complex and the wrinkling behavior may show a wide variation for small deviations of the factors. In this study, the bifurcation theory is introduced for the finite element analysis of wrinkling initiation and growth. All the above mentioned factors are conveniently considered by the finite element method. The finite element formulation is based on the incremental deformation theory and elastic-plastic material modeling. The finite element analysis is carried out using the continuum-based resultant shell elements considering the planar anisotropy of the sheet metal. The proposed method is verified by employing a column buckling problem. And then, the initiation and growth of wrinkling in deep drawing of cylindrical cup are analyzed.

Key Words : Bifurcation, Elastic-Plastic, Wrinkling, Finite Element Method

1. 서론

주름(wrinkling)은 파단(tearing), 스프링백(spring back)과 더불어 박판성형 공정에서 자주 발생하는 큰 결함 중의 하나이다. 주름은 압축응력이 소재가 지지할 수 있는

한계 이상일 때 소재가 소재면에 수직인 방향으로 휘어지는 현상으로 외관상 좋지 않고, 치수 정밀도가 떨어지기 때문에 스프링 백과 함께 조립에 대한 결함이 된다. 또한 주름이 발생하면 성형 방향으로의 소재 흐름에 제한이 가해지기 때문에 이어지는 성형성을 저하시키는 요

* 한국과학기술원 기계공학과

** LG 생산기술원

인이 되고 급형도 빨리 마모시킨다. 이것은 생산 공정에서 생산성을 크게 저하시키는 요인으로 작용한다.

최근에는 자동차 산업을 비롯하여 전자산업, 항공기 산업 등 다양한 분야에 박판성형 공정이 이용되고, 또한 고정밀도 고부가가치 제품의 요구, 공정개발 기간의 단축 요구 등으로 인해, 공정 개발단계에서 미리 생산 공정에서 발생할 수 있는 결함에 대해 예측하고 그에 대한 대처를 하는 것이 필수적이다.

주름은 응력을 비롯하여 소재의 형상(geometry), 발생된 주름의 수 등 많은 인자들의 영향을 받기 때문에 주름의 발생경향을 파악하기 어렵다. 유한요소 해석에서도 사각형 썩 드로잉같이 기하학적으로 주름이 자연스럽게 발생하는 경우는 주름의 발생의 해석이 가능하지만⁽¹⁾, 원통형 썩 디프드로잉과 같은 축대칭 공정에서 원주 방향으로 발생하는 주름이나 puckering은 해석이 불가능하다. 외연적 시간 적분법을 이용하는 코드에서는 이와 같은 주름이 특별한 방법의 적용이 없이 자연적으로 해석되기도 하지만⁽²⁾ 임의성이 있기 때문에 신빙성이 문제가 된다.

이와 같은 이유로 인해, 주름에 관한 연구는 특별한 공정에 대해서는 실험적으로나 이론적으로 많이 수행되었지만^(3,4), 모든 공정에 일반화 하여 설계에 적용할 수 있는 연구는 많지 않다. 특히 이론적인 연구에서는 접촉 조건, 블랭크 홀딩력 등을 비롯한 여러가지 공정 변수들에 대해 많은 가정을 도입 하기 때문에 실제 공정의 설계에 적용하기에는 부족하다. 컴퓨터 기술과 비선형 유한요소법이 발달하기 전까지의 주름에 관한 이론적인 연구는 대부분 좌굴에 관한 4차의 미분방정식의 해를 찾는 형태로 수행되었다^(5,6). Yamaki⁽⁵⁾는 원통 좌표계에서 4차 미분방정식을 풀어서 균일한 압축응력을 받는 원형 박판의 좌굴을 탄성으로 해석하였다. Geckler는 탄소성에서의 좌굴 계수 E_t 를 도입하여 이론적인 좌굴 해석을 수행하여, 원통형 썩 디프 드로잉시에 주름이 발생하는 한계 응력과 주름의 수에 관한 식을 얻었다⁽⁶⁾. 후에 Yu와 Johnson⁽⁶⁾은 블랭크 홀더가 있는 경우로 확장하였다. 그러나 접촉과 마찰, 블랭크 홀딩력 등을 고려하지 않거나 간략하게 근사화 하여 고려 했기 때문에 복잡한 박판성형 공정을 설계하는데 이용하기는 어렵다.

최근에는, 컴퓨터의 발달에 힘입어 좌굴 연구에서 많이 이용되고 있는 분기점 해석(bifurcation analysis) 방법을 유한요소 해석에 도입하여 주름의 발생을 해석하는 연구가 많이 수행되고 있다. Tomita와 Shindo⁽⁷⁾는 초기에 유한요소 격자 구조에 기하학적인 결함을 주고 Yoshida Buckling Test⁽⁸⁾를 해석하였다. Wang과 Lee⁽⁹⁾

는 분기점 해석 이론을 쉘 요소를 이용한 유한요소법에 적용하여 Yoshida buckling test를 해석하였다. 그러나 분기점에서 해를 정확하게 수렴시키지 않고 외삽을 이용하여 구했기 때문에 해석이 진행됨에 따라 오차가 커지는 결과를 얻었다.

본 연구에서는 박판성형 공정에서 발생하는 큰 결함중의 하나인 주름에 대해서 유한요소 해석을 수행하고자 한다. 탄소성 응축 쉘 요소를 이용하는 유한요소 코드에 분기좌굴 이론을 도입함으로써 복잡한 접촉과 재료 및 기하학적 비선형성 등의 여러 가지 조건들을 모두 고려하여 주름의 발생 및 진행을 해석하고자 한다. 내연적 유한요소법을 이용하는 해석에서는 분기점에서 강성행렬이 특이성을 가지기 때문에 일반적으로 해석의 진행이 불가능하다. 이와같은 문제를 해결하고, 분기점을 지나 계속적으로 해를 구하기 위해Riks⁽¹⁰⁾는 연속적 방법(continuation method)을 제안하였고 탄성 구조물의 좌굴을 해석하였다. 그 이후에 Lee등⁽¹¹⁾은 이 방법을 적용하여 빔의 수평좌굴(lateral buckling)을 해석하였다. 본 연구에서는 Riks⁽¹⁰⁾에 의해 제안된 연속적 방법을 탄소성 유한요소법에 적용하여 탄소성 좌굴 및 주름의 발생을 해석하고자 한다.

2. 유한요소수식화

본 장에서는 대변위 대변형을 고려하여 CBR 쉘 요소를 수식화 하였다. 응축 쉘과 응축 쉘로부터 CBR 쉘로 유도하는 여러 가지 방법은 Stanley⁽¹²⁾의 논문과 Bathe⁽¹³⁾및 Hughes⁽¹⁴⁾의 문헌에 자세히 기술되어 있다. 본 연구에서는 Stanley에 의해 연구된 비선형 탄성 CBR 쉘 이론을 평면 이방성을 고려하는 탄소성 해석에 확장한 Yoon등⁽¹⁵⁾의 수식화에 기초하였다. 수식화는 전 스텝에서의 수렴 결과를 현재 스텝 계산의 기준으로 하는 개량 라그랑지안(updated Lagrangian) 방법을 이용하였다.

2.1 쉘 요소

전단변형(shear)과 워핑 용통성(flexibility) 및 박판성형 공정의 형상 변화 효과의 효율적인 고려를 위해 파이버(fiber)의 회전을 고려하여 연속체기반 쉘(continuum based shell) 요소를 개발하고, 결과식 형태(resultant form)를 이용하여, 두께 방향 적분식 계산의 효율성을 높였다.

연속체기반(continuum based) 쉘 요소에서 재료의 좌표는 Fig.1과 같이 ξ, η, ζ 좌표계를 이용하여 나타낼 수

있다. 쉘의 기준면(reference laminar surface) $\bar{\mathbf{x}}(\xi, \eta)$ 는 아래면과 윗면의 중간면(mid-surface)으로 하였다. 즉 쉘의 기준면은 다음과 같이 주어진다.

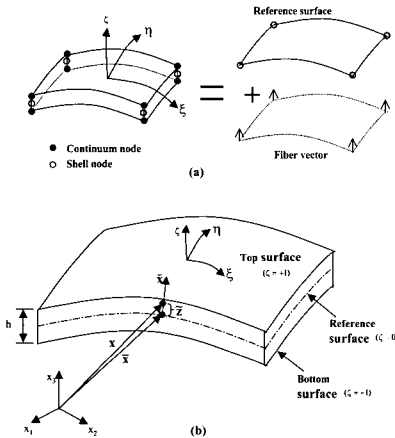


Fig. 1 Continuum-based shell element; (a) construction of a typical shell element (b) shell geometry

$$\bar{\mathbf{x}}(\xi, \eta) = \mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta = 0) \quad (1)$$

연속체 요소식으로부터 쉘 요소식을 이끌어 내기 위해 다음의 가정을 도입한다.

<동적가정(Kinematic Hypotheses)>

* 일괄 수직벡터(Straight Normal)

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \tilde{z}) = \bar{\mathbf{x}}(\xi, \eta) + \tilde{z} \check{\mathbf{x}}(\xi, \eta) \quad (2)$$

여기서 $\tilde{z} = \zeta h/2$

* 강제 수직분분벡터(Incremental Rigid Normal)

$$\Delta \mathbf{u}(\xi, \eta, \tilde{z}) = \Delta \bar{\mathbf{u}}(\xi, \eta) + \tilde{z} \Delta \check{\mathbf{x}}(\xi, \eta) \quad (3)$$

여기서 $\Delta \mathbf{u} \cdot \check{\mathbf{x}} = 0$

식(2)는 수직벡터(normal)가 변형 중에 직선으로 남아 있어야 한다는 조건이다. 그러나 기준면에 수직일 필요는 없다. 즉 수직방향(두께방향) 전단변형(transverse shear)을 허용하기 때문에 민들린(mindlin) 쉘 요소와 같이 두께 방향으로의 전단변형(transverse shear)이 발생

할 수 있다. 식(3)은 모든 좌표계에 적용이 가능하므로 기준 좌표계(Reference coordinate)에 적용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{X}(\xi, \eta, \tilde{z}) = \bar{\mathbf{X}}(\xi, \eta) + \tilde{z} \check{\mathbf{X}}(\xi, \eta) \quad (4)$$

또한 식(3)과 식(4)로부터 증분 변위 u는 다음과 같이 유도된다.

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \tilde{z}) = \bar{\mathbf{u}}(\xi, \eta) + \tilde{z} \check{\mathbf{u}}(\xi, \eta) + (\tilde{z} - \tilde{Z}) \check{\mathbf{X}} \quad (5)$$

여기에 한 변형증분 동안 두께방향 파이버(fiber)가 직선으로 남아 있고 크기도 변하지 않는다는 강제수직증분(incremental rigid normal)가정을 적용하면 $\check{\mathbf{z}} - \check{\mathbf{Z}} = 0$ 이 되고 u는 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \tilde{z}) = \bar{\mathbf{u}}(\xi, \eta) + \tilde{z} \check{\mathbf{u}}(\xi, \eta) \quad (6)$$

연속체 요소로부터 응축 쉘 요소를 유도하기 위해 다음과 같은 가정이 더 필요하다.

<정적가정(Static Hypotheses)>

* 수직응력이 없다는 가정(Zero Normal Stress)

$$\sigma_{331}(\xi, \eta, \tilde{z}) = 0 \quad (7)$$

* 수직응력의 변화율이 없다는 가정 (Zero Normal Stress - Rate)

$$\sigma_{331}^{<1>} = 0 \quad (8)$$

식(7)과 식(8)에서 1은 층상(laminar)좌표계를 의미한다. 이 가정은 소재의 두께가 길이나 폭에 비해 매우 작기 때문에 충분히 납득할 만한 가정이고, 기존의 박막이론에서도 광범위하게 채택되고 있다. 이 가정들을 이용해 연속체기반(continuum based) 쉘 요소의 선형화된 변분식을 유도하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}^{\text{mat}}(\mathbf{x}; \Delta \mathbf{u}) + \mathbf{K}^{\text{geom}}(\mathbf{x}; \Delta \mathbf{u}) = \mathbf{F}^{\text{ext}}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

여기서

$$\mathbf{F}^{\text{int}} = \int_V \delta \mathbf{\epsilon}_i^T \sigma_i d\mathbf{v}$$

$$\mathbf{K}^{\text{mat}} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \mathbf{C}_1 \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1 \mathbf{d}v,$$

$$\mathbf{K}^{\text{geom}} = \int_V \nabla_1 (\delta \mathbf{u}_{ii})^T \boldsymbol{\sigma}'_1 \nabla_1 (\Delta \mathbf{u}_{ii}) \mathbf{d}v,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = [\sigma_{xx1} \ \sigma_{yy1} \ \sigma_{xy1} \ \sigma_{yz1} \ \sigma_{zx1}]^T,$$

$$\boldsymbol{\sigma}'_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{xx1} & \sigma_{xy1} & \sigma_{xz1} \\ & \sigma_{yy1} & \sigma_{yz1} \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1 = [\Delta \varepsilon_{xx1} \ \Delta \varepsilon_{yy1} \ 2\Delta \varepsilon_{xy1} \ 2\Delta \varepsilon_{yz1} \ 2\Delta \varepsilon_{zx1}]^T,$$

$$\nabla_1 (\Delta \mathbf{u}_{ii}) = \left[\frac{\partial \Delta u_{ii}}{\partial x_1} \ \frac{\partial \Delta u_{ii}}{\partial y_1} \ \frac{\partial \Delta u_{ii}}{\partial z_1} \right]^T,$$

\mathbf{C}_1 : 5×5의 응축된 구성식행렬("condensed" constitutive matrix).

여기에서 응력, 변형률 등의 모든 구성방정식과 관련된 물리량들은 현재의 층상(laminar)축으로 변환되었고, 정적 가정에 의해 응축되었다. 식(9)에서 \mathbf{K}^{mat} 은 선형강성행렬(linear stiffness matrix or material stiffness matrix)이고 \mathbf{K}^{geom} 은 기하학적 강성행렬(geometric stiffness matrix), \mathbf{F}^{ext} 는 외력벡터, 그리고 \mathbf{F}^{int} 는 내력벡터이다.

2.2 CBR셀의 유한 요소식

CB셀의 유한 요소식은 부피적분을 포함하고 있다. 그래서 연속체 요소와 같이 두께방향으로 적분을 해야 하기 때문에 계산이 복잡하고 많은 시간이 요구된다. CBR셀은 CB셀에서의 부피적분을 면적적분과 두께적분으로 분리하여 최종 유한 요소식은 결과식(Resultant) 형태의 면적적분만으로 이루어지도록 유도한 것이다.

CB셀 유한요소식을 유도하기 위해서는 셀의 두께가 곡률반경에 비해서 매우 작아야 한다. 이 조건이 만족해야만 자코비안이 두께 방향으로 일정하다고 볼 수 있기 때문이다. 또한 면 방향과 두께 방향의 자코비안을 분리하기 위해서는 "테이퍼(taper)" 가정과 "수직성(normality)" 가정이 필요하다. 테이퍼 가정은 미분을 수행하기 위해서 필요한 것으로 셀의 각 층(layer)의 윗면과 아래면이 평행하다는 가정이고, 수직성 가정은 두께방향 벡터($\hat{\mathbf{x}}$)가 기준면에 수직이어야 한다는 가정이다.

이 가정들을 응축 셀 유한요소식에 적용하면 최종적으로 다음과 같은 CBR 셀 유한요소식이 얻어진다. 자세한 유도과정은 참고문헌(15)에 잘 기술되어 있다.

$$\mathbf{K}^{\text{mat}}(\Delta \mathbf{u}) + \mathbf{K}^{\text{geom}}(\Delta \mathbf{u}) = \mathbf{F}^{\text{ext}}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}) \quad (10)$$

여기서

$$\mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}) = \int_S \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{S}_1 \mathbf{d}s,$$

$$\mathbf{K}^{\text{mat}}(\Delta \mathbf{u}) = \int_S \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_1 \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{d}s,$$

$$\mathbf{K}^{\text{geom}}(\Delta \mathbf{u}) = \int_S \delta \mathbf{g}_i^T \mathbf{S}_2 \Delta \mathbf{g}_i \mathbf{d}s$$

여기에서 \mathbf{e} 는 결과식(resultant)형태의 변형률 벡터, \mathbf{S}_1 은 결과식 형태의 응력벡터, \mathbf{D}_1 은 결과식 형태의 구성계수 행렬, \mathbf{g}_i 는 결과식 형태의 변위 구배 벡터, 그리고 \mathbf{S}_2 는 결과식 형태의 응력 행렬이다.

여기에서 모든 행렬과 벡터는 두께 방향으로 적분이 수행된 resultant 형태를 취한다.

2.3 응력적분

본 장에서는 구성 방정식을 최소 소성일 경로(minimum plastic work path, or proportional logarithmic strain path)에 기초하여 구했다⁽¹⁶⁾. 최소 소성일 조건은 변형이 다음 관계를 만족할 때 얻어진다.

$$\begin{aligned} \hat{D}(t) &= \hat{\varepsilon}_L(t) = \dot{\alpha}(t) \Delta \hat{\varepsilon}_L(t_0 + \Delta t), \\ \Delta \hat{\varepsilon}(t) &= \Delta \hat{\varepsilon}_L(t) = \alpha(t) \Delta \hat{\varepsilon}_L(t_0 + \Delta t) \end{aligned} \quad (11)$$

여기에서 $\alpha(t)$ 는 시간에 관한 함수로써 항상 다음의 조건을 만족한다.

$$\int_0^{t_0 + \Delta t} \dot{\alpha}(t) dt = 1 \quad (12)$$

그리고 $\dot{\alpha}$ 는 항상 양수이다. “ $\hat{\cdot}$ ”와 “ L ”은 각각 라그랑지안 양과 로그리즘 양(logarithmic quantity)을 나타낸다. 식(11)은 주축(principal material line)과 주진 변형률(principal true strain)의 비가 한 변형 증분 동안 변하지 않고 일정함을 나타낸다. 소재가 로그리즘 변형률(logarithmic strain)의 비가 일정한 경로를 따라 변형할 때 다음의 관계식이 얻어진다.

$$\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{D}}^e + \hat{\mathbf{D}}^p \Leftrightarrow \Delta \hat{\varepsilon} = \Delta \hat{\varepsilon}^e + \Delta \hat{\varepsilon}^p \quad (13)$$

식(13)에서 $\Delta \hat{\varepsilon}$ 는 로그리즘 변형률의 증분으로 다음과 같이 정의된다.

3. 좌굴의 해석

$$\Delta \hat{\epsilon} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \hat{D} dt = \ln U \quad (14)$$

코시 응력(Cauchy stress)의 Jaumann 증분은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\Delta \hat{\sigma} = \hat{C} \Delta \hat{\epsilon}^e = \hat{C} (\Delta \hat{\epsilon} - \Delta \hat{\epsilon}^p) \quad (15)$$

식(15)의 증분 관계는 모두 재료를 따라 움직이는 좌표계(material embedded coordinate)로 표현되기 때문에 재료의 회전에 대해 객관성(objectivity)을 유지하게 된다. 재료의 회전에 따른 응력의 변화는, 재료의 변형에 따른 응력 증분을 계산한 후 다음과 같이 쉽게 고려가 가능하다.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{n+1} &= \sigma_n + \Delta \hat{\sigma} \\ \sigma_{n+1} &= R \hat{\sigma}_{n+1} R^T \end{aligned} \quad (16)$$

변형 증분 이론에서 $\Delta \hat{\epsilon}^e$ 는 $\Delta \hat{\sigma}$ 에 비례(proportional)하기 때문에 $\Delta \hat{\sigma}$ 에 의해 식(15)의 관계식($\Delta \hat{\sigma} = \hat{C} \Delta \hat{\epsilon}^e$)으로 계산된다. 문제는 $\Delta \hat{\epsilon}^p$ 의 크기를 찾아야 한다는 것이다. 변형 형상으로부터 전체 변형률($\Delta \hat{\epsilon}$)은 계산이 되지만 소성 변형률($\Delta \hat{\epsilon}^p$)은 계산이 되지 않는다. 탄소성 유한 요소법에서 응력의 적분은 이와 같이 결정되지 않은 소성 변형률의 크기를 결정하는 과정이다.

주어진 응력 상태($\hat{\sigma}_{n+\alpha} = \sigma_n + \alpha \Delta \hat{\sigma}$)에서 변형 증분 이론에 의해 $\Delta \hat{\epsilon}^p$ 가 $\partial \bar{\sigma} / \partial \hat{\sigma}_{n+\alpha}$ 에 비례(proportional)한다고 가정하면 $\Delta \hat{\epsilon}^p$ 는 $\hat{\sigma}_{n+\alpha}$ 에 따라 결정되고 다음의 근사적인 관계로 나타내어질 수 있다.

$$\Delta \hat{\epsilon}^p = \Delta \bar{\epsilon}^p \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \hat{\sigma}_{n+\alpha}} \quad (17)$$

식(15)을 수치적으로 적용할 때 리턴 매핑과 연계한 일반적인 미드 포인트 룰이 이용될 수 있다. 본 연구에서는 잔류항(residual) ϕ 를 단계별로 조절하여 수렴성을 향상시킨 Yoon⁽¹⁵⁾의 연구를 적용하였다.

분기 좌굴이 발생하는 문제(Fig.2)에서는 해의 경로가 분기점에 도달하면 강성행렬이 특이성(singularity)을 가지게 되고, 보통의 Newton-Raphson 방법으로는 해석을 진행할 수 없게 된다. Ricks⁽¹⁰⁾는 정확하게 분기점을 찾고 또 그 점에서부터 2차 경로(secondary path)를 따라 해석을 진행시키는 연속진행방법(continuation method)을 제안하였다. 연속진행방법으로 해석을 진행하면 정확하게 좌굴 하중을 계산할 수 있고 또한 좌굴 후의 거동도 해석이 가능하다. 본 연구에서는 연속 진행 방법과 변위 증분법에 기초하여 박판성형 공정에서 발생하는 주름을 해석하고자 한다.

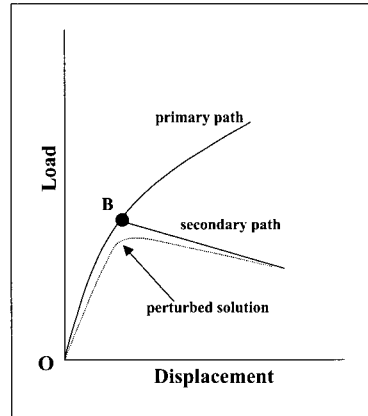


Fig. 2 Solution path of bifurcation type problem

분기 좌굴이 발생하는 점을 지나서 구해지는 해는 1차 경로(primary path)가 아닌 2차 경로(secondary path)를 따라가야 한다. 1차 경로를 따르는 해도 에너지 함수(functional)의 1차미분을 0으로 하지만 불안정한 상태이기 때문이다. 분기점에서 2차 경로를 따르는 해의 증분 추측값은 다음과 같이 놓을 수 있다⁽¹⁰⁾.

$$\Delta u^s = a(\Delta u^s + b v) \quad (18)$$

여기에서 a는 0보다 큰 임의의 실수이고, v는 분기점에서의 아이겐벡터(eigenvector)로 다음 식으로부터 계산된다.

$$K v = 0 \quad (19)$$

여기에서 K 는 분기점에서 계산된 강성행렬이다. 식 (18)에서 1차 경로를 따르는 해 Δu^p 와 2차 경로를 따르는 해 Δu^s 는 수직이어야 한다는 조건으로부터 b 를 계산할 수 있다.

$$b = -\frac{\Delta u^p \cdot \Delta u^p}{\Delta u^p \cdot v} \quad (20)$$

식(20)에서 1차 경로와 아이겐벡터(eigenvector)가 수직이면 b 의 계산이 불가능해진다. 그리고 본 연구에서 해석을 수행하고자 하는 분기 좌굴 예제는 모두 이와 같이 아이겐벡터와 1차 경로가 수직이기 때문에 다음과 같이 간단하게 하였다.

$$\Delta u^s = av \quad (21)$$

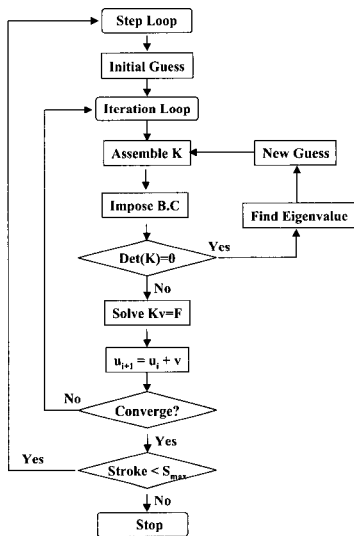


Fig. 3 Solution procedure for bifurcation problem

해의 경로가 분기점에 도달하면 식(21)에서 구한 Δu^s 를 초기 추측치로 설정하고 축차를 계속하여 2차 경로를 따라 해가 진행되도록 하였다. 이 방법을 적용하여 해석을 진행시키는 과정을 Fig. 3에 나타내었다. 변위 증분에 따른 변형 에너지를 최소화 시키는 과정에서 좌굴의 발생을 판단하고 좌굴 모드로의 해석을 유도하였다. 모든 해석은 접촉 조건을 적용하고 수행된다. 접촉 처리는 시도-수정 방법을 통해 적용되었기 때문에 접촉에 관해서도 수립시키는 과정이 수행된다.

4. 예제 해석

4.1 단순지지보의 좌굴 진행해석

본 절에서는 단순지지 보의 좌굴과 좌굴 후 거동을 해석하였고, Euler의 보 이론으로부터 구한 좌굴 하중을 비교하였다. 그리고 접촉에 의해 좌굴의 진행이 제한되어 다른 좌굴 모드로 변형이 진행되는 현상을 관찰하였다. 이 예제를 통해 접촉에 의해 구속이 가해지는 상황에서도 좌굴의 해석이 가능함을 보였다. 또한 보의 길이와 두께를 달리하여 좌굴 해석을 수행함으로써 탄성변형 상태에서 발생하는 좌굴과 소성변형 상태에서 발생하는 좌굴을 관찰하였다.

재료는 자동차 판널용 연강판을 사용하였고 물성은 다음과 같다. 항복식은 Hill(17)의 수직이방성을 적용하였다.

- 두께 : 0.69 mm
- 탄성계수(E) : 200 GPa
- 포아송 비(ν) : 0.3
- 유동응력식(Stress-strain relation) : $\bar{\sigma} = 483.4(0.0055 + \bar{\epsilon})^{0.225}$
- 수직이방성계수(Normal anisotropy, R) : 1.64

Fig. 4는 해석에 사용된 보의 형상과 격자를 보여주고 있다. 요소의 수를 달리하여 해석을 수행해 보았지만 좌굴 하중에는 영향을 주지 않았고, 단지 좌굴 후 거동에만 약간의 영향을 주었기 때문에 결과를 언급하지는 않았다. 좌굴이 발생하기 전에는 기하학적인 비선형성이 거의 없기 때문으로 사료된다.

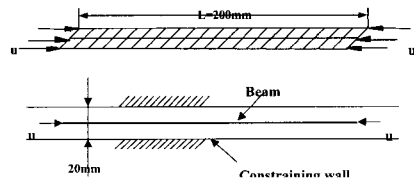


Fig. 4 Problem definition for the analysis of postbuckling of strips

Fig. 5와 Fig. 6은 해석이 진행되는 과정 즉, 좌굴이 발생하는 과정을 보여준다. Fig.5는 단순 지지 보의 좌굴 거동이고, Fig. 6은 양 끝이 고정된(clamped) 보의 좌굴 거동이다. 문제 자체가 2차원 거동을 보이는 문제이기

때문에 단면으로 나타내었다. 단순지지 보의 경우 양끝에서의 압축변위가 0.00108mm ($\epsilon_e=0.0000108$)일 때 좌굴이 발생하였다. 계산한 좌굴 모드가 좌굴 발생 형상과 같다. 아이겐벡터(eigenvector)는 가장 큰 성(component)을 5mm가 되도록 하여 도시하였고, 좌굴 형상은 너무 작아서 구별이 되지 않기 때문에 Z방향으로 30배 확대하여 도시하였다. 접촉이 발생한 후 2차의 좌굴 발생은 변위가 0.7mm($\epsilon_e=0.0007$)에서 일어났다. 좌굴 모드는 1파장 정현(sine)곡선으로 나타나고 있지만 접촉에 의해 구속이 되어 실제 변형은 3/2파장 정현(sine)곡선으로 일어나고 있다. 이것은 2차 좌굴이 발생할 때 넓은 영역에서 접촉이 발생했기 때문으로 사료된다. 그림에서는 아이겐모드(eigenmode)를 확대해서 그렸기 때문에 소재가 벽으로의 침투가 심해 보이지만 실제로는 크지 않고 축차를 통해서 수정된다. 그러나, Fig.6에 보인 고정된 보의 경우에는 2차 좌굴이 발생할 때 접촉이 많이 되지 않기 때문에 1파장 정현(sine)곡선으로 변형이 일어나고 있다. $u=3.38\text{mm}$ ($\epsilon_e=0.0338$)일 때 형상이 완전한 1파장 정현(sine)곡선은 아니지만 완전한 1파장 정현(sine)곡선을 향해 진행되고 있는 중이다. 본 해석에서는 소재가 매우 얇고 길이가 길기 때문에 소성 변형은 발생하지 않았다. 모든 소재가 탄성범위 내에 있기 때문에 $u=3.38\text{mm}$ 이상일 때 갑자기 완전한 1파장 정현(sine)곡선으로 변형되기 때문에 수렴이 되지 않았다. 즉, 변위가 너무 커서 해를 찾지 못한 것으로 사료된다.

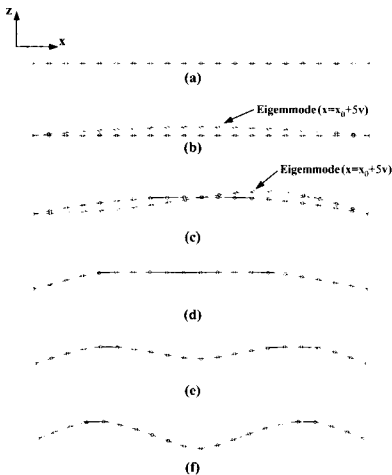


Fig. 5 Buckling behavior of compressed strip (simply supported edge condition); (a)initial($2u/L=0$) (b)first bifurcation($2u/L=0.0000108$) (c)second bifurcation ($2u/L=0.007$) (d) $2u/L=0.01$ (e) $2u/L=0.01$ (f) $2u/L=0.04$

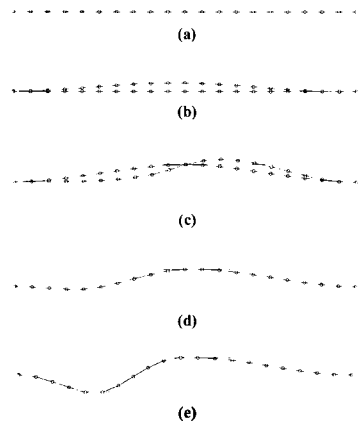


Fig. 6 Buckling behavior of compressed strip (clamped edge condition); (a)initial($2u/L=0$) (b)first bifurcation($2u/L=0.000044$) (c)second bifurcation ($2u/L=0.006$) (d) $2u/L=0.01$ (e) $2u/L=0.0338$

Fig. 7는 Euler의 보 이론으로부터 구한 좌굴 하중과 비교한 결과이다. Euler의 보 이론으로 구한 좌굴 하중은 다음의 식으로 나타내어진다.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2(1-\nu^2)}, \text{ 단순 지지된 보} \quad (22)$$

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2(1-\nu^2)}, \text{ 고정된 보} \quad (23)$$

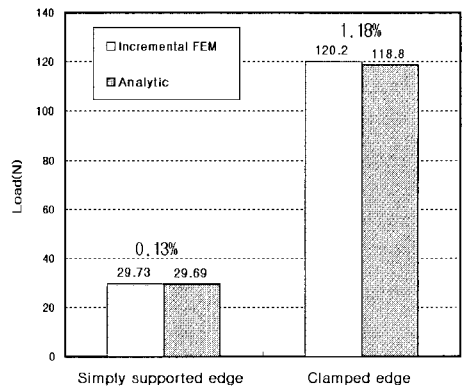


Fig. 7 Comparison of computed buckling loads with analytic solutions (strip)

Fig. 8은 단순지지된 보의 좌굴에 대한 하중-변위곡

선을 보여준다. 비교를 위해 ABAQUS를 이용해 구한 결과와 함께 나타내었다. ABAQUS에서는 좌굴 전 해석과 좌굴 후 해석을 연속적으로 수행할 수 없기 때문에 z-방향으로 정현(sine)곡선($z=asinx$)의 초기 결함을 주고 해석하였다. ABAQUS에서 해석은 벽과의 접촉이 있기 전까지만 해석하였다. ABAQUS결과의 경우 초기 결함이 있기 때문에 좌굴 하중이 작게 계산이 되었다. 그리고 초기 결함이 클수록 하중 곡선이 아래에 위치함을 알 수 있다. 초기결함의 크기가 0.1보다 작을때에는 해석이 수행되지 않았다. 본 연구의 결과에서는 좌굴이 발생한 후 벽과의 접촉이 있기 전에는 하중이 거의 일정하게 유지가 되고 있음을 알 수 있다.

소성변형이 동반될 때의 좌굴 거동을 살펴보기 위해 두께와 길이를 달리하여 해석을 수행하였고 결과를 Fig.9에 나타내었다. 10mm길이의 고정된(clamped) 보에 대해 두께를 0.3mm, 0.4mm, 0.5mm, 0.6mm 인 경우에 대해 각각 해석을 수행하였다. 이 경우에는 좌굴 후에 소재의 곡률진 부위의 외각 부분에서 소성 변형이 발생하기 때문에 하중이 감소하는 현상이 발생하고 있다.

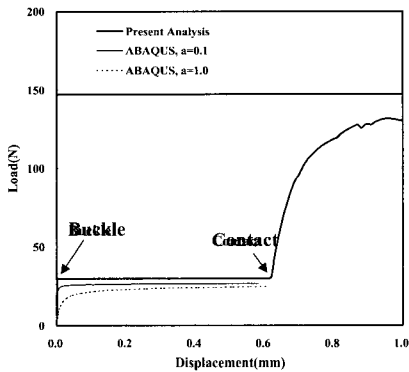


Fig. 8 Load-displacement curve of pin-jointed strip buckling

두께가 0.3mm인 경우에는 탄성영역에서 좌굴이 발생하고 좌굴 후에 소성변형이 일어났고, 두께가 0.4mm, 0.5mm인 경우에는 소재가 소성 영역으로 들어가면서 갑자기 바로 좌굴이 발생하였다. 소재가 탄성변형 영역에서 소성변형 영역으로 진행되면 갑자기 강성이 떨어지기 때문으로 사료된다. 그러나 두께가 0.6mm인 경우에는 소재가 소성 영역으로 들어 갔을 때 바로 좌굴이 발생하지 않고 변형이 더 진행되었을 때 좌굴이 발생한다. 소재의 두께가 두꺼워지면 좌굴에 대한 저항력이 커짐을 알 수 있다. 이 예제를 통해 재료가 탄소성으로 묘사 될

때에도 좌굴의 해석이 수행될 수 있음을 보여 주었다.

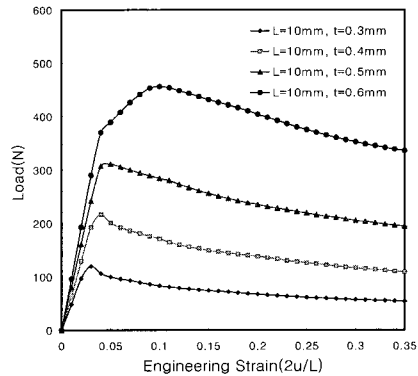


Fig. 9 Load-displacement curve for elastic-plastic postbuckling of strips

4.2 원형박판의 압출좌굴 해석

원형의 박판소재가 균일한 압축응력을 받을 때 발생하는 좌굴을 제안한 분기이론을 이용하여 해석하였다. 앞 절에서와 같이 원형 소재의 가장자리가 단순 지지된 경우와 고정된(clamped) 경우에 대해 좌굴 후의 변형 형상을 살펴 보았고 좌굴 하중에 대해서도 이론적인 결과와 비교하였다. 이 경우에도 원형판의 직경이 소재의 두께에 비해 매우 크기 때문에 해석이 완전히 수행될 때까지 소재는 탄성변형만을 하였다.

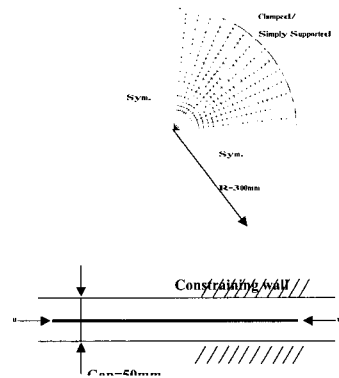


Fig. 10 Problem definition for the analysis of postbuckling of circular plate

Fig. 10은 해석된 문제를 보여주고 있다. 원형 박판의

직경은 600mm이고 두께는 0.69mm이다. 대칭성 경계조건을 부여하고 1/4만 해석을 수행하였다. 그리고 보의 좌굴에서와 같이 접촉에 의해서 좌굴이 진행되는 형상을 보기 위해 50mm간격으로 구속 벽을 설치하였다.

Fig. 11는 단순지지된 경우에 좌굴의 진행을 보여주고 있다. 공칭 변형률(u/R)이 0.00001일 때 처음 좌굴이 발생하였다. 그리고 더 이상이 좌굴이 없이 쟁반 모양으로 변형이 되었다. 특이한 것은 원판의 가장자리 부분만이 변형을 하고, 있고 그 외에 안쪽 부분은 거의 변형을 하지 않고 있다. Fig. 12은 가장자리가 고정된(clamped) 경우에 좌굴이 진행되는 형상을 보여준다. 단순지지된 경우와는 달리 공칭 변형률이 0.000027일 때 처음 좌굴이 발생한 후 공칭 변형률이 0.0002일 때 2차 좌굴이 발생하였다. 1차의 좌굴은 주름이 없이 평면방향 변형에서 평면에 수직인 방향으로의 좌굴이었다. 그러나 2차의 좌굴은 원판의 가장자리 부분에 주름을 발생시킨다. 이와 같이 1차 좌굴후에 2차의 좌굴이 발생한 것은 끝이 고정된 경우에는 1차 좌굴이 발생하여도 시스템이 완전하게 안정화 되지 않기 때문이다. 즉, 1차 좌굴에 의해서 안정하게 되려는 변형을 고정된 가장자리 부분이 방해하기 때문이다. 계속해서 압축이 진행되면 원판의 가운데 부분이 구속으로 주어진 벽에 접촉하게 된다. 그리고 가장자리의 주름의 수는 증가한다.

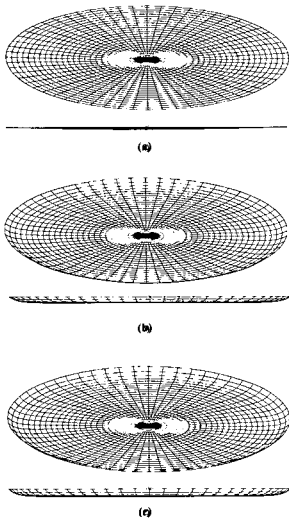


Fig. 11 Buckling behavior of compressed circular plate(clamped edge condition); (a)first bifurcation ($u/R=0.000027$) (b)second bifurcation($u/R=0.0002$) (c) $u/R=0.0067$ (d) $u/R=0.01$ (e) $u/R=0.0133$

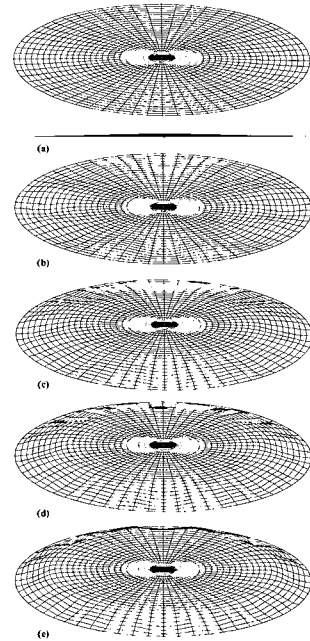


Fig. 12 Buckling behavior of compressed circular plate(simply supported edge condition); (a)first bifurcation ($u/R=0.00001$) (b) $u/R=0.0067$ (c)0.0133

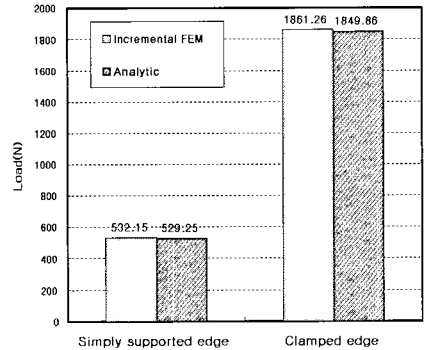


Fig. 13 Comparison of computed buckling loads with analytic solutions(circular plate)

Fig. 13은 해석에서 구한 좌굴 하중과 이론적으로 구한 좌굴 하중을 비교한 것이다. 이론적인 좌굴 하중은 다음의 식으로 계산하였다.⁽¹⁸⁾

$$P_{cr} = \frac{4.20\pi EI}{R^2(1-\nu^2)}, \text{ 단순 지지된 원형판} \quad (24)$$

$$P_{cr} = \frac{14.68\pi EI}{R^2(1-\nu^2)}, \text{ 고정된(clamped) 원형판} \quad (25)$$

여기에서 R은 원형판의 반경이다. 해석에서 구한 좌굴 하중이 이론에서 구한 좌굴 하중보다 약간 크게 나타나고 있지만 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

4.3 원통형컵 디프 드로잉에서의 주름발생해석

원통형 컵 디프 드로잉 공정에서 발생하는 주름은 분기 좌굴 해석에 의해 해석이 수행되어야 하는 대표적인 예제이다. Cao⁽¹⁹⁾는 초기 박판소재에 형상결함을 주고 주름발생을 해석한 바 있다. 하지만 서론에서 언급했듯이 결합에 대한 임의성과 민감도 문제가 있다는 단점이 있다.

본 연구에서는 3장에서 기술한 방법대로 분기 좌굴 이론을 유한요소 해석에 도입하여 주름의 발생을 해석하였다. 디프 드로잉의 금형치수와 초기 소재는 Fig. 14에 나타냈다. 해석은 1/4부분을 22*45요소로 분할하여 수행하였다. 블랭크 홀더 처리는 블랭크 홀딩력에 따른 홀더 간격의 조절이 어렵기 때문에 일정한 간격을 유지하면서 수행하였다.

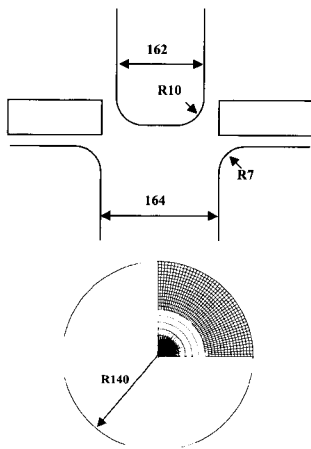


Fig. 14 Tool and mesh for the analysis of cylindrical cup deep drawing process

Fig. 15은 홀더 틈새가 2.0mm일때 주름발생과정을 보여주고 있다. 틈새가 크기 때문에 드로잉이 시작되면서 바로 분기(bifurcation)가 발생하였다. 그리고 4.0mm 후에는 해가 수렴하지 않았다. 다이의 곡률과 주름에 의한 곡률이 만나는 부분에서 요소가 유연하게 변형하지

못하기 때문으로 사료된다. Fig. 16는 틈새가0.7mm인 경우 주름의 발생과정을 보여준다. 이 경우에는 외부에서 블랭크 홀딩력을 가하지 않았어도 주름발생이 많이 지연되었다. 접촉에 의해서 어느 정도 구속이 되었기 때문으로 사료된다. 펀치변위가 14mm일 때 처음으로 아이겐모드(eigenmode)가 발생하여 4개의 주름이 발생하였다. 아이겐모드(eigenmode)는 Fig. 15에서와 같이 원주를 따라 1과장 정현(sine)곡선형태로 나타나지만 접촉과 관련하여 축차 도중 주름의 수가 증가한 것이다. 그리고 해석이 진행될수록 주름의 발생은 현저해지고 있다. 펀치행정이 21mm 이상일 때에는 해가 수렴되지 않았다. 앞의 예제에서처럼 플랜지 부분에서 주름이 발생했기 때문에 플랜지부에서 다이어계부로의 변형이 유연하지 못하기 때문으로 사료된다.

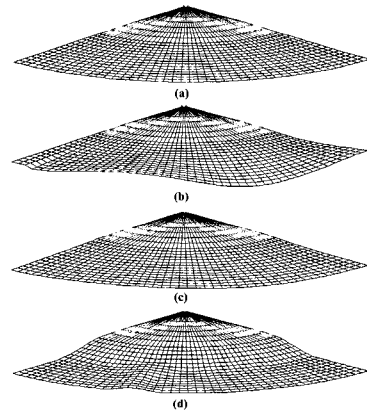


Fig. 15 Wrinkling initiation and growth in cylindrical cup deep drawing process(blankholder gap=2.0mm, t=0.69mm); (a)stroke 0.5mm (b)eigenmode(stroke 0.5mm) (c)stroke 1.0mm (d)stroke 4.0mm

지금까지 보의 압축 좌굴과 원형판의 압축 좌굴, 그리고 원통형 컵 디프드로잉에서이 주름의 발생을 해석한 결과를 기술하였다. 좌굴 하중이 이론적인 결과와 매우 잘 일치했고, 좌굴 거동이 물리적으로 예측되는 현상을 그대로 묘사해 주고 있음을 알 수 있었다. 이상의 결과로 본 연구가 탄소성 재료의 좌굴 및 주름의 해석에 신빙성 있게 적용될 수 있다고 사료된다.

5. 결론

본 연구에서는 분기 좌굴 이론을 응축 셸 요소를 이

용하는 탄소성 유한요소법에 도입하여 분기 좌굴을 해석하였다. 보의 압축 좌굴 및 원형판의 압축 좌굴을 해석하여 제안된 방법의 신빙성을 보였다. 계산된 좌굴 하중이 이론적인 결과와 매우 잘 일치했고, 접촉이 있는 경우에도 좌굴 거동이 물리적으로 예측되는 현상을 그대로 묘사해 주고 있음을 알 수 있었다. 또한 변형이 탄성에서 소성으로 전환될 때 강성이 작아짐으로 인해 좌굴이 잘 발생함을 알 수 있었다.

그리고 복잡한 접촉과 비선형성이 크게 포함되어 있는 원통형 컵 디프 드로잉에서 발생하는 주름을 해석해 봄으로써 본 방법에 의한 주름발생 해석 능력을 보였다. 이상의 결과로 본 연구가 탄소성 재료의 좌굴 및 주름의 해석에 신빙성 있게 적용될 수 있다고 사료된다.

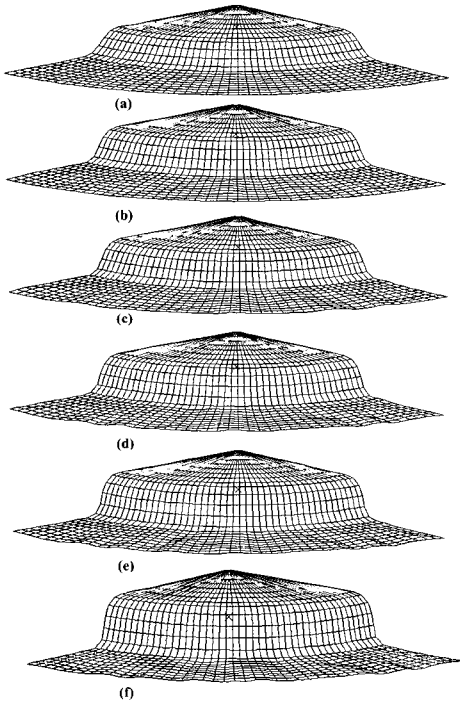


Fig. 16 Wrinkling initiation and growth in cylindrical cup deep drawing process(blankholder gap=0.7mm, t=0.69mm); (a)stroke 10mm (b)stroke 13.5mm (c)stroke 14mm (d)stroke 16mm (e)stroke 18mm (f)stroke 21mm

참 고 문 헌

(1) D. J. Yoo, I. S. Song, D.Y. Yang, and J. H. Lee, 1994, "Rigid-plastic finite element analysis of

sheet metal forming processes using continuous contact treatment and membrane element incorporating bending effect," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 36, pp.513~546.

(2) J. Proubet, 1994, "Numerical simulations of wall wrinkling in food can drawing," *J. Mater. Process. Technol.*, vol. 45, pp.223~228.

(3) K. Nakamura and T. Nakagawa, 1984, "Fracture mechanism and fracture control in deep drawing with hydraulic counter pressure. studies on hydraulic counter pressure forming I-," *J. Jpn. Soc. Technol. Plast.*, vol. 25, pp.831~838.

(4) L. C. Zhang and T. X. Yu, 1991, "An experimental investigation into the stamping of elastic-plastic circular plates," *J. Mater. Process. Technol.*, vol. 28, pp.321~334.

(5) N. Yamaki, 1958, "Buckling of a thin annular plate under uniform compression," *J. Appl. Mech.*, vol. 25, pp.267~273.

(6) T. X. Yu and W. Johnson, 1982, "The buckling of annular plates in relation to the deep drawing process," *Int. J. Mech. Sci.*, vol.24, pp.175~188.

(7) Y. Tomita and A. Shindo, 1988, "Onset and growth of wrinkling in thin square plate subjected to diagonal tension," *Int. J. Mech. Sci.*, vol.30, pp.921~931.

(8) K. Yoshida, 1983, "Purpose and feature of Yoshida buckling test(YBT)," *J. Jpn. Soc. Techn. Plasticity*, vol.24, pp.901.

(9) X. Wang and Lawrence H. N. Lee, 1993, "Postbifurcation behavior of wrinkles in square metal sheet under Yoshida test," *I. J. Plasticity*, vol.9, pp.1~19.

(10) E. Ricks, 1979, "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems," 1979, *Int. J. Solids Structures*, vol. 15, pp.529~551.

(11) H. S. Lee, D. W. Jung, J.-H. Jeong and S. Im, 1994, "Finite element analysis of lateral buckling for beam structures," *Comp. & Struct.*, vol.53, pp.1357~1371.

- (12) G. Stanley, 1985, Continuum-based shell elements, Ph.D Thesis, Stanford University
- (13) K. J. Bathe, 1982, Finite element procedures in engineering analysis, Prentice-Hall.
- (14) T. J. R. Hughes, 1987, The finite element method, Prentice-Hall.
- (15) J. W. Yoon, D. Y. Yang and K. Chung, 1999, "A elasto-plastic finite element method based on incremental deformation theory and continuum based shell elements for planar anisotropic sheet materials," Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., vol.174, pp.23~56.
- (16) K. Chung and O. Richmond, 1993, "A deformation theory of plasticity based on minimum plastic work," Int. J. Plasticity, vol.9, pp.907~920.
- (17) R. Hill, 1948, "A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals," Proc. Roy. Soc. London, vol.A193, pp.281~297.
- (18) S. P. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, 1961, McGRAW-HILL.
- (19) J. Cao and M. C. Boyce, 1995, "Optimization of sheet metal forming processes by instability analysis," Proceedings of NUMIFORM' 95, A. A. Balkema, Rotterdam, pp.675~679.