

< 논 문 >

봉의 비틀림 고유진동에 대한 인접 점성유체의 영향

The Effect of an Adjacent Viscous Fluid on the Torsional Vibration of a Rod

김진오* · 전한용**

Jin Oh Kim and Han Yong Chun

(1999년 11월 26일 접수 ; 2000년 1월 20일 심사완료)

Key Words : Torsional Vibration(비틀림 진동), Viscosity(점성), Natural Frequency(고유진동수), Damping Rate(감쇠율), Perturbation Technique(섭동법)

ABSTRACT

This paper deals with the theoretical study on the effect of the viscosity of an adjacent viscous fluid on the characteristics of the torsional vibration of a rod with fixed-free boundary conditions. Expressions for the natural frequency and damping factor have been obtained as functions of the viscosity of the fluid by exact and asymptotic analyses. The results provide quantitative information of the natural frequency reduction and damping rate affected by the fluid viscosity.

1. 서 론

유체에 담긴 축이나 봉의 진동은 인접 유체에 의해 영향을 받는다. 봉이나 판이 횡진동을 하는 경우 고체의 운동은 인접 유체에 압력을 가하고, 유체로부터 부가질량 효과를 받아 고유진동수가 변화된다⁽¹⁾. 봉이 비틀림 진동을 하는 경우 고체의 운동은 인접 점성유체에 전단 응력을 가하고, 유체로부터 점성 저항을 받아 봉의 고유진동 특성이 변화되는 것이 예상된다. 고체의 전단운동과 점성유체의 운동 사이의 상호작용 메커니즘에 의존하여, 탄성파를 이용한 유체 점도 측정 방법이 제시된 바 있다^(2,3).

본 논문은 단면이 원형인 봉이 점성유체에 담겨 있을 때, 봉의 비틀림 진동과 점성 유체의 상호작용을 이론적으로 해석한다. Fig. 1에 보인 바와 같이, 한쪽 끝은 고정되고 다른 쪽 끝은 자유로운 봉을 대상으로 비틀림 고유진동 특성을 다룬다. 이를 위해 해석적 방법에 의한

엄밀해와 섭동(perturbation)법에 의한 근사해를 구한다. 그 결과로부터 점성유체로 인한 고유진동수 변화와 감쇠율을 밝힌다.

2. 문제의 정식화

Fig. 1에 보인 바와 같이 단면이 원형인 봉이 점성유체에 담긴 상태에서 비틀림 고유진동 특성을 고려한다. 고체 봉의 전단탄성계수는 G 이고 밀도는 ρ_s 이며, 유체

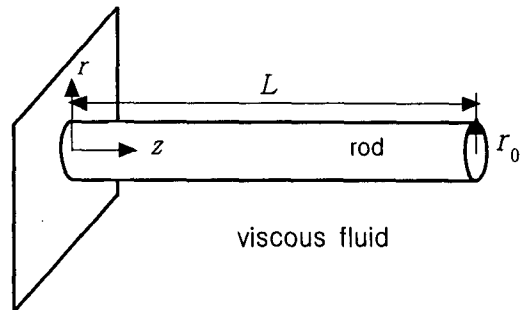


Fig. 1 Schematic diagram a circular rod submerged in a viscous fluid

* 정회원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과

** 숭실대학교 대학원 기계공학과

의 점도는 μ 이고 밀도는 ρ_f 이다. 봉은 왼쪽 끝($x=0$)에서 고정되어 있고, 오른쪽 끝($x=L$)에서 자유롭다. 봉의 길이가 단면의 치수에 비해 충분히 크다는 전제하에, 봉의 오른쪽 끝 면에서 점성유체와의 상호작용은 무시할 만큼 작다고 가정한다.

고체 봉에서 원주방향 변위 $u_\theta(r, z, t)$ 와 유체에서 원주방향 속도 $v_\theta(r, z, t)$ 는 각각 다음 운동방정식의 지배를 받는다.^(4,5)

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = G \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (1)$$

$$\rho_f \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) \quad r_0 \leq r \leq \infty \quad (2)$$

그리고 경계조건은 다음과 같다.

$$u_\theta = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (3)$$

$$\tau_{z\theta} \left(= G \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \approx 0 \quad \text{at } z = L \quad (4)$$

$$u_\theta = 0 \quad \text{at } r = 0 \quad (5)$$

$$G \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \quad \text{at } r = r_0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = v_\theta \quad \text{at } r = r_0 \quad (7)$$

$$v_\theta \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad (8)$$

위 식들을 길이 r_0 , 속도 $c_0 = (G/\rho_s)^{1/2}$, 시간 r_0/c_0 로써 무차원화하면, 고체의 무차원 변위 u 와 유체의 무차원 속도 v 및 무차원변수 $\xi (= r/r_0)$, $\zeta (= z/r_0)$, $\tau (= t c_0/r_0)$ 로써 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \quad 0 \leq \xi < 1 \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v}{\xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} \right) \quad 1 \leq \xi < \infty \quad (10)$$

$$u = 0 \quad \text{at } \zeta = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} \approx 0 \quad \text{at } \zeta = l \quad (12)$$

$$u = 0 \quad \text{at } \xi = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{\xi} = \frac{\rho}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v}{\xi} \right) \quad \text{at } \xi = 1 \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = v \quad \text{at } \xi = 1 \quad (15)$$

$$v \rightarrow 0 \quad \text{as } \xi \rightarrow \infty \quad (16)$$

여기서 $\rho = \rho_f / \rho_s$, $R = \rho_f r_0 c_0 / \mu$ 이고, $l = L / r_0$ 이다. R 은 Reynolds수 처럼 정의된 상수로서 점도에 반비례한다.

식 (9),(10)의 해로서 경계조건 (11),(12)를 만족시키는 것은 다음과 같은 형태를 취한다.

$$u(\xi, \zeta, \tau) = U(\xi) \sin k\zeta \exp[i(\omega + ih)\tau] \quad (17)$$

$$v(\xi, \zeta, \tau) = V(\xi) \sin k\zeta \exp[i(\omega + ih)\tau] \quad (18)$$

여기서 $\omega (= \tilde{\omega} r_0 / c_0)$ 와 $h (= \tilde{h} r_0 / c_0)$ 는 각각 고유진동수 $\tilde{\omega}$ 와 단위시간당 대수감쇠율 \tilde{h} 의 무차원 표현이고, k 는 무차원 파동수(wave number)로서 축방향 모드수 n 에 따라 다음과 같이 표현된다.

$$k = \frac{(2n-1)\pi}{2l} \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

3. 엄밀해

식 (17),(18)을 식 (9),(10)과 경계조건 (13)~(16)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 된다.

$$U'' + \frac{1}{\xi} U' - (p^2 + \frac{1}{\xi^2})U = 0 \quad (20)$$

$$V'' + \frac{1}{\xi} V' - (q^2 + \frac{1}{\xi^2})V = 0 \quad (21)$$

$$U(0) = 0 \quad (22)$$

$$\left(U' - \frac{U}{\xi} \right) \Big|_{\xi=1} = \frac{\rho}{R} \left(V' - \frac{V}{\xi} \right) \Big|_{\xi=1} \quad (23)$$

$$i(\omega + ih)U(1) = V(1) \quad (24)$$

$$V(\infty) \rightarrow 0 \quad (25)$$

여기서

$$p = \sqrt{k^2 - (\omega + ih)^2}, \quad q = \sqrt{k^2 + i(\omega + ih)R}$$

이다.

식 (20),(21)의 해는 각각 복소 변수의 Bessel 함수로 표현되는데, 경계조건 (22),(25)를 만족하는 해는 다음과

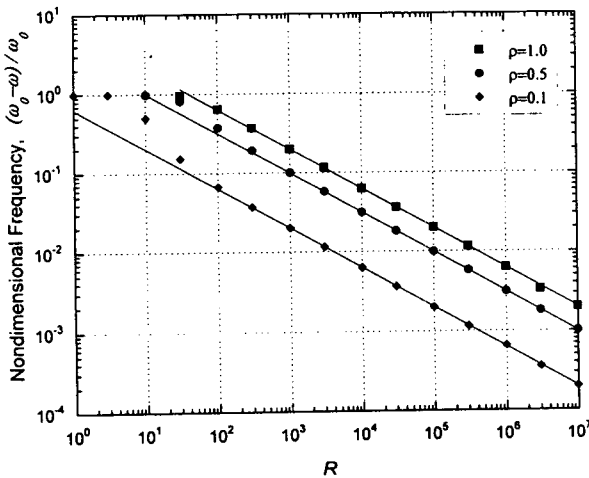
같다.

$$U(\xi) = AI_1(p\xi), \quad V(\xi) = BK_1(q\xi) \quad (26,27)$$

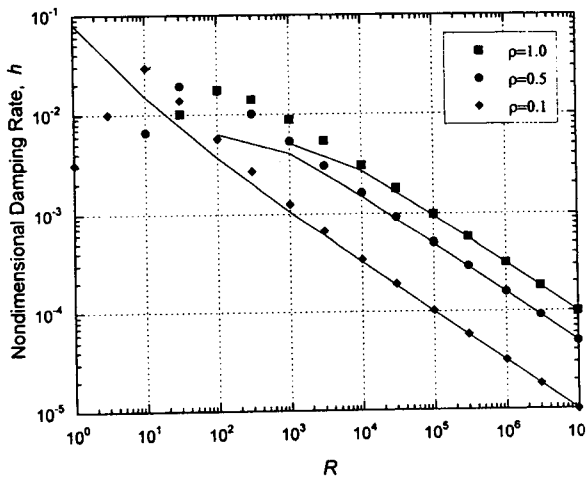
여기에서 경계조건 (23),(24)를 적용하면 다음과 같이 ω 와 h 의 고유치문제를 얻는다.

$$\frac{pI_2(p)}{I_1(p)} + \frac{i(\omega+ih)\rho}{R} \frac{qK_2(q)}{K_1(q)} = 0 \quad (28)$$

복소방정식 (28)은 주어진 k 값에 대해서 (ω, h) 와 (R, ρ) 의 관계, 즉 $\omega = \omega(R, \rho)$ 와 $h = h(R, \rho)$ 를 제공한다. 식 (28)의 근은 Mathematica⁽⁶⁾ 등의 도구를 이용하



(a) Nondimensional frequency, ω



(b) Nondimensional damping rate, h

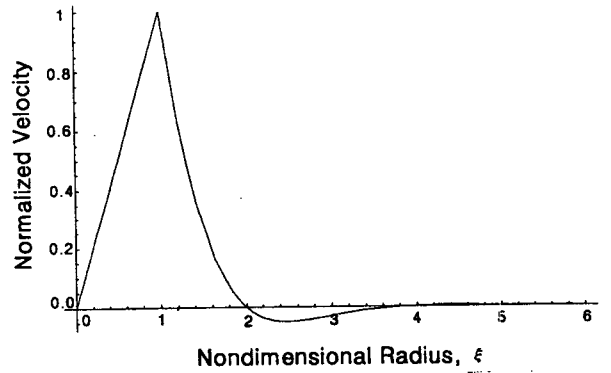
Fig. 2 The nondimensional natural frequency and damping rate depicted as a function of R for $k=0.05$ and various ρ

여 계산할 수 있다. 가령 반경방향 기본모드이면서 축방향 기본모드 ($n=1$)에 있어서 $l=30$ 일 경우, 즉 $k=0.05$ 일 때에 대한 결과를 Fig. 2에 부호로 나타내었다. 여기서 ω_0 는 점성유체의 영향이 없을 때(즉 $R \rightarrow \infty$)의 고유진동수이다.

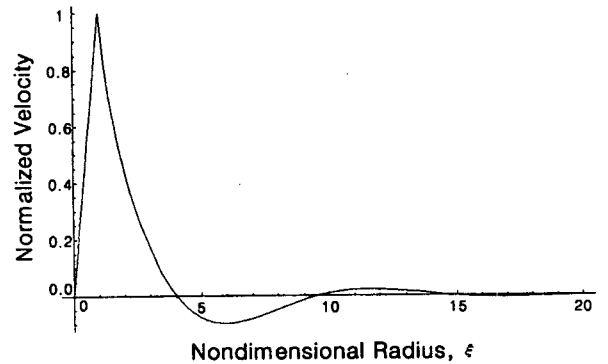
또한 식 (26),(27)에 사용된 계수 A 와 B 는 경계조건을 만족시키기 위해 다음의 관계를 갖는다.

$$B = \frac{i(\omega+ih)I_1(p)}{K_1(q)} A \quad (29)$$

이를 이용하여 고체에서의 변위분포와 유체에서의 속도 분포를 중심으로부터의 거리 r 의 함수로 구할 수 있다. 고체의 변위는 속도로 환산할 수도 있다. 예를 들어 $k=0.05$, $\rho=0.1$ 인 경우에 R 이 100일 때와 10일 때, 기본모드에 대해서 고체와 유체에서의 속도분포를 구해보면 Fig. 3과 같다. 고체와 유체의 경계면($\xi=1$)에서의 속도를 기준으로 정규화하여 나타낸 결과이다.



(a) $R = 100$



(b) $R = 10$

Fig. 3 Normalized velocity profile at the solid and fluid when $k=0.05$, $\rho=0.1$

4. 근사해

엄밀해로 구한 식 (28)에서는 고유진동수 ω 와 감쇠율 h 가 R 과 ρ 의 함수로 명시되지 않는 단점이 있다. 현실적으로는 $R \gg 1$ 이므로, R 의 역수에 해당하는 새로운 변수 $\varepsilon = R^{-1/2}$ 을 정의하면 $\varepsilon \ll 1$ 이어서, 섭동(perturbation)법⁽⁷⁾에 의한 근사해를 구할 수 있다.

상당히 작은 크기의 변수 ε 을 이용해 유체에 대하여 확장한 좌표를 $\eta = (\xi - 1) / \varepsilon$ 로 정의하고, 식 (17),(18)을 대입하면 식 (9),(10)과 경계조건 (13)~(16)은 다음과 같이 변환된다.

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dU}{d\xi} - \frac{1}{\xi^2} U - [k^2 - (\omega + ih)^2] U = 0 \quad (30)$$

$$\frac{d^2 V}{d\eta^2} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\eta} \frac{dV}{d\eta} - \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon\eta)^2} V - [k^2 \varepsilon^2 + i(\omega + ih)] V = 0 \quad (31)$$

$$U(0) = 0 \quad (32)$$

$$\left(U' - \frac{U}{\xi} \right) \Big|_{\xi=1} = \rho \left(\varepsilon V' - \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon\eta} V \right) \Big|_{\eta=0} \quad (33)$$

$$V(0) = i(\omega + ih) U(1) \quad (34)$$

$$V(\infty) \rightarrow 0 \quad (35)$$

R 값이 무한대 (즉 ε 값이 0)으로 되는 경우는 인접유체가 없거나 인접유체가 비점성인 상황에 해당한다.

$R > 1$ (즉 $\varepsilon < 1$)인 경우에 기본모드에 대한 근사해는 다음과 같은 급수 형태로 표현될 수 있다.

$$U(\xi) = U_0 \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(\xi) \quad (36)$$

$$V(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v_n(\eta) \quad (37)$$

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n \quad (38)$$

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n h_n \quad (39)$$

식 (36)~(39)의 급수를 식 (30)~(35)에 대입하고 ε 의 오름차순으로 정리하여, ε 의 차수별 지배방정식과 경계조건에 의해 다음과 같이 단계적으로 해를 구한다.

4.1 유체영역 ε^0 차 해

선도차수 $O(\varepsilon^0)$ 에 대해서 고체영역에서의 지배방정

식과 경계조건은 인접유체의 영향을 받지 않는 전형적인 비틀림 진동에 관한 식이다. 따라서 이에 대한 해는 이미 식 (36)~(39)에 반영되어 있다.

선도차수에 대한 유체영역 지배방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$v_0'' - (i\omega_0)v_0 = 0 \quad (40)$$

$$v_0(0) = i\omega U_0 \quad (41)$$

$$v_0(\infty) \rightarrow 0 \quad (42)$$

이들을 만족시키는 해는 다음과 같다.

$$v_0(\eta) = i\omega_0 U_0 \exp[-(1+i)\sqrt{\omega_0/2}\eta] \quad (43)$$

4.2 고체영역 ε^1 차 해

제 1차수 $O(\varepsilon^1)$ 에 대한 고체영역 지배방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$u_1'' + \frac{1}{\xi} u_1' - \frac{1}{\xi^2} u_1 = -2\omega_0(\omega_1 + ih_1) U_0 \xi \quad (44)$$

$$u_1(0) = 0 \quad (45)$$

$$\left(u_1' - \frac{1}{\xi} u_1 \right) \Big|_{\xi=1} = \rho v_0' \Big|_{\eta=0} \quad (46)$$

앞서 구한 v_0 를 대입한 후 위 식들을 만족하는 해가 존재할 조건으로부터 다음 관계를 얻는다.

$$\omega_1 = -\rho\sqrt{2\omega_0}, \quad h_1 = \rho\sqrt{2\omega_0} \quad (47,48)$$

그리고 해는 다음과 같다.

$$u_1(\xi) = \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \rho\omega_0\sqrt{\omega_0} U_0 \xi^3 \quad (49)$$

4.3 유체영역 ε^1 차 해

제 1차수 $O(\varepsilon^1)$ 에 대한 유체영역 지배방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$v_1'' - (i\omega_0)v_1 = -v_0' + i(\omega_1 + ih_1)v_0 \quad (50)$$

$$v_1(0) = i\omega_0 u_1(1) + i(\omega_1 + ih_1) U_0 \quad (51)$$

$$v_1(\infty) \rightarrow 0 \quad (52)$$

이들을 만족시키는 해는 다음과 같다.

$$v_1(\eta) = [(1+i)\rho\sqrt{2\omega_0}(\omega_0^2/4 - 1) - i(1/2 - 2\rho)\omega_0\eta] U_0 \exp[-(1+i)\sqrt{\omega_0/2}\eta] \quad (53)$$

4.4 고체영역 ϵ^2 차 해

제 2차수 $O(\epsilon^2)$ 에 대한 고체영역 지배방정식과 경계 조건은 다음과 같다.

$$u_2'' + \frac{1}{\xi} u_2' - \frac{1}{\xi^2} u_2 = -2\omega_0(\omega_1 + ih_1)u_1 - [2\omega_0(\omega_2 + ih_2) + (\omega_1 + ih_1)^2]U_0\xi \quad (54)$$

$$u_2(0) = 0 \quad (55)$$

$$(u_2' - \frac{1}{\xi} u_2)|_{\xi=1} = \rho(v_1' - v_0)|_{\eta=0} \quad (56)$$

앞서 구한 v_0, v_1 과 u_1 . 그리고 ω_1, h_1 을 대입한 후 우 식들을 만족하는 해가 존재할 조건으로부터 다음 관계를 얻는다.

$$\omega_2 = 0, \quad h_2 = \rho - 6\rho^2 + 2\rho\omega_0 + \frac{\rho^2\omega_0^2}{3} \quad (57,58)$$

그리고 해는 다음과 같다.

$$u_2(\xi) = -\frac{i\omega_0}{4}[\rho - 8\rho^2 + 2\rho\omega_0 + \frac{\rho^2\omega_0^2}{3}(1 + \xi^2)]U_0\xi^3 \quad (59)$$

4.5 고유진동 특성

식 (49),(59)를 식 (36)에 대입함으로써, 점성유체의 영향을 받아 고체영역이 변형되는 변위 분포를 구할 수 있다. 또한 식 (43),(53)을 식 (37)에 대입함으로써, 봉의 비틀림 진동에 따른 점성유체의 운동속도 분포를 구할 수 있다.

한편 식 (47),(48)과 (57),(58)을 식 (38),(39)에 대입하면 다음과 같다.

$$\omega = \omega_0 - \epsilon\rho\sqrt{2\omega_0} + O(\epsilon^3) \quad (60)$$

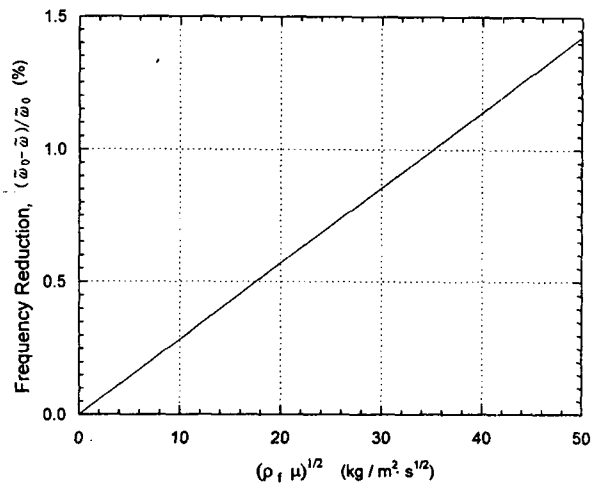
$$h = \epsilon\rho\sqrt{2\omega_0} + \epsilon^2(\rho - 6\rho^2 + 2\rho\omega_0 + \frac{\rho^2\omega_0^2}{3}) + O(\epsilon^3) \quad (61)$$

식 (60),(61)은 봉이 비틀림 진동을 할 때 인접 점성유체로 인해 영향받은 고유진동수와 감쇠율을 근사적으로 표현한다. 이 결과를 이용하여 몇 가지 경우에 있어서 반경방향 기본모드에 대해 계산한 결과를 Fig. 2에 선으로 나타내었고, 앞서 구한 엄밀해의 결과와 비교하였다. 여기서 알 수 있다시피 R 값이 큰 경우에 근사해는 엄밀해와 잘 일치한다. R 값이 너무 작은 범위에서는 타당한 결과가 얻어지지 않으며, 계산 가능한 R 값의 한계를 파악할 수 있다.

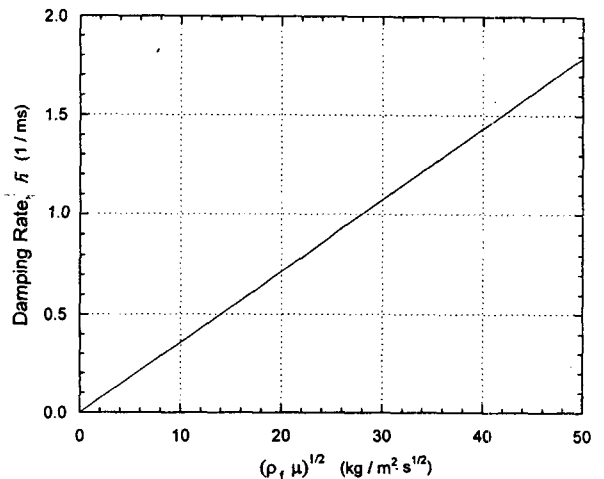
고유진동수 변화와 감쇠율이 인접유체의 점도와 물리적으로 갖는 관계를 파악하기 위하여, 식 (60)과 (61)에서 ϵ^1 차 까지 택하여 물리적 차원을 환원하면 다음과 같다.

$$\frac{\tilde{\omega}}{\omega_0} \approx 1 - \frac{\sqrt{2}}{\rho_s r_0 \sqrt{\omega_0}} \sqrt{\rho_f \mu} \quad (62)$$

$$\tilde{h} \approx \frac{\sqrt{2\omega_0}}{\rho_s r_0} \sqrt{\rho_f \mu} \quad (63)$$



(a) Natural frequency, $\tilde{\omega}$



(b) Damping rate, \tilde{h}

Fig. 4 The dimensional natural frequency and damping rate depicted as a function of $(\rho_f \mu)^{1/2}$ for $r_0 = 2$ mm, $\rho_s = 7 \times 10^3$ kg/m³, $\omega_0 = 2\pi \times (20$ kHz)

봉의 단면치수와 밀도 및 점성영향이 없을 때의 고유진동수 등이 주어지면, 고유진동수 변화와 감쇠율을 계산할 수 있으며 이들은 $(\rho_f \mu)^{1/2}$ 에 비례하는 관계를 나타낸다. 가령 $r_0 = 2 \text{ mm}$, $\rho_s = 7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\tilde{\omega}_0 = 2\pi \times (20 \text{ kHz})$ 일 때, 고유진동수 변화와 감쇠율을 $(\rho_f \mu)^{1/2}$ 의 함수로 도시한 그래프가 Fig. 4에 보여져 있다. 여기서 $(\rho_f \mu)^{1/2}$ 값의 범위는 통상 사용되는 점성유체에 해당하도록 상온의 글리세린($\rho_f = 1264 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1.492 \text{ kg/m} \cdot \text{s}$)까지 포함될 수 있는 정도로 설정하였다.

본 논문에서는 반경방향 기본모드이면서 축방향 기본모드인 경우에 대해서만 결과를 도시하였다. 봉의 반경치수가 축 길이에 비해 훨씬 작은 상황에서, 반경방향 모드 중에는 기본모드가 대표적이다. 한편 축방향 모드에 있어서, 식 (19)에 표현된 바와 같이 모드수 n 과 아울러 길이에 해당하는 l 이 함께 반영된 파동수 k 에 따라 결과가 결정되므로, 모드별 결과 비교는 하지 않았다. 또한 본 논문에서는 진동수와 감쇠의 관점에서 결과를 검토하였는데, 모드 형상의 관점에서도 살펴보고자 하면 식 (36), (49), (59)로부터 계산이 가능하다.

5. 결 론

탄성 봉이 점성 유체에 담겨 있을 때 봉의 비틀림 진동이 인접 유체의 점성에 의해 받는 영향을 이론적으로 연구하였다. 이를 위해 해석적 방법에 의한 엄밀해와 섭동법에 의한 근사해를 구하여, 고유진동수와 감쇠율을 계산하였다. 점성유체의 점성 저항으로 인해 고유진동

수가 감소하고 감쇠가 증가한다고 예상되는 일반적인 경향을 본 논문에서는 정량적으로 평가할 수 있는 결과를 유도하였다.

참 고 문 헌

- (1) Brighton, D. G., 1989, "Fluid Loading - The Interaction Between Sound and Vibration", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 133, No. 1, pp. 1~27.
- (2) Kim, J. O., Wang, Y. and Bau, H. H., 1991, "The Effect of an Adjacent Viscous Fluid on the Transmission of Torsional Stress Waves in a Submerged Waveguide", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 89, No. 3, pp. 1414~1422.
- (3) 김진오, 1999, "초음파 점도계용 고체 매질의 탄성파와 인접 점성유체 간의 상호작용", *한국음향학회지*, 제 18권, 제5호, pp. 28~34.
- (4) Achenbach, J. D., 1975, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, p. 241.
- (5) Sabersky, R. H., Acosta, A. J., Hauptmann, E. G., 1971, *Fluid Flow*, 2nd ed., Macmillan Publishing Co., New York.
- (6) Wolfram, S., 1988, *Mathematica-A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley, New York.
- (7) Nayfeh, A. H., 1981, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley & Sons, New York.