

< 논 문 >

비선형 강성 및 감쇠 특성을 갖는 진동 시스템의 규명

Identification of Vibration System With Stiffness and Damping Nonlinearity

이 병 립* · 이 재 응**

Byung-Rim Lee and Jae-Eung Lee

(1999년 10월 16일 접수 ; 1999년 12월 22일 심사완료)

Key Words : Nonlinear Vibration(비선형 진동), NARMAX(Nonlinear Auto-Regressive Moving Average with eXogenous), Nonlinear Damping(비선형 감쇠), Nonlinear Stiffness(비선형 강성)

ABSTRACT

The identification of a nonlinear vibration system based on the time domain parametric model has been widely studied in recent years. In most of the studies, the NARMAX model has been used for the identification of a nonlinear system. However, the computational load for the identification with this model is quite heavy. In this paper, a new modeling procedure for nonlinear system identification in discrete time domain is proposed. The proposed model has less initial nonlinear terms than NARMAX model, and the terms in the proposed model are derived from physically meaningful way. The performance of the proposed method is evaluated through the simulation, and the result shows that the proposed model can identify the nonlinear characteristics of the vibration system very well with less computational effort.

1. 서 론

비선형성이 내포되어 있는 동역학 시스템의 특성을 샘플링한 실험데이터로부터 시간영역 모델로 규명하고자 하는 연구가 최근에 활발하게 진행되고 있다⁽¹⁾. 이를 효과적으로 하기 위해서는 비선형 시스템의 운동방정식을 적절히 표현할 수 있는 이산시간 모델이 필요한데, 여러 모델 중 NARMAX 모델(Nonlinear AutoRegressive Moving Average with eXogenous input model)을 이용한 모델링 방법이 널리 이용되고 있다⁽²⁾. 이 모델은 여러 모델 가운데 매우 일반적이고 변위 응답 추정도 잘할 수 있다는 장점이 있으나, 모델을 만들기 위한 초기 비선형 항의 수가 많아 각 항의 계수 추정 시 계산상 부담이 많으며, 또한 생성된 모델의 각 항에 물리적 의미를 부여하기 어

렵다는 단점이 있다. 일반적으로 이산시간 영역에서 비선형 모델을 추정하는 과정은 먼저, 가정한 모델에서 표현할 수 있는 모든 비선형 항들을 포함하는 초기모델을 구성하고, 이 모델에서 응답에 현저한 영향을 끼치는 항들을 선별하고 이들만으로 최종모델을 표현하는 것이다.

본 연구에서는 비선형성을 갖는 기계 구조물의 효과적인 진동 해석 및 규명을 위하여 초기항의 수가 NARMAX 모델에 비해 적고, 물리적으로 의미가 있는 항으로 구성되는 새로운 이산시간 모델 및 그 모델링 방법을 제안하고 모의 실험을 통하여 이를 검증하고자 한다. 제안하는 방법은 주어진 입력신호에 대해 응답신호에 현저한 영향을 끼치는 항들을 먼저 가정하고, 그 항들의 조합으로 변위 응답에 대한 이산시간 모델을 구성한다. 이 모델은 모델 계수에 있어서 선형이며, 따라서 최소 자승 방법의 확장 형태인 직교 매개변수 추정 방법⁽³⁾을 사용하여 모델 계수를 추정할 수 있다. 추정된 모델의 검증은 다음 두 가지 방법으로 하였는데, 첫 번째 방법은 1단계 전방 예측 오차(one step ahead prediction error)의 상대적인 크

* 현대자동차(주) 남양연구소

** 정회원, 중앙대학교 공과대학 기계공학과

기를 계산하여 평가하는 것이고, 두 번째 방법은 입력신호와 오차신호가 만족해야 할 상관관계를 만족하는지 확인하여 평가하는 방법이다. 마지막으로, 제안하는 방법의 타당성을 확인하기 위하여 모의 실험을 실시하였는데, 모의 실험에서는 랜덤 가진 신호를 입력신호로 사용하였으며, 제안하는 변위응답 모델로부터 구한 결과는 Runge-Kutta 방법에 의해 구한 결과 및 NARMAX 모델로부터 구한 결과와 비교하였다.

2. NARMAX 모델

현재의 출력은 과거의 입력 및 출력의 조합에 의해서 표현될 수 있다는 가정 하에 제안된 NARMAX 모델은 비선형 진동 시스템의 동 특성을 잘 표현할 수 있음을 보였다. 이 모델은 비선형 차분 방정식이며, 매개변수에 관해서는 선형으로 표현할 수 있다는 장점이 있다. 이 모델에서는 1차 다항 비선형 함수를 다음 식과 같이 표현한다.

$$y(t) = \sum_{m=0}^M \theta_m a_m(t) + \epsilon(t) \quad (1)$$

여기서, $a_0(t) = 1$

$$a_m(t) = \prod_{i=1}^n y^{n_i}(t-i) \prod_{j=1}^d u^{n_j}(t-d-j) \prod_{k=1}^r \epsilon^{n_k}(t-k) \quad (2)$$

이며, θ_m 은 모델 계수이고, $a_m(t)$ 은 모델의 변수로써 입력 $u(t)$, 출력신호 $y(t)$ 및 노이즈 $\epsilon(t)$ 의 조합에 의해 표현된다.

또, n_i, n_j, n_k 는 $y(t-i), u(t-d-j), \epsilon(t-k)$ 의 비선형 차수, n 은 시스템의 최대 비선형성 차수를 나타내며, 다음과 같은 관계가 있다.

$$\sum_{i,j,k} (n_i + n_j + n_k) = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$m = m(p, q, r, n_i, n_j, n_k)$$

또한, 모델 항의 수는 다음과 같이 주어진다.

$$M = \sum_{i=0}^n n_i; \quad (4)$$

$$n_0 = 1, n_i = \frac{n_{i-1} \times (p+q+r+i)}{i}$$

예를들어 비선형부 차수가 3차인 1자유도 비선형 진동 시스템을 고려하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$m\ddot{y} + c_1 \dot{y} + k_1 y + c_2 \dot{y}^2 + c_3 \dot{y}^3 + k_2 y^2 + k_3 y^3 = u(t) \quad (5)$$

여기서, m 은 질량 $k_1, k_2, k_3, c_1, c_2, c_3$ 는 비선형 시스템의 강성계수와 감쇠계수 그리고 $u(t)$ 는 외력이다.

식 (5)와 같이 표현되는 시스템을 NARMAX 모델로 변환할 경우 그 모델 결정을 위한 초기항의 수는 time lag가 1인 경우 비선형 항 16개를 포함하여 결정 해야할 초기 항의 수는 20개, time lag가 2인 경우 비선형 항 67개를 포함하여 결정해야 할 초기 항의 수는 74개로써 초기항의 수가 많음을 알 수 있으며, 또한 각 항에 대한 물리적 의미를 부여하기에는 어려움이 있다⁽²⁾.

3. 이산시간 모델 제안

본 연구에서는 위에서 언급한 NARMAX 모델의 단점을 극복하기 위하여 새로운 모델 및 모델링 과정을 제시하고자 한다.

식 (1)과 같이 표현되는 NARMAX 모델은 모델 결정을 위한 초기 항이 식 (2)에서와 같이 많이 생성되어 계산적 부담을 갖는다. 이러한 결점을 해소하기 위하여 본 연구에서는 초기 항의 수를 줄일 수 있도록 응답을 선형 부분과 비선형 부분으로 나누어 물리적으로 의미를 갖는 변수로써 응답 모델을 구성한다.

질량과 감쇠기, 스프링이 진동시스템의 주요 구성 요소인 비선형 1자유도 시스템의 운동방정식은 선형과 비선형 부를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + f(y, \dot{y}) = u(t) \quad (6)$$

여기서, m, c, k 는 시스템의 질량, 선형 감쇠계수와 강성계수를 나타내며, $u(t)$ 는 외력이다. 또한, $f(y, \dot{y})$ 는 비선형부를 나타낸다.

식 (6)으로 구성되는 비선형 진동방정식에 대한 이산시간 모델을 구성하기 위하여 다음과 같은 가정을 한다.

가정 I : 시스템은 선형부분과 비선형 부분으로 나누어 질 수 있다.

가정 II : 선형 부분은 ARMAX(Auto-Regressive Moving Average with eXogenous)모델의 형태로 표현될 수 있다⁽³⁾.

가정 III : 비선형 부분은 방정식에서 비선형 특성을 나타내는 항으로써 표현될 수 있으며, 응답에 영향이 현저한 항이라 한다.

가정으로부터 변위응답 $y(t)$ 는 다음과 같은 이산시간 모델로 다시 표현할 수 있다.

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\text{선형항의수}} \theta_{Li} p_{Li}(t) + \sum_{j=1}^{\text{비선형항의수}} \theta_{Nj} p_{Nj}(t) + \epsilon(t) \quad (7)$$

여기서, θ_{Li} 와 θ_{Nj} 는 선형 항과 비선형 항의 모델 계

수이고, $p_{Li}(t)$ 와 $p_{Ni}(t)$ 는 선형과 비선형 항의 변수를 나타내며, $p_{L0}(t)=1$ 이다. 비선형항 $p_{Ni}(t)$ 는 응답에 영향이 현저한 변수의 조합으로써 표현될 수 있다.

이산시간 모델을 구성하는 과정을 설명하기 위해 식 (5)와 같이 비선형부 차수가 3차인 1자유도 비선형 진동 시스템을 고려한다.

이를 선형부와 비선형부로 나누어서 각각 이산시간 모델로 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

(1) 선형부

선형 항은 입력과 출력의 이산시간에 의한 조합과 예측오차로써 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y_{\text{선형부}}(t) = \text{const} + \sum_{i=1}^n a(i)y(t-i) + \sum_{j=1}^m b(j)u(t-d-j) + \sum_{k=1}^m d(k)\epsilon(t-k) \quad (8)$$

여기서, $a(i), b(j), d(k)$ 는 각각 모델 계수를 나타낸다.

(2) 비선형부

식 (7)에서 응답에 영향을 끼치는 비선형 항은 y^2, y^3, y^2, y^3 임을 알 수 있다. 현재의 출력에 time lag가 1인 비선형 항들이 영향을 미치고 있다 가정하면 비선형 항의 이산시간 영역에서의 표현은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{y^2(t-1), y^3(t-1), y^2(t-1), y^3(t-1)\} \quad (9)$$

여기서, $y(t)$ 는 후방 유한 차분법을 사용하여 표현하면 $y(t) = \{y(t) - y(t-1)\} / \Delta t$ 로 나타낼 수 있으며, 이를 이용하여 식 (9)를 다시 표현하면 다음과 같은 7개의 비선형 항으로 나타낼 수 있다.

$$\{y^2(t-1), y(t-1)y(t-2), y^2(t-2), y^3(t-1), y^2(t-1)y(t-2), y(t-1)y^2(t-2), y^3(t-2)\} \quad (10)$$

위와 같은 방법으로 식 (5)의 비선형 부를 time lag가 r 인 경우에 대해 전개하여 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y_{\text{비선형부}}(t) = G^n[y(t-i)\dot{y}(t-i)] = \sum_{\beta=2}^n \sum_{i=1}^n c_{\beta,i} y^\beta(t-i) + \sum_{\alpha=2}^n \sum_{i=1}^n c_{\alpha,i} \dot{y}^\alpha(t-i) \quad (11)$$

여기서, $G^n[y(t-i)\dot{y}(t-i)]$ 은 식 (5)에서 응답에 영향을 끼치는 항 $y(t-i)$ 또는 $\dot{y}(t-i)$ 로 구성되는 비선형 함수이며, $c_{\beta,i}, c_{\alpha,i}$ 는 각 항의 계수이다. 또한, n 은 식 (5)에서 변수 y 와 \dot{y} 가 갖는 최대 비선형 차수를 나타낸다. \dot{y} 에 대해 후방 유한차분법을 이용하면 응답

은 이산시간의 변위응답 형태로 표현할 수 있다. 이와 같이 하면 비선형 이산시간 항의 수는 time lag가 1인 경우에는 식 (10)과 같이 7개의 항이, 그리고 time lag가 2인 경우에는 16개의 항이 생성됨을 알 수 있다.

따라서, 선형과 비선형 항으로 구성되는 제안하는 이산시간 모델을 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(t) = y_{\text{선형부}}(t) + y_{\text{비선형부}}(t) \quad (12)$$

$$= \text{const} + \sum_{i=1}^n a(i)y(t-i) + \sum_{j=1}^m b(j)u(t-d-j) + G^n[y(t-i)\dot{y}(t-i)] + \sum_{k=1}^m d(k)\epsilon(t-k)$$

여기서 비선형부를 위와 같이 전개하면 식 (12)는 다음 식과 같이 계수에 대하여 선형(linear in parameter)인 형태로 표현될 수 있다.

$$y(t) = \sum_{i=1}^M \theta_i p_i(t) + \epsilon(t), \quad t=1, \dots, N$$

4. 모델계수 결정 및 모델 검증

이산시간 영역에서 비선형 모델을 추정하는 과정은 먼저 가정한 모델에서 표현 할 수 있는 모든 비선형 항들로부터 응답에 현저한 영향을 끼치는 항들을 선별하고 이들만으로 최종모델을 구성하는 것이다. 본 연구에서 제안하는 이산시간 모델은 3절에서 전개한 것과 같이 현재의 출력 신호는 가장 최근의 신호에 영향을 많이 받는다는 가정 하에 가장 작은 time lag 값을 사용하여 비선형 항의 수가 작은 초기모델을 구성하고, 그 모델의 계수를 추정하였다. 식 (12)로부터 모델은 계수에 대하여 선형으로 표현됨을 알 수 있으므로, 이런 경우에 정확한(unbiased) 추정치를 제공할 수 있는 직교 매개변수 추정 방법을 이용하여 모델 계수를 추정하였다. 이 방법을 이용하면, 먼저 가정한 time lag에서 표현될 수 있는 모든 비선형 항들 중에서 응답에 현저한 영향을 끼치는 항들은 각 항이 예측 오차 값을 줄이는 비율을 나타내는 예측오차 감소비(ERR: Error Reduction Ratio) 값의 크기를 기준으로 선정하게 된다. 여기서 ERR값은 어떤 항이 추가되었을 때 오차를 줄이는 정도를 의미하며, 이 값이 작다는 것은 그 항을 추가하여도 예측의 정확도를 높이는데 별 도움이 안 된다는 것을 의미한다. 그 표현식은 다음과 같다⁽²⁾.

$$[ERR]_i = \frac{\hat{g}^2_i \sum_{j=1}^N w^2_j(t)}{\sum_{j=1}^N y^2_j(t)} \times 100 \quad (13)$$

여기서, \hat{g}_i 는 직교모델의 매개변수 벡터의 추정 값이고, $w_i(t)$ 는 orthogonal polynomial set의 요소이다⁽³⁾.

최종 모델을 구한 후에는, 다음 두 가지 방법을 이용하여 모델을 검증하였다.

(1) 예측오차(one step ahead prediction error)의 크기를 상대적으로 평가할 수 있는 RPEL(relative prediction error level)의 값을 비교하여 모델 검증을 수행한다⁽³⁾.

$$RPEL = \sqrt{\frac{\sum \epsilon^2(t)}{\sum y^2(t)}} \times 100 \quad (14)$$

(2) 예측오차 신호는 입력신호에 대해 독립적이어야 한다. 예측오차와 입력 신호의 상관관계가 다음과 같은 관계를 만족하는가를 확인하여 적정 모델임을 검증할 수 있다⁽⁵⁾.

$$\phi_{\epsilon\epsilon}(k) = \frac{E[\epsilon(t, \hat{\theta})\epsilon(t-k, \hat{\theta})]}{E[\epsilon^2(t, \hat{\theta})]} = 0, k \neq 0 \quad (15)$$

$$\phi_{u^2\epsilon}(k) = \frac{E[(u^2(t) - \bar{u}^2)\epsilon(t-k, \hat{\theta})]}{\sqrt{E[(u^2(t) - \bar{u}^2)^2]E[\epsilon^2(t, \hat{\theta})]}} = 0, \forall k$$

$$\phi_{u\epsilon}(k) = \frac{E[u(t)\epsilon(t-k, \hat{\theta})]}{\sqrt{E[u^2(t)]E[\epsilon^2(t, \hat{\theta})]}} = 0, \forall k$$

$$\phi_{\epsilon(u)}(k) = \frac{E[\epsilon(t, \hat{\theta})\epsilon(t-1-k, \hat{\theta})u(t-1-k)]}{\sqrt{E[\epsilon^2(t, \hat{\theta})]E[\epsilon^2(t, \hat{\theta})u^2(t)]}} = 0, \forall k$$

지금까지의 과정으로 적정 모델을 추정하지 못할 경우에는 이산 시간 모델의 time lag 값을 증가시켜 가면서 적정 모델이 추정될 때까지 반복 계산하여 모델을 결정하게 된다.

5. 모의 실험

제안하는 모델링 방법의 타당성을 확인하기 위하여 다음과 같이 두 가지 경우에 대해 모의 실험을 하였다.

5.1 비선형 감쇠가 없는 경우

비선형 감쇠가 없는 진동시스템에 대해 다음과 같은 값을 사용하여 모의 실험을 하였다.

$$m = 1 \text{ kg}, c_1 = 20 \text{ N/(m/s)}, c_2 = 0, c_3 = 0$$

$$k_1 = 10^4 \text{ N/m}, k_2 = 10^7 \text{ N/m}^2,$$

$$k_3 = 5 \times 10^9 \text{ N/m}^3$$

입력신호 $u(t)$ 는 추정해야할 모델계수의 수가 많을 경

우를 고려하여 충분히 높은 차수의 persistent excitation 조건 (6)을 만족하는 가우시안 백색잡음(Gaussian white noise)으로 하였으며, 이때 입력 신호의 표준편차는 $\sigma_f = 15N$ 이고, 샘플링 간격은 $\Delta t = 0.005 \text{ sec}$ 로 하였다.

식 (7)에서 비선형부를 제외하면 선형시스템의 비감쇠 고유진동수는 $\omega_n = 100 \text{ rad/s}$ 이고, 선형감쇠비는 $\zeta = 0.1$ 이 된다. 변위 응답신호는 랜덤 가진 신호에 대해 4th order Runge-Kutta 적분법을 사용하여 구하였다. 이때 응답의 표준 편차 $\sigma_{disp} = 0.0011 \text{ m}$ 였다.

모델계수는 반복 계산하여 수렴비율이 0.01%보다 작을 때까지 계산하였다. 제안된 방법에 의해 추정된 모델

Table 1 Model coefficients estimated by the proposed modeling method

No.	Model parameters	Estimated coefficients	[ERR] _i
1	$y(t-1)$.16684070E+01	.67858920E+02
2	$y(t-2)$	-.90082690E+00	.24433600E+02
3	$u(t)$.11528960E-01	.19125920E+01
4	Constant	-.99076930E-02	.18516620E+01
5	$u(t-1)$.11102010E-01	.15349230E+01
6	$y^3(t-1)$	-.12923920E+00	.34272350E+00
7	$y^2(t-1)$	-.20558010E+00	.19127130E+01
8	$y^3(t-2)$	-.35970210E-02	.16263810E-01
9	$y^2(t-1)y(t-2)$.90626750E-01	.35695630E-01
10	$y^2(t-2)$	-.46006530E-01	.24747630E-01
11	$y(t-1)y(t-2)$.53512840E-01	.26811510E-01
12	$y(t-1)y^2(t-2)$	-.56668650E-01	.14932940E-01
13	$\epsilon(t-1)$	-.24097580E+00	.15318870E-02

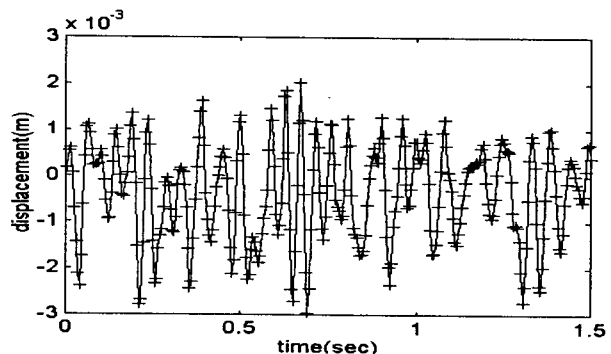


Fig. 1 Validation of the estimated model : One step ahead prediction of the response signal (+ : proposed model, - : Runge-Kutta)

은 동일한 조건에서 NARMAX 모델로 추정된 결과와 비교하였으며, 또한 Runge-Kutta 방법에 의한 결과와도

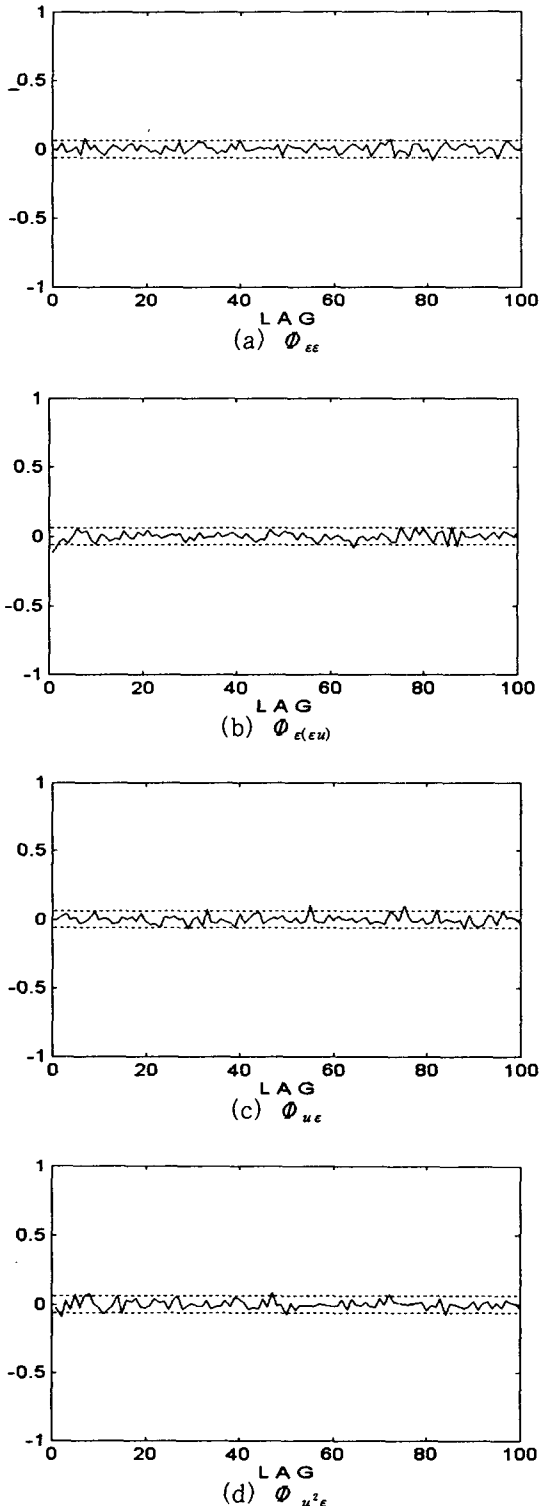


Fig. 2 Validation of the estimated model :
The normalized auto and cross correlation

비교하였다. 계수 추정 방법은 직교 매개변수 추정 방법을 이용하였으며, 모델 구조는 ERR test로 결정하였다. 추정 결과 제안된 모델의 항의 수(선형 항과 비선형 항의 총계)는 13개, ERR 합은 99.97%로써 모델 변수와 추정된 계수를 Table 1에 나타냈다. 추정 결과는 NARMAX 모델을 이용하여 추정된 결과와 변수 및 계수 값들이 일치하였다.

추정된 모델로부터 구한 1단계 전방예측 응답과 Runge-Kutta 방법에 의해 구한 응답을 Fig. 1에 비교하여 나타내었는데 두 결과가 잘 일치하고 있음을 볼 수 있으며, 이때 RPEL값은 1.82%이었다.

모델 검증을 위한 두 번째 방법으로 오차신호와 입력신호 사이의 상관관계를 이용하여 유효성 시험(validation test)을 실시하였으며, 그 결과를 Fig. 2에 나타내었다. 그림에서 점선으로 표시한 선은 데이터수가 N 일 때 $\pm \frac{1.96}{\sqrt{N}}$ 의 값을 나타내는 선으로서, 정규분포 불규칙 신호에서는 계산한 상관관계의 값이 이 값보다 작으면 통계학적으로 95%의 신뢰성을 갖고 그 값으로부터 취급할 수 있다⁽⁶⁾. 그림에서 추정된 모델로부터 계산한 상관관계 값들은 모두 95% 신뢰성 구간 내에 있으며, 따라서 추정된 모델이 실제시스템을 잘 표현함을 알 수 있다.

5.2 비선형 감쇠가 있는 경우

비선형 감쇠가 있는 진동시스템에 대해 모의 실험을 하기 위하여 다음과 같은 값을 적용하였다.

$$m=1 \text{ kg}, c_1=20 \text{ N/(m/s)}, c_2=50 \text{ N/(m/s)}^2, \\ c_3=100 \text{ N/(m/s)}^3, k_1=10^4 \text{ N/m}, \\ k_2=10^7 \text{ N/m}^2, k_3=5 \times 10^9 \text{ N/m}^3$$

여기서 입력 신호, 샘플링시간 등은 앞의 경우와 동일하게 적용하여 모델 계수를 추정하였다. 이 때 적용된 비선형 감쇠력 선도는 Fig. 3과 같다.

제안된 방법에 의해 추정된 모델링 결과를 NARMAX

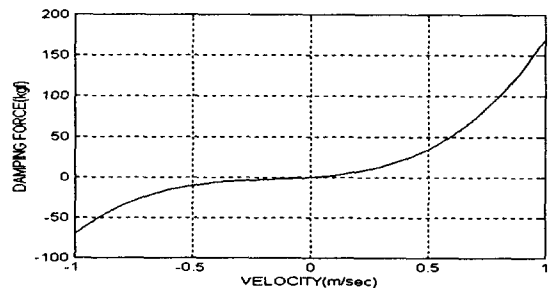


Fig. 3 Nonlinear damping force characteristic curve

Table 2 Model coefficients estimated by using the proposed and NARMAX model

No.	Model parameters	Proposed model coefficients	NARMAX model coefficients
1	$y(t-1)$	1.2852260E+00	0.16698892E+01
2	$y(t-2)$	-2.7049279E-01	-0.90974820E+00
3	$y(t-3)$	-3.4518600E-01	0.11459884E-01
4	$u(t)$	1.1448956E-02	0.10910869E-01
5	Constant	-1.4579949E-02	-0.12347549E-01
6	$u(t-1)$	1.5441827E-02	-
7	$u(t-2)$	4.4171195E-03	-
8	$y^3(t-1)$	-1.5083914E-01	-0.14085318E+00
9	$y^2(t-1)$	-2.7227485E-01	-0.23433164E+00
10	$y^2(t-2)$	-2.8738379E-02	-0.83452120E-01
11	$y(t-1)y(t-2)$	1.6306487E-01	0.11840226E+00
12	$y^3(t-2)$	-1.7296651E-01	0.12766477E-01
13	$y^2(t-1)y(t-2)$	1.2665297E-01	0.12763532E+00
14	$y(t-1)y^2(t-2)$	-8.3903141E-02	-0.95868967E-01

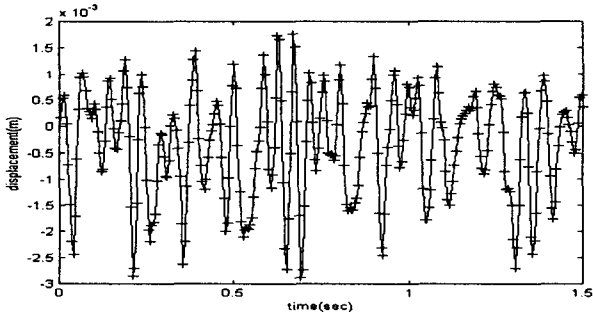
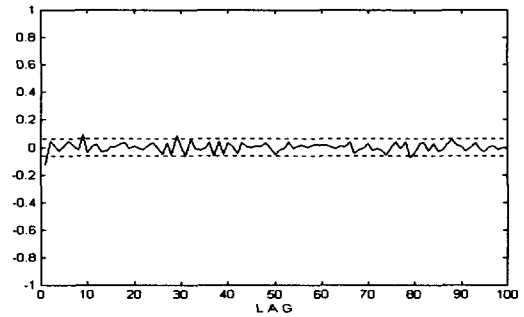


Fig. 4 Validation of the estimated model : One step ahead prediction of the response signal (+ : proposed model , - : Runge-Kutta)

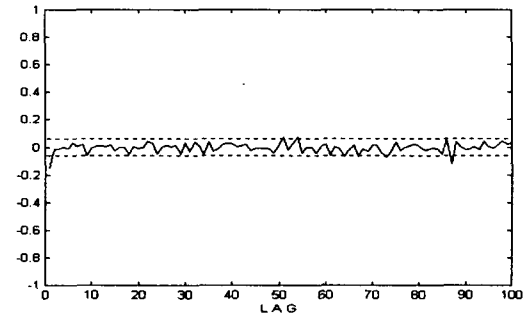
모델에 의해 모델링한 결과와 Table 2에 비교하였다. 제안된 방법에 의하여 추정된 항의 수(선형항과 비선형 항의 총계)는 14개, ERR 합은 99.974%이었으며, NARMAX 모델은 항의 수(선형항과 비선형 항의 총계)가 12개, ERR 합은 99.969%이었다.

Fig. 4에는 추정된 결과에서 생성한 1단계 전방 예측 응답신호와 Runge-Kutta 방법에 의해 구한 응답신호를 비교하였다. 그림에서 볼 수 있듯이 두 결과는 잘 일치하고 있으며 이때 RPEL 값은 제안모델의 경우 1.626%, NARMAX 모델의 경우 1.762%이었다.

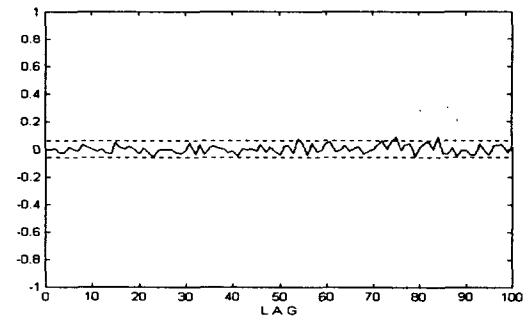
상관관계를 이용한 유효성 시험 결과를 Fig. 5에 나타냈는데 모두 95% 신뢰 구간 내에 있음을 알 수 있다. 이상의 결과로부터 제안된 모델링 방법을 이용하여 추



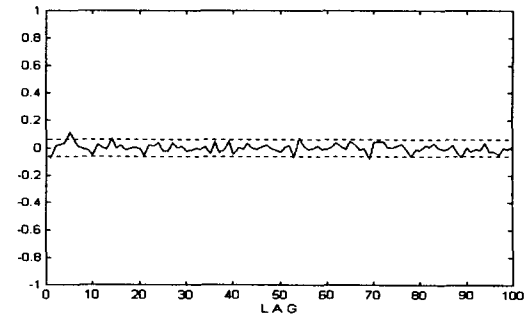
(a) $\phi_{\epsilon\epsilon}$



(b) $\phi_{\epsilon^2\epsilon}$



(c) $\phi_{u\epsilon}$



(d) ϕ_{ϵ^2u}

Fig. 5 Validation of the estimated model : The normalized auto and cross correlation

정한 비선형모델은 실제 비선형시스템을 잘 표현하고 있음을 알 수 있었다.

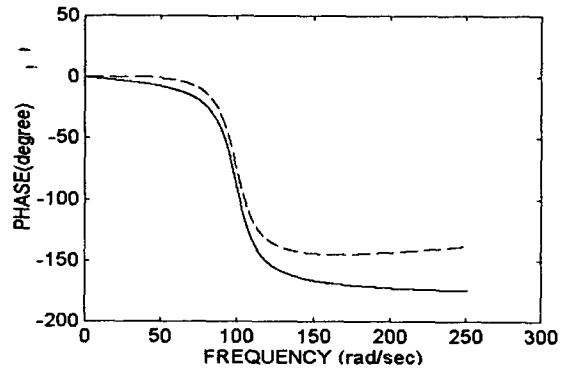
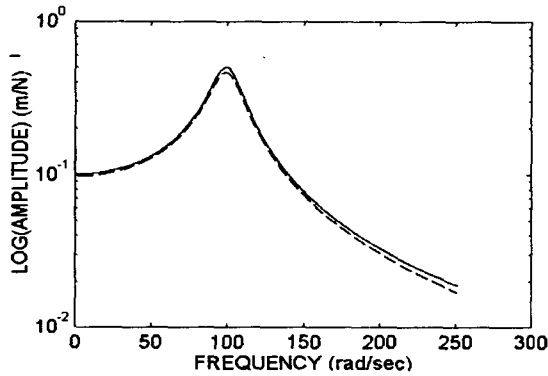
6. 주파수 응답함수

비선형 시스템에서, 시스템 입력 $u(t)$ 에 대한 출력 $y(t)$ 는 다음과 같이 무한급수인 볼테라 시리즈(Volterra series)로 표현할 수 있다.

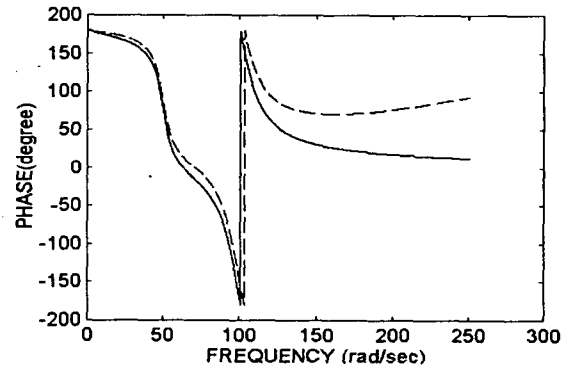
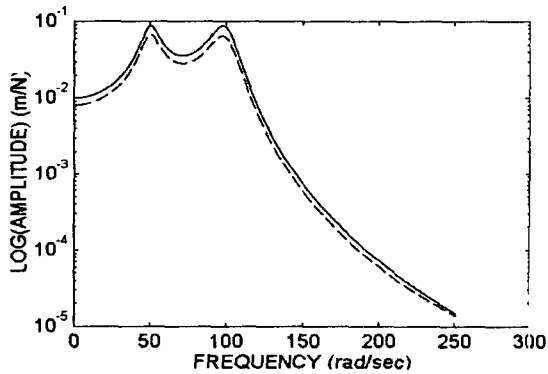
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) f(t - \tau_1) d\tau_1$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \quad (16)$$

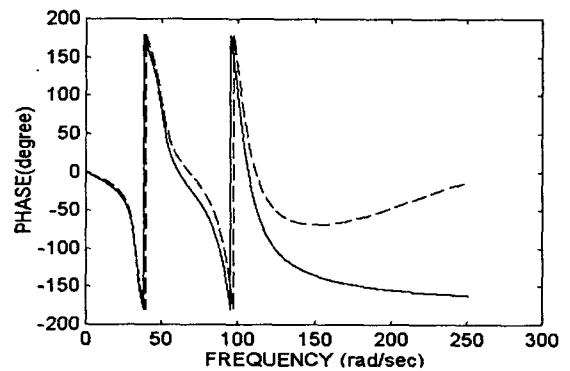
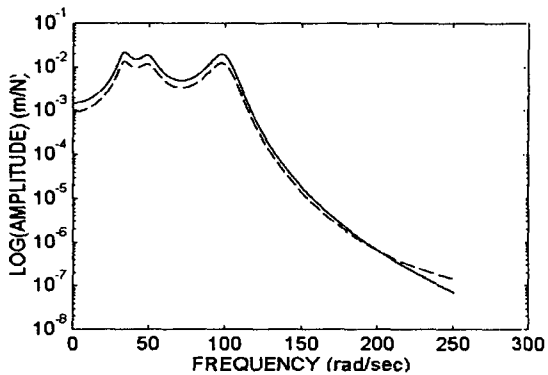
여기서 $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ 은 n 차 비선형 임펄스 응답 함수를 나타내는 n 차 볼테라 커널(kernel)이며, 선형 시스템의 입출력 관계를 나타내는 임펄스 응답함수는 볼테라 시리즈의 첫 번째 항으로 표현될 수 있다. 볼테라 시리즈로 표현되는 시스템은 볼테라 커널에 다음과 같이



(a) The 1st order FRF



(b) The 2nd order FRF



(c) The 3rd order FRF

Fig. 6 High order frequency response function (— : Proposed model , --- : Analytic model)

다변수 푸리에 변환을 함으로써 주파수 영역으로 표현될 수 있다.

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \cdot e^{-j(\omega_1\tau_1 + \dots + \omega_n\tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (17)$$

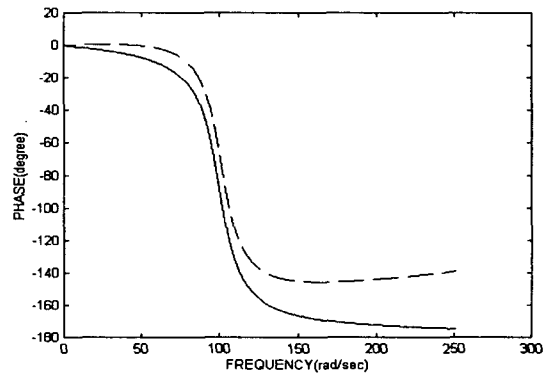
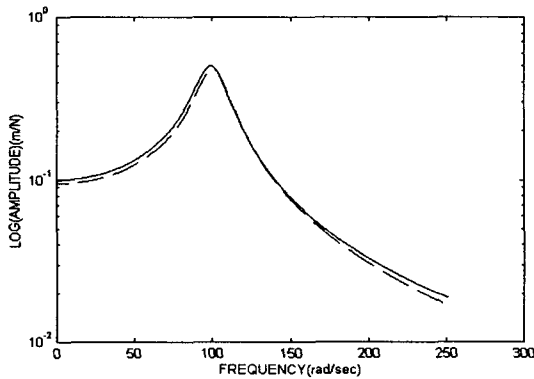
여기서, $H_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ 는 n 차 주파수 응답함수를 나타낸다.

추정된 비선형 모델의 주파수 응답함수를 구하기 위해 위와 같은 개념을 사용하는 조화 탐사법(harmonic probing method)을 적용하면 입력과 출력의 관계는 다음 식으로 나타낼 수 있다⁽⁷⁾.

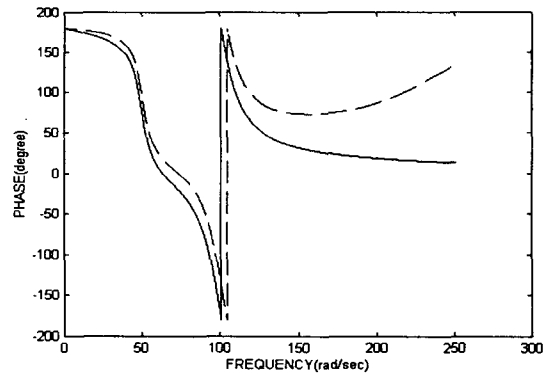
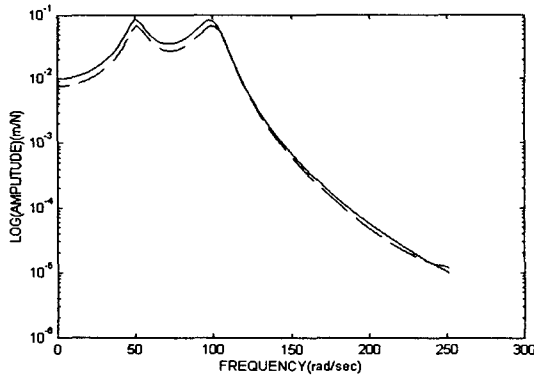
(1) 1차 FRF : $H_1(\omega_1)$

$$u(t) = e^{j\omega_1 t}, \quad y(t) = H_1(\omega_1) e^{j\omega_1 t}$$

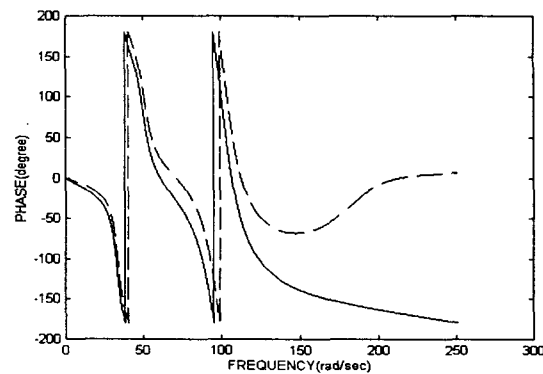
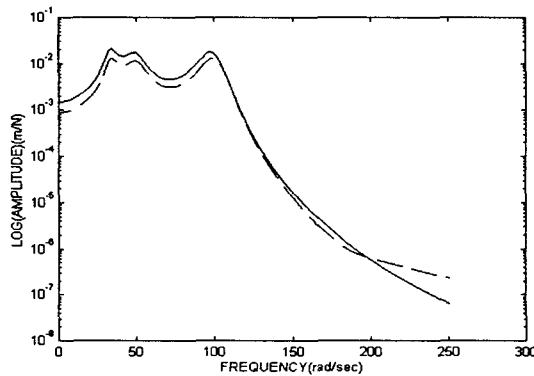
(2) 2차 FRF : $H_2(\omega_1, \omega_2)$



(a) The 1st order FRF



(b) The 2nd order FRF



(c) The 3rd order FRF

Fig. 7 High order frequency response function (— : proposed model , --- : analytic model)

$$u(t) = e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t},$$

$$y(t) = H_1(\omega_1) e^{j\omega_1 t} + H_1(\omega_2) e^{j\omega_2 t} + 2 H_2(\omega_1, \omega_2) e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} + \dots$$

(3) 3차 FRF : $H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

$$u(t) = e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t} + e^{j\omega_3 t},$$

$$y(t) = H_1(\omega_1) e^{j\omega_1 t} + H_1(\omega_2) e^{j\omega_2 t} + H_1(\omega_3) e^{j\omega_3 t} + 2 H_2(\omega_1, \omega_2) e^{j(\omega_1, \omega_2)t} + 2 H_2(\omega_2, \omega_3) e^{j(\omega_2 + \omega_3)t} + 2 H_2(\omega_1, \omega_3) e^{j(\omega_1 + \omega_3)t} + \dots + 6 H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t} + \dots$$

이산시간 모델 식 (12)에 윗 식을 대입하고 양변을 t 곱하면 다음과 같은 주파수 응답함수를 얻을 수 있다.

$$H_1(\omega) = \frac{\theta_6 + \theta_7 e^{-j\omega\Delta} + \theta_8 e^{-2j\omega\Delta} + \theta_9 e^{-3j\omega\Delta} + \dots}{1 - (\theta_1 e^{-j\omega\Delta} + \theta_2 e^{-2j\omega\Delta} + \theta_3 e^{-3j\omega\Delta} + \dots)} \quad (18)$$

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{H_1(\omega_1) H_1(\omega_2) A(\cdot)}{2[1 - (\theta_1 e^{-j\omega_1\Delta} + \theta_2 e^{-2j\omega_1\Delta} + \theta_3 e^{-3j\omega_1\Delta} + \dots)]} \quad (19)$$

$$H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{\begin{pmatrix} H_1(\omega_1) H_2(\omega_2, \omega_3) B(\cdot) + \\ H_1(\omega_2) H_2(\omega_1, \omega_3) C(\cdot) + \\ H_1(\omega_3) H_2(\omega_1, \omega_2) D(\cdot) + \\ H_1(\omega_1) H_1(\omega_2) H_1(\omega_3) E(\cdot) \end{pmatrix}}{6[1 - (\theta_1 e^{-j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\Delta} + \theta_2 e^{-2j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\Delta} + \dots)]} \quad (20)$$

여기서 θ_i 는 제안된 방법에 의해 추정된 모델 계수이고, Δ 는 샘플링 간격이다. 또한, $A(\cdot)$ 는 계수 θ_i, Δ 와 ω 의 함수이며, $B(\cdot)$ 는 계수 θ_i, Δ 와 ω_1, ω_2 의 함수 그리고 $C(\cdot), D(\cdot), E(\cdot)$ 는 계수 θ_i, Δ 와 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 의 함수이다.

Fig. 6과 7의 (b)는 $\omega_1 = \omega_2$, (c)는 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ 인 경우에 대해 고차주파수 응답함수를 나타낸 것이다. 각 그림에서 표현한 실선은 해석적 방법에 의해 구한 주파수 특성이며, 점선은 이산시간 모델로부터 구한 주파수 응답함수이다.

6.1 비선형 감쇠가 없는 경우

제안 모델로부터 구한 결과와 해석적 방법의 결과는 다음과 같다. 고유 진동수는 해석적 방법의 경우 100 rad/sec, 제안 모델의 경우 99.98 rad/sec 였으며, 감쇠 계수는 해석적 방법의 경우 0.1, 제안 모델의 경우 0.104 였다. 고차 주파수 응답함수는 해석적인 경우와 비교하여 Fig. 6에 나타냈는데 그림에서 보는 것처럼 매우 잘 추정하고 있음을 볼 수 있다.

6.2 비선형 감쇠가 있는 경우

추정한 비선형 모델의 고차 주파수 응답함수는 해석적인 경우와 비교하여 Fig. 7에 나타냈는데, 그림에서 보는 것처럼 제안된 모델로부터 구한 결과가 해석적 방법의 결과를 매우 잘 추정하고 있음을 볼 수 있다.

7. 결 론

본 연구에서는 비선형 진동시스템의 특성을 규명하기 위한 이산시간 모델 및 그 추정 방법을 제안하였으며, Runge-Kutta에 의한 결과 및 NARMAX 모델을 이용한 추정 결과와 비교함으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 제안된 모델 및 그 추정 방법은 추정하고자 하는 모델의 초기 매개변수를 현저하게 줄일 수 있기 때문에 기존의 NARMAX 방법에 비해 계산적 부담을 줄일 수 있었으며,
- (2) 제안된 방법으로 추정한 모델은 주파수 응답함수, 1단계 전방 예측 응답 신호등을 비교하여 보았을 때 실제 비선형 시스템을 잘 표현하고 있음을 볼 수 있었다.

참 고 문 헌

- (1) Harber, R., Unbehauen, H., 1990, "Structure Identification of Nonlinear Dynamic Systems-A Survey on Input/Output Approaches", Automatica, Vol. 26, No. 4, pp. 651~677.
- (2) Billings, S. A. and Voon, W. S. F., 1984, "Least Square Parameter Estimation Algorithms for Nonlinear Systems", Int. J. Systems Sci., Vol. 15, No. 6, pp. 601~615.
- (3) Korenberg, M. J., Billings, S. A., Liu, Y. P. and McIlroy, 1988, "Orthogonal Parameter Estimation Algorithm for Nonlinear Stochastic Systems", Int. J. Control, Vol. 48, No.1, pp. 193~210.
- (4) Fassois, S. D., Lee, J. E., 1990, "Suboptimum Maximum Likelihood Identification of ARMAX Process", ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 112, pp. 586~595.
- (5) Billings, S. A. and Voon, W. S. F., 1986, "Correlation Based Model Validity Test for Nonlinear Models", Int. J. Control, Vol. 44, No.1, pp. 235~244.
- (6) Johansson, R., 1993, System Modeling and Identification, Prentice-Hall.
- (7) Bedrosian, E. and Rice, S. O., 1971, "The Output Properties of Volterra Systems(Nonlinear Systems with Memory) Driven by Harmonic and Gaussian Inputs", Proceedings of IEEE, Vol. 59, pp. 1688~1707.