

<논 문>

# 가정모드법을 이용한 축방향으로 이동하는 연속체의 종진동 해석

## Longitudinal Vibration Analysis of an Axially Moving Material by Using the Assumed Modes Method

정진태\* · 허진욱\*\* · 한창수\*

J. T. Chung, J. W. Huh and C. S. Han

(1999년 10월 12일 접수 : 2000년 1월 17일 심사완료)

**Key Words** : Axially Moving Material(축방향으로 이동하는 연속체), Longitudinal Vibration(종진동), Assumed Modes Method(가정모드법)

### ABSTRACT

Longitudinal vibration of an axially moving material is investigated by using the assumed modes method. To circumvent a difficulty in choosing the comparison functions which satisfy the boundary conditions, the assumed modes method is adopted by which equations of motion are discretized. Based on the discretized equations, the complex eigenvalue problem is solved and then the effects of the translating velocity on the natural frequencies and modes are analyzed.

### 1. 서 론

축방향으로 움직이는 연속체의 진동은 자기 테이프, 벨트, 체인, 종이 및 웹의 이송장치 등과 관련하여 많은 관심의 대상이 되어 왔다. 초기의 연구에서 일정한 이송 속도를 갖는 현의 횡진동에 이송속도가 끼치는 영향이 분석되었고<sup>(1-5)</sup>, 최근의 연구에서 이동파를 이용하여 축방향으로 움직이는 연속체에 대한 횡진동이 해석되었다<sup>(6-8)</sup>. 이 밖에도 축방향으로 움직이는 연속체에 대한 많은 연구가 수행되었으나, 실용적인 이유로 종진동보다 횡진동이 주요 관심 대상이었다.

본 논문은 일정한 축방향 속도를 갖는 현 혹은 유연 막대와 같은 연속체의 종진동의 특성을 연구하였다. Hamilton의 원리를 이용하여 축방향으로 움직이는 연속

체에 대한 운동방정식과 경계조건을 구하였으나, 경계조건을 만족하는 비교함수(comparison function)의 선정이 사실상 불가능하여 비교함수대신 허용함수(admissible function)를 이용하는 가정모드법에 의해 운동방정식을 이산화하였다. 그리고 이산화된 방정식으로부터 복소고유치문제를 유도하여 이송속도가 고유진동수와 고유모드에 미치는 영향을 분석하였다.

### 2. 운동방정식의 유도

축방향으로 속도  $V$ 로 이동하는 길이  $L$ , Young률  $E$ , 단면적  $A$ , 밀도  $\rho$ 인 연속체의 모델을 Fig. 1과 같이 설정할 수 있다. 연속체 단면의 직경이 길이보다 매우 작고 양단에 일정한 장력  $P$ 가 작용한다고 가정한다. 임의의 시간  $t$ 에서 연속체 내부의 점  $B$ 의 위치좌표를  $x$ , 탄성변형에 의한 변위를  $u$ 라고 하면, 변형 후의 점  $B$ 의 위치벡터는

$$r = (x + u)i \quad (1)$$

\* 정회원, 한양대학교 공학대학 기계공학과

\*\* 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

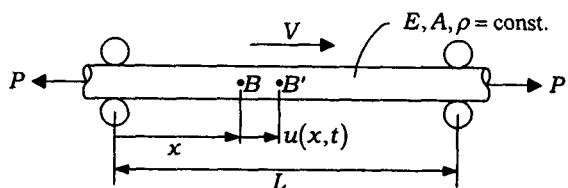


Fig. 1 Model of the longitudinal vibration of an axially moving material

이다. 이 때 변위  $u$  는 위치좌표  $x$  와 시간  $t$  의 함수가 된다. 즉,  $u = u(x, t)$  이다. 그리고 점  $B$  의 속도를 식 (1) 의 물질미분(material derivative)에 의해 구할 수 있다.

$$v = \left( V + \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} \right) \dot{t} \quad (2)$$

연속체의 변형이 탄성영역 내에 있을 때 변위와 변형률, 응력과 변형률의 관계는 다음과 같다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_x = E\epsilon_x \quad (3)$$

식 (2)와 (3)을 이용하여 길이  $L$  인 연속체의 운동에너지  $T$  와 변형에너지  $U$  를 변위  $u$  로 표현할 수 있다. 즉,

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left( V + \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4)$$

$$U = \frac{1}{2} EA \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5)$$

그리고, 비보존력인 장력  $P$  에 의한 일  $W_{nc}$  도 변위  $u$  로 나타낼 수 있다.

$$W_{nc} = P[u(L, t) - u(0, t)] \quad (6)$$

식 (4)~(6)에 Hamilton의 원리를 적용하여 운동방정식과 경계조건을 구하였다. 운동방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\rho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \text{at } x = 0, L \quad (8)$$

이송속도  $V$  가 0인 경우 식 (7)과 (8)은 이미 잘 알려진 막대의 종진동에 관한 운동방정식과 경계조건이 된다.

### 3. 가정모드법에 의한 이산화된 운동방정식의 유도

앞 절에서 구한 운동방정식인 식 (7)과 경계조건인 식 (8)에 대한 엄밀해를 구할 수 없기 때문에, 본 연구에서는 근사해법인 가정모드법<sup>(9)</sup>을 사용하였다. 수렴성이 뛰어난 Galerkin 방법<sup>(9)</sup>을 사용할 수도 있으나, 이 방법을 사용하기 위해서는 모든 경계조건을 만족하는 비교함수의 선정이 필요하다. 그러나 식 (8)의 경계조건을 만족하는 비교함수의 선정이 불가능하기 때문에, 본 연구에서는 비교함수 대신 허용함수를 사용할 수 있는 가정모드법을 채택하였다. 허용함수를  $\phi_i(x)$ 라 할 때 변위  $u$  는 다음과 같은 급수 형태로 표현된다.

$$u = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (9)$$

여기서,  $n$ 은 사용된 허용함수의 개수이며,  $q_i(t)$ 는 각 허용함수의 가중치를 나타내는 시간에 대한 함수이다. 식 (9)를 식 (4)~(6)에 대입하면 운동에너지, 변형에너지와 비보존력에 의한 일이 허용함수  $\phi_i(x)$ 와 가중함수  $q_i(t)$ 로 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + V \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} \dot{q}_i q_j + \frac{1}{2} \frac{V^2}{E/\rho} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j + V \sum_{i=1}^n \beta_i \dot{q}_i + V^2 \sum_{i=1}^n \gamma_i q_i \quad (10)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j \quad (11)$$

$$W_{nc} = P \sum_{i=1}^n \eta_i q_i \quad (12)$$

여기서,

$$m_{ij} = \rho A \int_0^L \phi_i \phi_j dx \quad (13)$$

$$g_{ij} = \rho A \int_0^L \phi_i \frac{d\phi_j}{dx} dx \quad (14)$$

$$k_{ij} = EA \int_0^L \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx \quad (15)$$

$$\beta_i = \rho A \int_0^L \dot{\phi}_i dx \quad (16)$$

$$\gamma_i = \rho A \int_0^L \frac{d\phi_i}{dx} dx \quad (17)$$

$$\eta_i = \phi_i(L) - \phi_i(0) \quad (18)$$

이산화된 운동방정식은 식 (10)~(12)을 Lagrange 방정식

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = Q_r^{nc}, \quad r=1,2,\dots,n \quad (19)$$

에 대입하여 얻을 수 있으며, 식 (19)에서

$$Q_i^{nc} = P\eta_i \quad (20)$$

이다. 이산화된 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j + V \sum_{j=1}^n (g_{ij} - g_{ji}) \dot{q}_j + \left( 1 - \frac{V^2}{E/\rho} \right) \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j \\ = V^2 \gamma_i + P\eta_i \\ i=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (21)$$

허용함수를 이송속도가  $V=0$ 인 경우의 고유함수(eigenfunction)로 가정하자. 즉,

$$\phi_i(x) = \cos \frac{i\pi}{L} x, \quad i=1,2,\dots,n \quad (22)$$

허용함수가 식 (22)로 선정된 경우, 이산화된 운동방정식인 식 (21)을 다음과 같이 행렬-벡터 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} [m]\{\ddot{q}\} + V([g] - [g]^T)\{\dot{q}\} + \left( 1 - \frac{V^2}{E/\rho} \right) [k]\{q\} \\ = V^2\{\gamma\} + P\{\eta\} \end{aligned} \quad (23)$$

여기서,

$$m_{ij} = \frac{1}{2} \rho A L \delta_{ij} \quad (24)$$

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i=j \\ \left[ 1 - (-1)^{i-j} \right] \frac{j^2}{i^2 - j^2} \rho A & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (25)$$

$$k_{ij} = \frac{i^2 \pi^2 EA}{2L} \delta_{ij} \quad (26)$$

$$\gamma_i = \rho A [(-1)^i - 1] \quad (27)$$

$$\eta_i = (-1)^i - 1 \quad (28)$$

논의를 간단히 하기 위해 다음과 같은 무차원수를 정의하였다.

$$\bar{q} = \frac{q}{L}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{u} = \frac{u}{L}$$

$$\tau = \frac{\pi \sqrt{E/\rho}}{L} t, \quad \nu = \frac{V}{\sqrt{E/\rho}}, \quad \varepsilon = \frac{P}{EA} \quad (29)$$

식 (29)에서 정의된 무차원수를 이용하여 식 (23)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\left\{ \frac{d^2 \bar{q}}{d\tau^2} \right\} + 2\nu [\bar{g}] \left\{ \frac{d\bar{q}}{d\tau} \right\} + (1 - \nu^2) [\bar{k}] \{\bar{q}\} = \frac{2}{\pi^2} (\nu^2 + \varepsilon) \{\bar{f}\} \quad (30)$$

여기서,

$$\bar{g}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i=j \\ \left[ 1 - (-1)^{i+j} \right] \frac{i^2 + j^2}{i^2 - j^2} & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (31)$$

$$\bar{k}_{ij} = i^2 \delta_{ij} \quad (32)$$

$$\bar{f}_i = (-1)^i - 1 \quad (33)$$

#### 4. 고유진동수와 고유모드

고유진동수와 고유모드에 대한 분석을 하기 위하여 식 (30)의 우변을 무시하고 다음과 같이 식 (30)을 간단히 표현하였다.

$$\ddot{\bar{q}} + \mathbf{G}\dot{\bar{q}} + \mathbf{K}\bar{q} = \mathbf{0} \quad (34)$$

여기서, 행렬  $\mathbf{G}$ 는 자이로 효과를 나타내는 비대칭(skew-symmetric) 행렬이다. 식 (34)에 대한 고유치문제를 유도하기 위해 상태벡터(state vector)를 이용하여 식 (34)를

$$\mathbf{M}^* \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{G}^* \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (35)$$

로 표현하였다. 여기서,  $\mathbf{M}^*$ 와  $\mathbf{G}^*$ 는  $2n \times 2n$ 행렬이고  $\mathbf{y}$ 는  $2n \times 1$  벡터이다.

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} \quad (36)$$

식 (35)의 해를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y} e^{i\lambda \tau} \quad (37)$$

여기서,  $j = \sqrt{-1}$ 이고,  $\lambda$ 는 무차원화된 고유진동수이다. 고유진동수를  $\omega$ 라 할 때 무차원화된 고유진동수  $\lambda$ 는

$$\lambda = \frac{\omega}{\pi \sqrt{E/\rho} L^2} \quad (38)$$

**Table 1** Convergence characteristics of the nondimensional natural frequencies  $\lambda_i$  when  $\nu = 0.1$

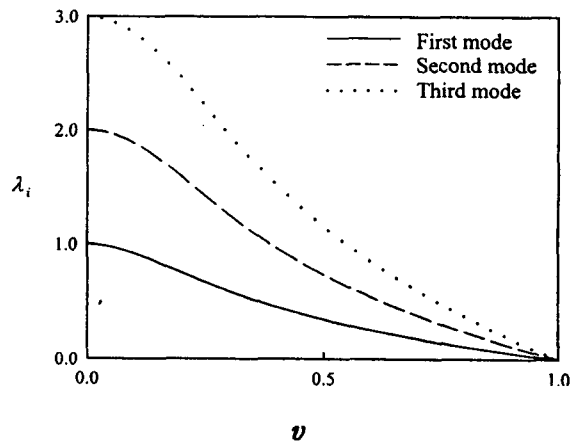
$n$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
1	0.99498743710662	N/A	N/A
2	0.93041034005243	2.12809328826721	N/A
3	0.92822924540153	1.94154086322796	3.27945940496933
4	0.92367090326491	1.90716945056717	2.97686474060964
5	0.92325397288055	1.90409577143284	2.87478025130733
6	0.92152965364469	1.89825436344909	2.87449670279971
7	0.92136146605917	1.89707044392032	2.86283833425593
8	0.92043961618775	1.89464488457006	2.86280585568059
9	0.92034990900841	1.89397889190636	2.85821133075990
10	0.91977244622688	1.89263737021860	2.85820639109393
11	0.91971701057475	1.89220021808378	2.85569462619363
12	0.91932021141330	1.89134394644802	2.85569412825832
13	0.91928268376783	1.89103160723110	2.85408895688155
14	0.91899282091582	1.89043583912917	2.85408895241403
15	0.91896578787385	1.89020020490581	2.85296555087547
16	0.91874458911425	1.88976102485560	2.85296530600782
17	0.91872421782069	1.88957632882060	2.85213097647728
18	0.91854978414853	1.88923884572898	2.85213042413648
19	0.91853389852517	1.88908988168429	2.85148428558346
20	0.91839277341440	1.88882228069603	2.85148349329481
21	0.91838004842823	1.88869943176035	2.85096725664688
22	0.91826349837943	1.88848196418122	2.85096630322263
23	0.91825308207833	1.88837882297040	2.85054377363906
24	0.91815518770583	1.88819856487604	2.85054272281816
25	0.91814650791537	1.88811068450686	2.85019015653281
26	0.91806311307094	1.88795881519924	2.85018905478085
27	0.91805577154887	1.88788300606069	2.84989018755438
28	0.91798387129888	1.88775329545366	2.84988906726169
29	0.91797758247796	1.88768720662777	2.84963236187063
30	0.91791494977966	1.88757512716430	2.84963124502199

로 정의된다. 이 때, 복소고유치문제<sup>(9)</sup>는 다음 식으로 쓸 수 있다.

$$(G^* + jIM^*)Y = 0 \quad (39)$$

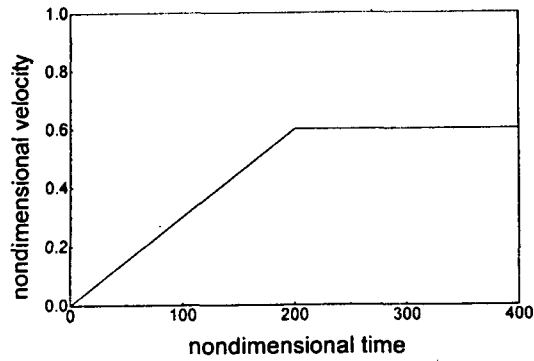
먼저, 고유진동수의 수렴성을 조사하기 위해,  $\nu=0.1$  일 때 허용함수의 수  $n$ 을 증가시키면서 저차 3개의 무차원화된 고유진동수를 계산하였다. Table 1은  $n$ 이 증가함에 따라 고유진동수가 수렴함을 보여 준다. 이송속도가 0인 경우, 즉,  $\nu=0$ 인 경우, 무차원화된 고유진동수의 엄밀해가  $n$ 의 크기와 상관없이 식 (30)으로부터 바로 구해 진다. 이 경우 저차 3개의 무차원화된 고유진동수는 1, 2와 3이다.

다음으로, 이송속도  $\nu$ 가 고유진동수에 끼치는 영향을 분석하기 위해,  $\nu$ 를 0에서 1까지 변화시키면서 저차 모드 3개에 해당하는 무차원화된 고유진동수를 구하였다. 이 때 허용함수의 수는  $n=20$ 으로 하였다. Fig. 2에서 볼 수 있듯이,  $\nu$ 가 0에서부터 1까지 변할 때 모든 고유

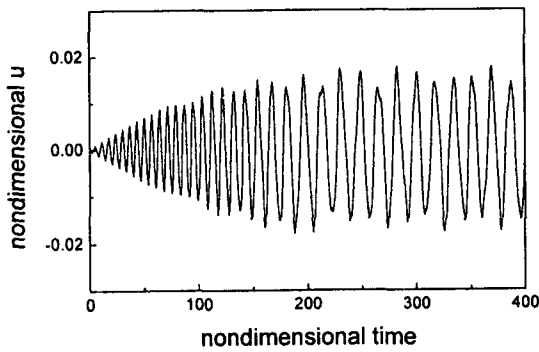


**Fig. 2** Nondimensional natural frequencies  $\lambda_i$  as a function of the nondimensional translating velocity  $\nu$

진동수가 단조감소하고,  $\nu=1$ 일 때 모든 고유진동수가 0이 됨을 알 수 있다. 무차원화된 이송속도  $\nu$ 가 1이면,  $V=\sqrt{E/\rho}$ 이고 이는 이송속도  $V$ 가 유연체의 파동속도

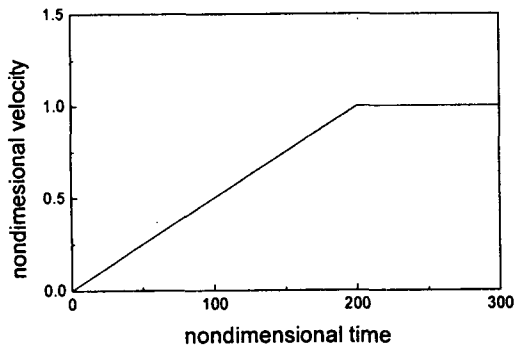


(a) Velocity profile

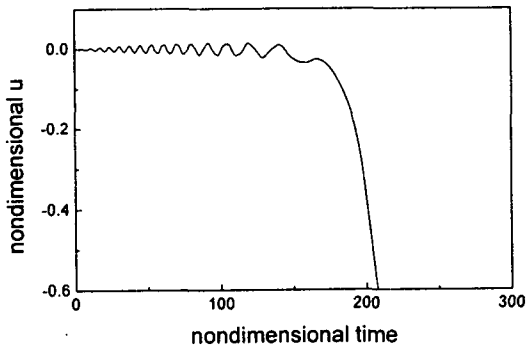


(b) Time response

Fig. 3 Time response at  $\bar{x}=0.5$  when nondimensional translating velocity  $v=0\sim 0.6$



(a) Velocity profile



(b) Time response

Fig. 4 Time response at  $\bar{x}=0.5$  when nondimensional translating velocity  $v=0\sim 1$

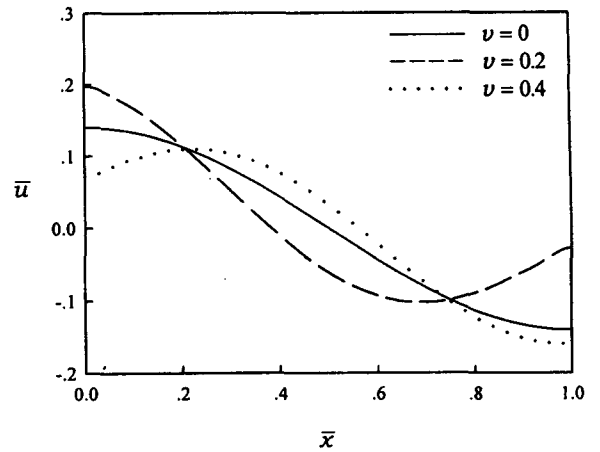


Fig. 5 Nondimensional first mode shapes for the variation of the nondimensional translating velocity  $v$

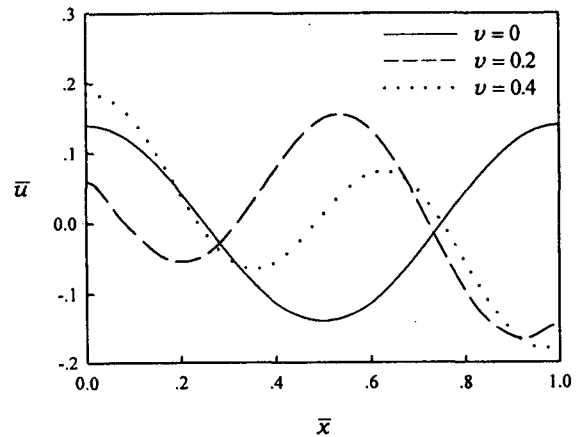


Fig. 6 Nondimensional second mode shapes for the variation of the nondimensional translating velocity  $v$

$\sqrt{E/\rho}$ 와 같아짐을 의미한다. 이 때 유연체의 고유진동수가 0이 되어 좌굴현상이 발생하여 동적 거동이 불안정하게 된다. 따라서  $V=\sqrt{E/\rho}$ 인 이송속도를 축방향으로 이송되는 종진동에 대한 임계속도로 정의할 수 있다. 그러나 임계속도의 값이 일반적으로 매우 크기 때문에 이송속도가 임계속도와 같아지는 일은 현실적으로 일어나기 힘들다. 무차원화된 이송속도에 따른 진동의 경향을 확인하기 위해 Fig. 3에  $\bar{x}=0.5$  일 때  $v=0$ 에서  $v=0.6$ 까지 변화시킨 후 속도를 일정하게 유지시키며 구한 시간응답을 도시하였고, 좌굴현상을 확인하기 위해 Fig. 4에  $\bar{x}=0.5$  일 때  $v=0$ 에서  $v=1$ 까지 변화시킨 후 속도를 일정하게 유지시키며 구한 시간응답을 도시하였다. 시간

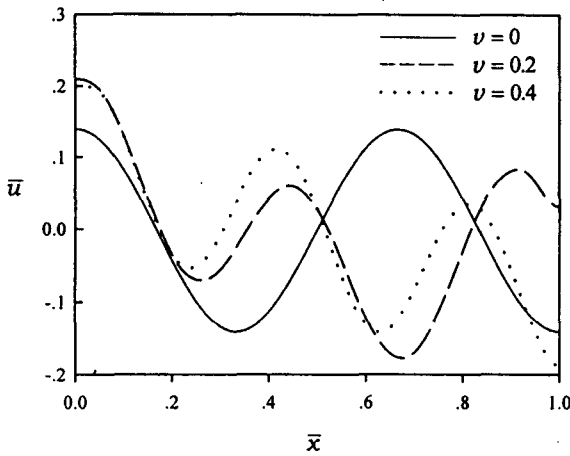


Fig. 7 Nondimensional third mode shapes for the variation of the nondimensional translating velocity  $v$

응답은 일반화된  $\alpha$  방법<sup>(10)</sup> (generalized  $\alpha$  method)를 이용하였다.

마지막으로, 이송속도가 고유모드에 미치는 영향을 분석하였다. 이를 위해 무차원화된 속도가  $v=0$ ,  $v=0.2$ 와  $v=0.4$ 의 각 경우에 대하여 저차 3개의 고유모드를 구하여 Fig. 5, Fig. 6과 Fig. 7에 도시하였다. 그림에서 알 수 있듯이 이송속도가 증가함에 따라 고유모드형상이 점차 복잡해짐을 알 수 있다.

## 5. 결 론

본 논문에서 가정모드법을 이용하여 축방향으로 이동하는 연속체의 증진동을 연구하였다. 유도된 운동방정식의 경계조건을 만족하는 비교함수를 구하는 것이 불가능하기 때문에 허용함수를 이용한 가정모드법에 의해 운동방정식을 이산화하였고, 이산화된 방정식으로부터 이송속도를 변화시켜 가며 고유진동수와 고유모드를 구하여 이송속도가 고유진동수와 고유모드에 끼치는 영향을 분석하였다. 본 연구에서 얻은 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 무차원화된 이송속도  $v$ 가 0에서 1로 증가함에 따라 모든 모드의 고유진동수는 단조감소한다.

(2) 무차원화된 이송속도  $v$ 가 1일 때, 즉, 이동 속도가 임계속도  $V=\sqrt{E/\rho}$ 일 때, 모든 고유진동수가 0이 되어 시스템이 불안정하게 된다.

(3) 임계속도이하의 영역에서 이송속도가 증가함에 따라 각 고유모드형상이 복잡해진다.

## 후 기

이 논문은 1999년 한양대학교 교내연구비에 의하여 연구 되었음.

## 참 고 문 헌

- (1) Sack, R. A., 1954, "Transverse Oscillation of Travelling Strings," British Journal of Applied Physics, Vol. 5, pp. 224~226.
- (2) Archibald, F. R. and Emslie, A. G., 1958, "The Vibration of a String Having a Uniform Motion Along Its Length," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 25, pp. 347~348.
- (3) Chubachi, T., 1958, "Lateral Vibration of Axially Moving Wire or Belt Form Material," Bulletin Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 1, pp. 24~29.
- (4) Swope, R. D. and Ames, W. F., 1963, "Vibrations of a Moving Threadline," Journal of the Franklin Institute, Vol. 275, pp. 36~55.
- (5) Mote, C. D., Jr., 1965, "A Study of Band Saw Vibrations," Journal of the Franklin Institute, Vol. 279, pp. 430~444.
- (6) Lee, S.-Y. and Mote, C. D., Jr., 1996, "Vibration Control of an Axially Moving String by Boundary Control," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 118, pp. 66~74.
- (7) Lee, S.-Y. and Mote, C. D., Jr., 1997, "A Generalized Treatment of the Energetics of Translating Continua, Part I : Strings and Tensioned Pipes," Journal of Sound and Vibration, Vol. 204, pp. 735~753.
- (8) Lee, S.-Y. and Mote, C. D., Jr., 1998, "Traveling Wave Dynamics in a Translating String Coupled to Stationary Constraints : Energy Transfer and Mode Localization," Journal of Sound and Vibration, Vol. 212, pp. 1~22.
- (9) Leonard Meirovitch, "Analytical Method in Vibrations," Macmillan Publishing Co. Inc., New York
- (10) Chung, J. and Hulbert, G.M., 1993, "A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation : the Generalized -  $\alpha$  Method," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 60, pp. 371~375.