

폴라캐비티(Polar Cavity)의 유동특성에 관한 수치해석

김진구* · 조대환**

A Numerical Analysis on the Flow Characteristics of Polar Cavity

J. G. Kim · D. H. Cho

Key words : Polar Cavity(폴라캐비티), High Reynolds Number(고레이놀즈수), Unsteady Flow(비정상유동), Finite Difference Method(차분법)

Abstract

A numerical study of the flow of incompressible fluid in a polar cavity is presented. Irregular grids is proposed by applying the interior division principle to the variables on polar coordinate grid formation. Stability analysis and the pressure correction method of SOLA algorithms were discussed in detail on a cylindrical coordinates.

The results present that unsteady flow behavior appears over $Re=3 \times 10^4$ on polar cavities but nearly steady state at $Re=10^4$. Furthermore, with increasing Reynolds numbers, vortices behaviors indicate more complicated flow phenomena and more severe temporal fluctuation of total kinetic energy and time variation of velocity components at arbitrary pick-up points are detected in case of $Re=5 \times 10^4$.

기호설명

C_r : 반경방향에 대한 Courant 수
 C_θ : 원주방향에 대한 Courant 수
 r : 반경
 $r(i)$: i번째 호까지 반경방향의 길이
 T : 무차원시간
 u : x 방향의 무차원 속도
 v : y방향의 무차원 속도

$v_r(i, j)$: i, j 위치에서의 반경방향속도성분
 $v_\theta(i, j)$: i, j 위치에서의 원주방향속도성분
 θ : 각도
 ν : 동점성계수

1. 서 론

유체역학에 관련된 기계나 기기의 설계 또는 성능 향상을 위한 제반 과정에서 가장 기본이 되는

* 도립 옥천대학 기계과(원고접수일 : 99년 11월)

** 목포해양대학교 기관공학부

것은 수반하는 유체의 거동을 파악하는 일일 것이다. 그 중에서도 치차펌프(gear pump)의 케이싱과 회전기어 사이의 유동장은 아직까지도 규명되지 않은 복잡한 유동특성을 보이고 있다. 이 펌프는 구조가 간단하고 내구성이 있어 과격한 운전조건에도 잘 견디므로 많은 용도로 사용되고 있다. 작동원리는 케이싱 내에 한 쌍의 기어가 맞물려 회전하면서 원추형의 공간으로 유체를 흡입하여 토출구 측으로 밀어내게 된다. 베인 펌프의 경우도 내부 유동장은 유사한 구조이나 내부용적이 변화하는 점이 이 펌프와 상이한 점이다. 펌프의 회전에 의해 전단응력을 공급받는 원추형의 내부유동장은 덮개구동 플라캐비티로 단순화 될 수 있다. 캐비티 유동장은 대표적인 밀폐흐름이며 정방향의 경우 실험⁽¹⁾ 및 전산유체역학분야에서 경계조건이 단순함으로 인하여 벤치마크시험용으로 자주 다루어지고 있으며 지금까지 많은 연구결과가 보고되어 있다.

Ghia 등⁽²⁾은 2차원의 벨트구동 정방향 캐비티 유동장에 대하여 $Re=10^4$ 까지의 고레이놀즈수에 대하여 차분법을 적용하고 있으나 어느 경우에도 정상유동상태를 나타내고 있다. Huser 등⁽³⁾은 자유표면 전단구동에 의한 2차원 정방향 캐비티계산에서 $Re=3 \times 10^4$ 의 경우에는 비정상적인 유동특성이 나타남을 보고하고 있으며 난류의 관점에서 고찰을 행하고 있다. 이 등⁽⁴⁾은 벨트구동 2차원 정방향캐비티에 대하여 $Re=7.5 \times 10^3, 10^4$, 및 3×10^4 의 세 종류에 대한 계산에서 매우 활발한 비정상 유동특성을 보고하고 있으며 특히 $Re=3 \times 10^4$ 에서는 태풍의 일생과 유사한 TLV(Typhoon-Like Vortex)의 현상을 설명하고 있다.

2차원의 플라캐비티 유동장에 관해서는 Fuchs 등⁽⁵⁾이 행한 계산 및 실험결과가 대표적이다. 계산에서는 두 종류의 저 레이놀즈수에 대한 정상유동을 대상으로 하였으며 이를 검증하기 위한 실험으로서 LDV를 이용한 속도계측결과를 제시하고 있다.

이러한 배경으로부터 이 연구에서는 플라캐비티의 유동특성을 세 종류의 고레이놀즈수($Re=10^4, 3 \times 10^4, 5 \times 10^4$)에 대해 고찰하였다. 그 결과 $Re=10^4$ 를 제외하고는 매우 불규칙한 비정상 특성

을 나타내었으며 특히 $Re=5 \times 10^4$ 에서 매우 복잡한 유동구조가 발견되었다.

2. 계산방법

원통좌표계에서 비압축, 점성유체의 보존형 운동방정식과 연속 방정식은 2차원 $r-\theta$ 좌표계에서 무차원 식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial v_r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{\partial v_r v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r^2 - v_\theta^2}{r} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{v_r}{r^2} \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{\partial v_r v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{\partial v_\theta v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{v_r}{r^2} \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{v_\theta v_\theta}{r} + \frac{v_r v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

Fig. 1은 계산에 사용된 변수들의 정의를 나타내고 있다. 상기의 미분방정식을 보존형으로 부동간격 격자에 대하여 다음과 같이 차분화하였다.

$$\frac{\partial v_r v_r}{\partial r} \approx \frac{2(v_{r2} v_{r2} - v_{r1} v_{r1})}{\Delta r(i) + \Delta r(i+1)} \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_r v_\theta}{\partial \theta} \approx \frac{(v_{r3} v_{\theta 3} - v_{r4} v_{\theta 4})}{r(i) \Delta r(i)} \quad (5)$$

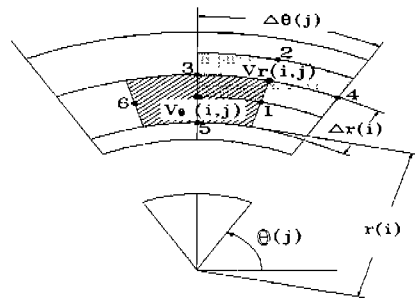


Fig. 1 Variable Allocation

$$\frac{\partial v_r v_\theta}{\partial r} = \frac{(v_{r3} v_{\theta 3} - v_{r5} v_{\theta 5})}{\Delta r(i)} \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta v_\theta}{\partial \theta} = \frac{2(v_{\theta 6} v_{\theta 6} - v_{\theta 1} v_{\theta 1})}{(r(i) - \Delta r(i)/2)(\Delta \theta(j) + \Delta \theta(j+1))} \quad (7)$$

$$\frac{v_r^2 - v_\theta^2}{\partial r} = \frac{v_r(i, j)v_r(i, j) - v_{\theta\theta} v_{\theta\theta}}{\Delta r(i)} \quad (8)$$

단, 상기 식에서의 변수기호는 다음과 같이 정의된다.

$$v_{\theta\theta} = \frac{(v_{\theta 3} + v_{\theta 4})}{2} \quad (9)$$

$$v_{r1} = \frac{v_r(i-1, j) + v_r(i, j)}{2} \quad (10)$$

$$v_{r3} = \frac{\Delta \theta(j+1) \times v_r(i, j) + \Delta \theta(j) \times v_r(i, j+1)}{\Delta \theta(j) + \Delta \theta(j+1)} \quad (11)$$

$$v_{r3} = \frac{\Delta r(i+1) \times v_\theta(i, j) + \Delta r(j) \times v_\theta(i+1, j)}{\Delta r(i) + \Delta r(i+1)} \quad (12)$$

$$v_{rr} = \frac{v_{r3} + v_{r5}}{2} \quad (13)$$

시간 진행에 대한 안정성을 확보하기 위하여 원통좌표계 상에서 외관 전파에 대한 안정성 해석⁽⁶⁾을 하면 식(14)와 같은 조건이 필요하다.

$$C_r = \frac{v_r \Delta t}{\Delta r} \leq 1, C_\theta = \frac{v_\theta \Delta t}{r \Delta \theta} \leq 1 \quad (14)$$

여기서 C_r 과 C_θ 은 원통좌표계에서 Courant수이다. 또한 점성항의 영향을 평가하기 위하여 Von Neumann의 안정성 해석을 적용하면 시간진행에 관한 식(15)를 얻을 수 있다.

$$\Delta t < \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{r(i)\Delta r(i)} + \frac{4}{\Delta(i)^2} + \frac{4}{r(i)^2 \Delta \theta(j)^2} + \frac{1}{r(i)^2}}} \quad (15)$$

상기의 식에서 알 수 있듯이 격자의 크기가 시간 간격의 허용 값에 크게 영향을 미치며 특히 분모에 나타나고 있는 세 번째 항을 살펴보면 격자크기의 4제곱에 상당하므로 안정성을 확보하기 위한 시간 간격이 매우 작아지게 됨을 알 수 있다.

MAC계열(7)의 차분식에서는 수속조건을 만족

시키기 위하여 압력 및 속도의 동시완화기법을 택하고 있으며 반복과정에서 수정량이 쉽게 얻어질 수 있는 장점이 있다. 원통좌표계의 압력보정항은 식(16)과 같다.

$$\Delta P(i, j) = - \frac{D(i, j)}{2\left(\frac{r(i)}{\Delta r(i)^2} + \frac{1}{r(i)\Delta \theta(j)^2} + \frac{1}{2\Delta r(i)}\right)\Delta t} \quad (16)$$

단,

$$D(i, j) = \frac{r(i+1)v_r(i+1, j) - r(i)v_r(i)}{\Delta r(i)} + \frac{v_\theta(i, j+1) - v_\theta(i, j)}{\Delta \theta(j)}$$

Fig. 2는 대상유동장의 형상을 보여준다. 수치계산에서 $r=1.0$ 이고 $\theta=45^\circ$ 각도인 원추형의 형상에서 원의 중심으로부터 아랫부분을 제거하여 반경방향의 길이가 $r=0.690$ 인 유동장으로 모델링하였다. 그리고 운동량은 반경 $r=1.0$ 인 곳에서 덮개가 밀폐 접촉하여 시계방향으로 회전하면서 공급되는 것으로 가정하였다. 격자배치는 반경방향과 원주방향을 각각 40개 및 60개로 하는 부등간격 격자구조를 택하였다.

계산의 정도를 높이기 위하여 원주방향의 격자를 벽면에서 조밀하게 분포시켰고 빠른 시간진행을 위하여 반경 방향의 격자는 거의 등간격에 가까운 값을 갖도록 하였다. 원주방향의 부등간격 격자의 크기는 식(17)으로 계산하였다.

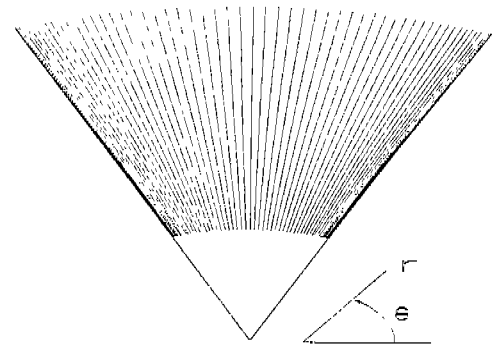


Fig. 2 Grid Formation

$$\Delta(i) = \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \pi \frac{i}{N-1}\right) + CF \right\}$$

$$\left/ \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \pi \frac{j}{N-1}\right) + CF \right\} \right.$$

$$i = 1, 2, 3 \dots N-1 \quad (17)$$

여기서 N은 격자 수이며 CF는 격자크기를 조절하는 매개변수로서 0.01의 값을 취하였다. 반경방향의 최소격자 크기는 0.0167(반경방향길이 0.690에 대하여 약 1/40의 크기)이고 원주방향의 최소격자는 0.074도(원주각도 45도에 대하여 약 1/600의 크기)이다. 레이놀즈수는 원점으로부터 외부원주까지의 반경을 대표길이, 외부원주에서 시계방향으로의 회전속도를 대표속도로 하여 정의하였다. 본 연구에서는 $Re=10^4$, 3×10^4 , 및 5×10^4 의 세 종류를 레이놀즈수를 채택하고 수치해석을 하였다.

식(14)와 식(15)에서 계산된 시간간격에 안정계수를 곱하여 시간적분을 행하였다. 안정계수는 $Re=10^4$ 의 경우 0.5를 적용하였고 3×10^4 및 5×10^4 은 각각 0.3과 0.2를 적용하였다. 속도 및 압력의 반복수렴 판정조건으로서는 각 격자에서의 발산(divergence)의 최대 값이 0.002를 초과하지 않는 것으로 하였다. 한번의 전진시간 간격에 대하여 평균 20회 미만의 반복횟수를 나타내었다. 계산시간은 레이놀즈수에 따라 다르지만 완전히 발달한 유동장에 대하여 무차원시간 간격 100에 대하여 Pentium III (450MHz)기종에서 약 2시간 전후가 소요되었다.

3. 계산결과 및 고찰

계산결과 무차원시간 $t=1,000$ 에서는 유동장이 충분히 발달된 것으로 판단되었다. 이 연구에서는 $t=1,000 \sim 1,100$ 사이의 계산결과를 유동해석에 이용하였다.

Fig. 3은 $Re=3 \times 10^4$ 과 $Re=5 \times 10^4$ 에서 순간속도벡터를 보여주고 있다. 전체적인 경향으로서는 유동장의 중앙에 커다란 주와류(primary vortex)가 존재하며 하부에 제2와류가 커다란 규모로 발생하고 있다. Fig. 3(a)에서 보면 비정상적인 유동특성을 나타내고 있으며, 특히 하부의 영역에서 다소 복잡한 와류들이 존재하고 있음을 알 수 있다.

그림은 생략하였으나 $Re=10^4$ 에서는 순간 속도분포가 시간평균의 분포와 같이 정연한 상태를 나타내었다. 따라서 비정상적인 유동이 나타나기 시작하는 임계레이놀즈수는 10^4 와 3×10^4 사이에서 존재하고 있음을 알 수가 있다. Fig. 3(b)에서는 주와류의 구조까지가 크게 변하며 유동장 전체에서 비정상적인 유동특성이 지배적임을 나타내고 있다. 이와 같은 복잡한 유동은 본격적인 난류의 발생과 밀접한 관련을 가질 것으로 예상하며 플라캐비티에서의 고레이놀즈수 유동장의 대표적인 특성으로 보여진다.

Fig. 4는 무차원시간 $t=1,000 \sim 1,100$ 사이에 $t=0.25$ 의 간격으로 저장한 400개의 순간속도분포를 산술 평균한 시간평균 속도벡터분포이다. Fig. 4에서는 비정상 특성이 크게 나타나는 $Re=3 \times 10^4$ 및 5×10^4 의 결과가 정상상태를 유지하는 $Re=10^4$ 의 평균속도분포와 주와류의 크기 등, 유동형태에 있어 크게 다르지 않은 모습을 보이고 있다. 그러나 레이놀즈수의 증가에 따른 주와류의 강도 및 하부영역에 형성된 와류의 크기 등에서 차이

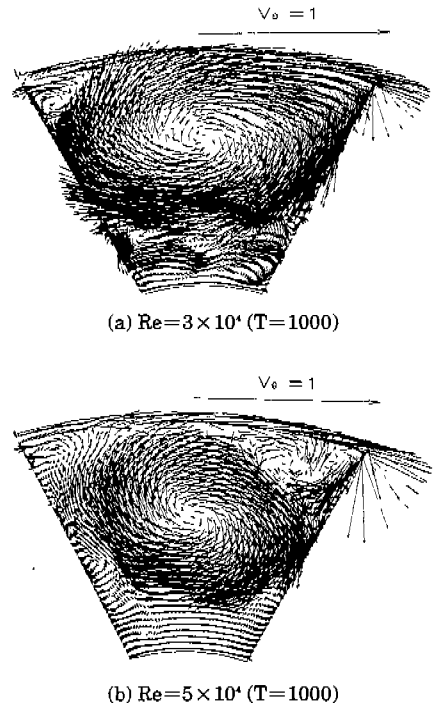


Fig. 3 Instantaneous Flow Patterns

점이 발견되고 있다. 또한 상부 우측모서리에서의 속도벡터크기가 레이놀즈수가 커질수록 작아짐을 보이고 있다. 그러나 전반적으로 시간평균에서 나타나는 유동 형태를 중심으로 비정상적인 유동특성을 유지함을 알 수 있으며 2차원의 정방형 캐비티의 경우에서 $Re=3 \times 10^4$ 의 결과(4)와도 일치하고 있다.

Fig. 5는 Fig. 4에서의 시간평균 유동장의 유선도이고 Fig. 6은 중앙단면에서의 시간평균한 u 와 v 의 속도분포도이다. 레이놀즈수가 커질수록 외부

원주부근을 제외하고는 속도 값이 작아지고 있다. 따라서 레이놀즈수가 커질수록 외부원주의 회전에 따른 전단운동에너지가 압력에너지의 형태로 전환되는 것으로 추정된다.

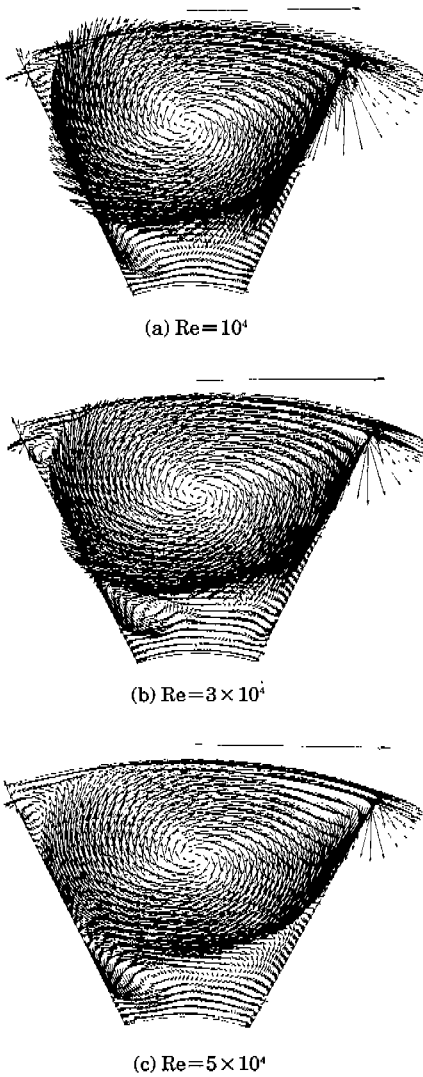


Fig. 4 Time-Mean Flow Patterns

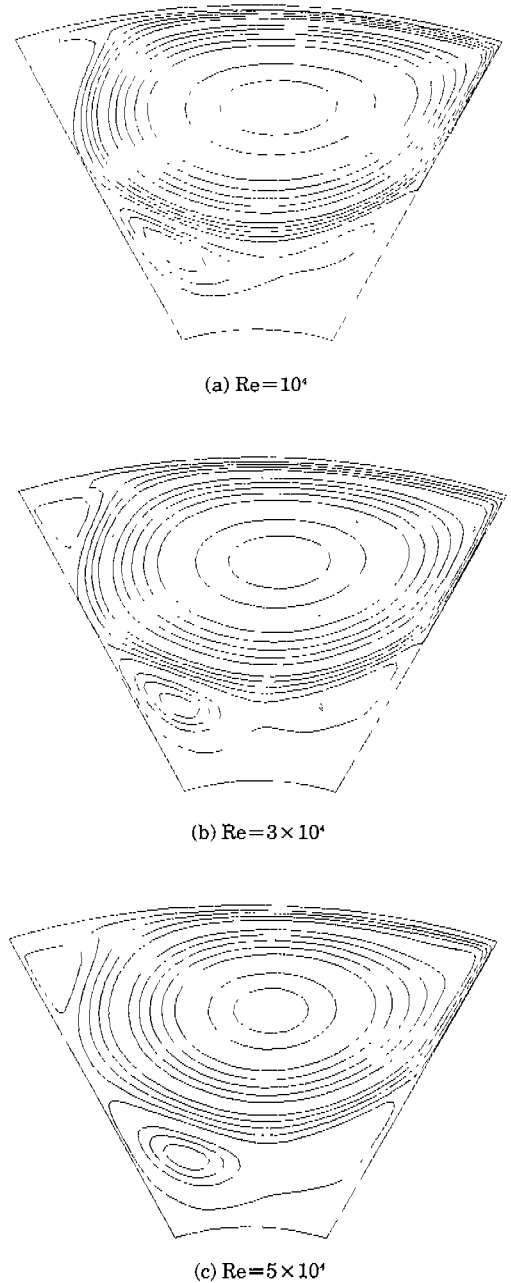


Fig. 5 Time-Mean Stream Lines

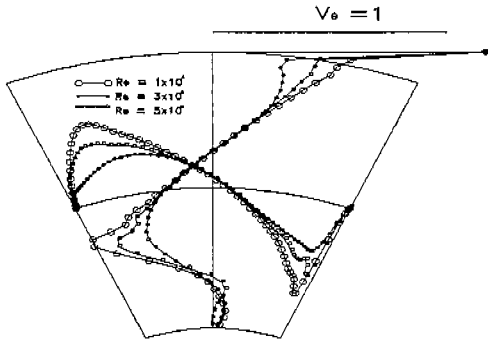
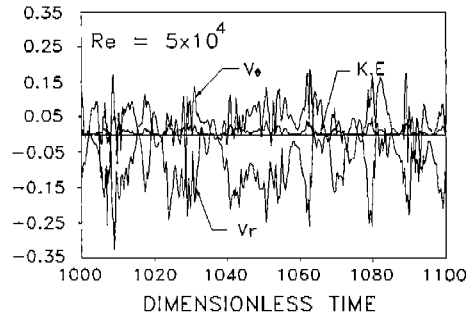


Fig. 6 Time-Mean Velocity Profiles on Center Line

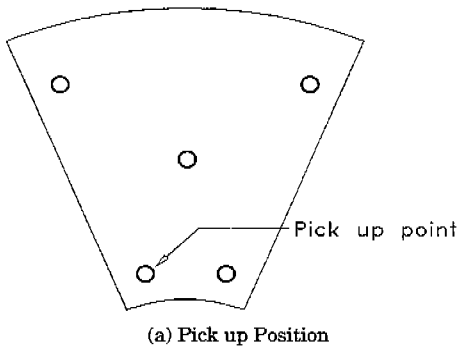


(d) $Re=5 \times 10^4$

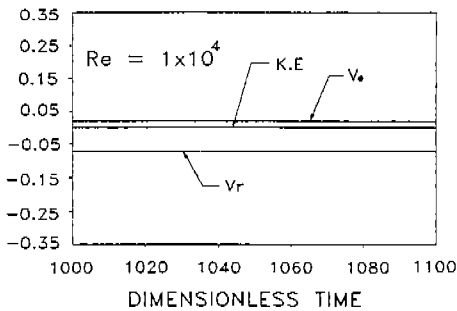
Fig. 7 Fluctuation of Velocity and Kinetic Energy ($r=0.446, \theta=110^\circ$)

Fig. 7은 무차원 시간간격($t=1,000 \sim 1,100$) 동안 임의의 위치($r=0.446, \theta=110^\circ$)에서의 u-속도 성분, v-속도성분 그리고 운동에너지의 값을 시계 열적으로 표시한 결과이다. $Re=10^4$ 에서는 정상상태를 유지하고 있으나 이 이상의 레이놀즈수에서는 매우 불규칙한 분포특성을 보이고 있다. $Re=5 \times 10^4$ 에서는 3×10^4 에서 보다 변동폭이 크게 나타나며 고주파수 성분이 일부에서 발생되고 있다. 이것은 비정상적인 유동특성이 보다 활발함을 보여주고 있다.

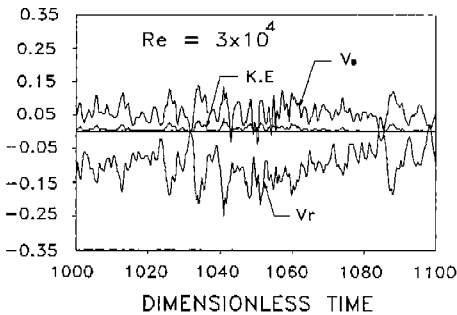
Fig. 8은 외부원주의 회전운동에너지가 급하게 시계방향으로 회전하는 부분($r=0.926, \theta=72^\circ$)에서 검출한 결과이다. 특히 $Re=5 \times 10^4$ 에서 변동폭과 주파수가 크게 증가함을 나타내고 있다.



(a) Pick up Position



(b) $Re=10^4$

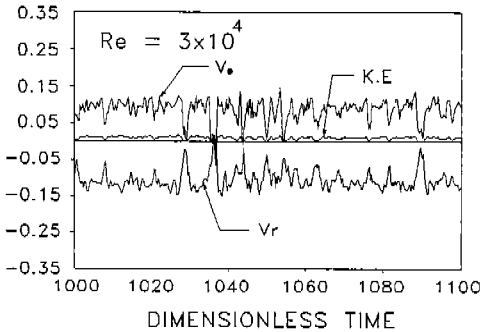


(c) $Re=3 \times 10^4$

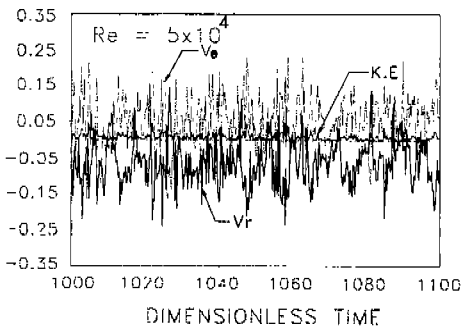
4. 결 론

이 연구에서는 치차펌프의 케이싱과 기어의 틈새의 유동장을 2차원의 플라캐비티로 단순화하고, 세 종류의 고레이놀즈수($Re=10^4, 3 \times 10^4, 5 \times 10^4$)에 대해 수치해석을 하여 내부 유동특성을 고찰하였다. 그 결과 다음의 결론을 얻었다.

1. 플라캐비티의 전체적인 유동형태는 중앙에 강제와류의 특성을 갖는 주와류(primary vortex)와 좌측 상부모서리 및 주와류의 하부 측에 이차와류가 커다란 규모로 존재하였다.



(a) $Re=3 \times 10^4$



(b) $Re=5 \times 10^4$

Fig. 8 Fluctuation of Velocity and Kinetic Energy($r=0.926, \theta=72^\circ$)

2. 시간평균의 유동형태에서 레이놀즈수에 따른 차이가 크게 나타나지 않았으나 순간속도분포에서는 $Re=10^4$ 를 제외하고는 매우 불규칙한 비정상 유동특성을 나타내었다.
3. $Re=5 \times 10^4$ 의 경우 전유동장에서 매우 활발한 박리현상 및 다수의 와류발생이 나타났다. 그리고 임의 점에서 검출된 속도 파형에서 변동진폭 및 주파수가 매우 크게 나타났다.
4. 차후의 연구과제로서 변동주파수에 대한 스펙트럼분석을 통한 탁월주파수 특성의 면밀히 검토가 필요하다.

참고문헌

1. J. R. Koseff, R. L. Street, "The Lid-Driven Cavity Flow: A Synthesis of Qualitative and Quantitative Observations", Trans. of the ASME, Vol. 106, pp. 390~398, 1984.
2. U. Ghia, K. N. Ghia & C. T. Shin, "High-Re Solution for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", J. Comp. Phys. 48, pp.387~410, 1982.
3. A. Huser & S. Biringen, "Calculation of Two-Dimensional Shear-Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers", Int. J. of Num. Methods in Fluids, Vol.14, pp.1087~1109, 1992.
4. Young-Ho Lee, Chun-Sik Kim and Jang-Woon Choi, "A Revised Convective Scheme for High Reynolds Number and Its Application", JSME/KSME of Fluid Eng. Conf., pp.312~316, 1994.
5. L.Fuchs & N. Tillmark, "Numerical and Experimental Study of Driven Flow in a Polar Cavity", Int. J. for Num. Methods in Fluids, vol. 5, pp.311~329, 1985.
6. C. W. Hirt, Heuristic Stability Theory for Finite-Difference, J. Comp. Phys. Vol. 2, pp.339~355, 1968.
7. R. Verstappen, J. G. Wissink, A. E. P. Veldman, Direct Numerical Simulation of Driven Cavity Flows, Applied Scientific Research, Vol. 51, pp.377~381, 1993.

저 자 소 개



김진구(金鎮九)

1982년 한국해양대학교 기관학과 졸업,
1997년 한국해양대학교 대학원 기관공학과 졸업(박사), 육천대학 기계과 전임강사, 당학회 정회원



조대환(趙大煥)

1986년 한국해양대학교 기관학과 졸업,
1998년 한국해양대학교 대학원 기계공학과 졸업(박사), 목포해양대학교 기관공학과 전임강사, 당학회 종신회원