

동축소법을 이용한 부분구조합성법

박석주* · 박성현** · 김성우***

Substructure Synthesis Method using Dynamic Reduction

S. C. Park* · S. H. Park** · S. W. Kim***

Key words : Substructure Synthesis Method(부분구조 합성법), Dynamic Reduction(동축소)
Component Mode Synthesis Method(구분 모드 합성법), Static Reduction(정축소)

Abstract

The component mode synthesis method(CMS) used for vibration analysis has demerit that error becomes larger, as degree of natural frequency grows higher.

The reason of error occurrence is that Guyan's static reduction is used and the number of modes taken in each component is deficient.

This paper proposes the substructure synthesis method using dynamic reduction to solve the problem from the component mode synthesis method.

Computer simulation for the proposed method, FEM and the component mode synthesis method(CMS) on a rectangular plate has been carried out to prove the availability of the proposed method.

1. 서 론

구조물의 동적 해석 문제에 대한 유한 요소 해석법은 지난 수십 년 간 많은 연구자들에 의해 개발·적용되어 왔으며 현재는 단순한 진동해석뿐만 아니라 최적화문제 등에도 활용되는 범용적인 도구가 되고 있다.

그러나 유한요소해석법에 의한 진동해석은 구조물이 복잡해지거나 대형화되면 일반적으로 요소분할 수를 증가시켜야 하므로 자유도가 매우 커지게 되어 컴퓨터의 발전에도 불구하고 계산시간과 계산기 기억용량의 제한을 받게 된다. 이러한 문제점을 보완하기 위해 보다 개선된 모델링 기법 및 계산방법의 개발에 많은 관심을 가져왔다. 그

* 정회원, 한국해양대학교 조선·해양공학부(원고접수일 : 99년 12월)

** 일본 류슈대학교 선박해양시스템공학부 박사과정

*** 한국해양대학교 대학원 조선공학과

중에서 행렬 축소법과 부분 구조 합성법을 대표적으로 꼽을 수 있다.

행렬 축소법 중에서는 Guyan의 정축소법⁽¹⁾ (static reduction method)이 대표적이나 이 정축소법은 질량항을 무시하고 강성항만으로 행렬을 축소하여 해석하게 되므로 고유진동수가 높아질수록 오차가 커지게 되는 단점이 있다.

그리고 부분 구조 합성법은 구조물을 몇 개의 부분 구조(이하 분계)로 나누고 이들 분계들에 대해 진동해석하여 구한 해를 전체 구조로 합성하는 과정에서 계산을 단순화시키는 방법이다. 그 중에서도 Guyan의 정축소법을 채용하여 자유도를 축소 하면서 정축소법이 가지는 단점을 보완하기 위해 저차의 십 수 개 또는 수십 개의 고유모우드를 채용함으로써 비교적 계산 정도가 우수한 구분 모우드 합성법^{(2)~(4)}(Component Mode Synthesis method ; CMS)이 폭넓게 사용되고 있다. 그러나 구분 모우드 합성법도 십 수 개 혹은 수십 개의 고유진동수만을 구하는 진동해석에서 정도가 우수하나 분계 채용 모우드수의 누락과 정축소법의 채용으로 합성 단계가 근사적으로 이루어지는 것이므로, 특히 소음문제 등과 같이 고차 고유진동수의 주파수대역까지 해석할 경우에는 오차가 발생하게 된다. 일반적으로 고차 고유진동수의 정도를 높이기 위해 분계의 채용 모우드수를 많게 해야 하지만 결합부 자유도가 작은 경우에는 그 한계가 있고, 너무 많은 모우드를 채용해야 한다면 자유도의 축소라는 부분 구조 합성법의 장점을 상실할 수 있다.

본 연구에서는 이와 같이 구분 모우드 합성법이 고차 고유진동수대역에서 진동해석시 발생하는 문제점을 보완할 수 있는 방법으로서, 동축소법을 이용한 부분 구조 합성법을 제안하고자 한다.

동축소법은 정축소법과 달리 질량항까지 포함하여 행렬을 축소하는 방법으로 동축소법을 이용한 부분 구조 합성법은 분계의 모우드를 채용할 필요성을 뿐만 아니라 고차 고유진동수의 해석에도 정도가 뛰어난 장점을 가진다. 그러나 본 방법은 아직 개발 단계이므로 간단한 구조물에만 응용 가능하다.

제안한 방법의 유효성을 검증하기 위해 직사각형의 평판 모델에 대하여 FEM 해석과 구분 모우

드 합성법에 의한 해석을 수행하여 얻은 결과와 동축소법을 이용한 부분 구조 합성법에 의한 해석 결과를 비교하여 보았다.

2. 정축소법과 구속형 모우드합성법

먼저 부분 구조 합성법의 기초 이론이 되는 Guyan의 정축소법과 정밀도가 높아 가장 많이 이용되는 구속형 모우드 합성법에 대해 논하기로 한다.

2.1 Guyan의 정축소법(Guyan's static reduction method)

임의의 계를 Fig.1과 같이 모델화하여 힘이 작용하는 부분과 힘이 작용하지 않는 부분으로 나누어서 운동방정식을 표현하면,

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

와 같이 되고, 여기서 정역학적 문제만을 생각하면,

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

가 된다.

상기 식에서 $\{X_1\}$ 은,

$$\begin{aligned} [K_{11}]\{X_1\} + [K_{12}]\{X_2\} &= \{0\} \\ \{X_1\} &= [T]\{X_2\} \end{aligned} \quad (3)$$

단, $[T] = -[K_{11}]^{-1}[K_{12}]$

로 표시되며 $[T]$ 를 Guyan의 정축소 행렬이라 한다.

따라서 계의 자유도를 외력이 작용하고 있는 부

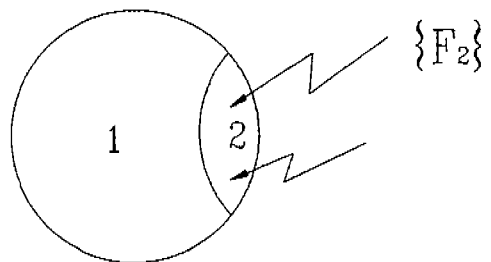


Fig. 1 Guyan's static reduction model

분만의 자유도로 다음과 같이 축소할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T] \\ [r \ I] \end{bmatrix} \{X_c\} \quad (4)$$

그러나 정축소법을 이용하면 정적인 해석에서는 오차가 발생하지 않지만 동적인 진동해석에 있어서는 질량항을 무시한 자유도 축사이므로 고차 고유진동수 대역으로 갈수록 오차가 커지게 되어 이에 대한 수정 보완이 필요하게 된다.

2.2 구속형 모우드 합성법

Fig. 2와 같이 각 부분구조를 결합영역 c와 비결합영역 e로 나누고 이 계의 자유진동에 대한 운동방정식을 쓰면,

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 \begin{bmatrix} M_{ee}^{(1)} & M_{ec}^{(1)} & 0 & 0 \\ M_{ce}^{(1)} & M_{cc}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{ee}^{(2)} & M_{ec}^{(2)} \\ 0 & 0 & M_{ce}^{(2)} & M_{cc}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ee}^{(1)} & K_{ec}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{ce}^{(1)} & K_{cc}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{ee}^{(2)} & K_{ec}^{(2)} \\ 0 & 0 & K_{ce}^{(2)} & K_{cc}^{(2)} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_e^{(1)} \\ X_c^{(1)} \\ X_e^{(2)} \\ X_c^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F_{12} \\ 0 \\ F_{12} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

와 같이 되고, 식(5)는 다음과 같은 표현이 가능하다.

$$-\omega^2 [M] \{X\} + [K] \{X\} = \{F\} \quad (6)$$

여기서, F_{12} 는 결합영역 c를 통해 분계 1에서 분계 2로 작용하는 내력이다.

강결합인 경우에는 결합부의 변위는 일치하고, 결합부에서의 작용력과 반작용력이 같으므로 다

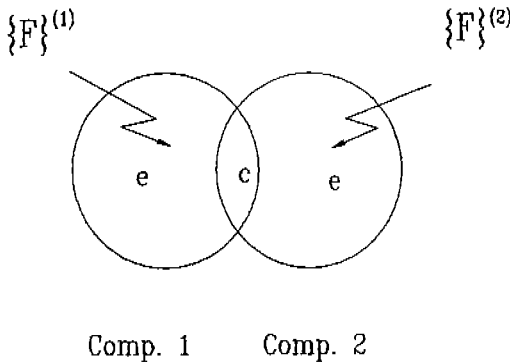


Fig. 2 Model for constraint mode synthesis

음과 같은 결합조건이 성립한다.

$$\begin{aligned} \{X_c\} &= \{X_c^{(1)}\} = \{X_c^{(2)}\} \\ \{F_c\} &= \{-F_{12}^{(1)}\} = \{F_{12}^{(2)}\} \end{aligned} \quad (7)$$

그리고 Guyan의 정축소 행렬 $[T]$ 를 도입하여 비결합부의 변위를 표시하면,

$$\{X_e\} = [T] \{X_c\} \quad (8)$$

와 같이 결합부만의 자유도로 표시되지만 정축소에 의한 오차를 줄이기 위하여 비결합부의 변위를 아래와 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} \{X_e\} &= [T] \{X_c\} + [\Phi] \{\xi\} \\ &= [[T] [\Phi]] \begin{Bmatrix} X_c \\ \xi \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, $[\Phi]$ 는 결합부를 고정했을 때의 각 분계의 고유 모우드 행렬이다.

따라서, 비결합부의 변위는 결합부 자유도에 결합부를 구속했을 때의 채용하는 고유 모우드수를 더한 자유도로서 표현된다. 다시 말하면 비결합의 변위는 결합부의 좌표변환과 결합부를 구속했을 때의 각 분계의 모우드 좌표변환의 합으로 표현되는 것으로 결합부를 구속한다고 가정했기 때문에 구속형 모우드 합성법이라고 부른다.

식(9)을 식(5)에 대입하고 변형하면, 결합부의 자유도에 각 부분구조의 채용 고유 모우드수의 합만의 자유도를 가진 식(6) 형태의 방정식이 되고 전 자유도의 방정식인 식(5) 대신에 자유도가 축소된 이 식을 풀면 되는 것이다.

3. 동축소법에 의한 부분구조합성법 (Substructure Synthesis Method using Dynamic Reduction ; DRSSM)

3.1 동축소법 (Dynamic reduction method)

앞서 언급한 정축소법과 달리 식(1)에서 질량항을 포함하여 고려하면,

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 [M_{11}] + [K_{11}] - \omega^2 [M_{12}] + [K_{12}] \\ -\omega^2 [M_{21}] + [K_{21}] - \omega^2 [M_{22}] + [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

가 된다. 위의 식(10)에서

$$[X_1] = [T][X_2] \tag{10}$$

단,

$$[\bar{T}] = (-\omega^2[M_{11}] + [K_{11}])^{-1}(\omega^2[M_{12}] + [K_{12}])$$

로 축소되고, $[\bar{T}]$ 는 동축소 행렬이 된다.

따라서 계의 자유도를 외력이 작용하고 있는 부분만의 자유도로 다음과 같이 축소 할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T} \\ I \end{bmatrix} X_2 \tag{12}$$

3.2 동축소법을 이용한 부분구조합성법

식(5)에 동축소 행렬 $[\bar{T}]$ 를 도입하여 비결합부의 변위를 나타내면

$$[X_2] = [T][X_d] \tag{13}$$

와 같이 결합부만의 자유도로 표시된다.

식(13)을 식(5)에 대입하고 변형하면 식(6)형태의 결합부만의 자유도로 동축소된 방정식이 되고 이 방정식을 푸는 문제로 귀결된다.

이와 같이 동축소를 이용한 부분구조합성법에서는 동축소법을 이용하여 자유도를 축소하기 때문에 정축소법을 이용한 구속형 모우드 합성법과 달리 비결합부의 고유모우드를 채용할 필요가 없고 또한 고차 고유진동수 대역에서도 정도 높은 결과를 얻을 수 있다.

동축소된 식을 풀기 위해서는 먼저 식(11)의 동축소 행렬내의 ω 를 구해야 한다. 이 ω 는 구하고자 하는 해이므로 초기치를 대입하여 진동해석을 하고 이 초기치와 일치하는 고유진동수를 반복 계산하여 구한다. 이 과정을 위해 이분법⁶⁾(bisection method)을 이용하였다. 그러나 이 수치해석적 알고리즘은 결합부의 자유도가 크게 되면 계산시간이 많이 걸리고, 서로 인접한 고유진동수들이 있는 경우에는 예기치 못한 값에 수렴할 수 있는 단점이 있다.

4. 수치해석 및 고찰

본 연구에 사용한 수치해석용 모델은 Fig.3에서

보인 바와 같이 1600mm×400mm×3t인 직사각형 연강판으로 가정하였고, 구분 모우드합성법으로 해석하기 위해 Fig.4와 같이 4개의 분계로 나누어 유한 요소 모델링하였다.

먼저 FEM 해석을 수행하고 이를 구분 모우드합성법과 동축소법을 이용한 부분구조합성법의 결과와 비교하였다. 구분 모우드합성법 계산시에는 20개의 모우드를 채용하였고, 각각의 해석 모두 70차까지의 고유진동수를 구하여 비교하였다.

Fig.5는 각각의 계산 결과중 1차에서 35차까지의 고유진동수를 비교하여 나타내었고, Fig.6에는

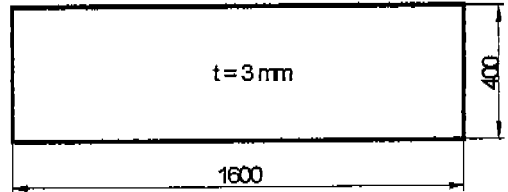


Fig. 3 Rectangular Plate for the analysis

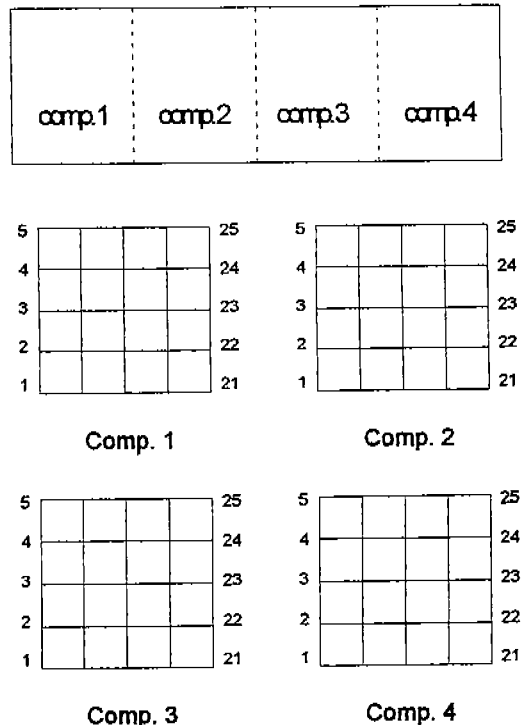


Fig. 4 Finite element model divided to four components

36차에서 70까지의 고유진동수를 나타내었다.

Fig.5와 Fig.6에서 보는 바와 같이 31차까지는 3 가지 해석 FEM과 동축소법을 이용한 부분구조합성법 및 구분 모드 합성법 모두가 완전히 일치하고 있지만 32차부터 70차까지는 구분 모드 합성법의 결과가 FEM, 동축소법을 이용한 부분구조합성법의 결과와 고차로 갈수록 큰 고유진동수의 차이를 보이고 있음을 알 수 있다.

그러나, 본 논문에서 제안한 동축소법을 이용한

부분구조합성법은 70차까지 FEM 해석과 완전히 일치하고 있음을 알 수 있다. Fig.7과 Fig.8에서는 FEM 해석의 결과에 대한 동축소법을 이용한 부분구조합성법과 구분 모드 합성법의 오차율을 나타내었다.

동축소법을 이용한 부분구조합성법은 거의 0%에 가까운 오차율을 보이고 있으나 구분 모드 합성법은 32차부터 고차로 갈수록 오차율이 심한 변동 폭을 나타내고 있음을 알 수 있다.

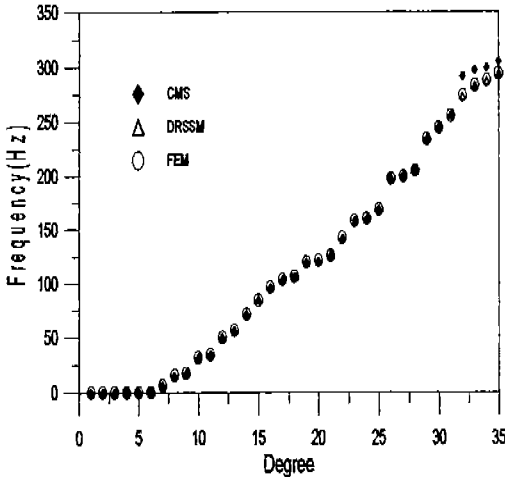


Fig. 5 Comparison of CMS, DRSSM & FEM(No. of natural freq. : 1~35)

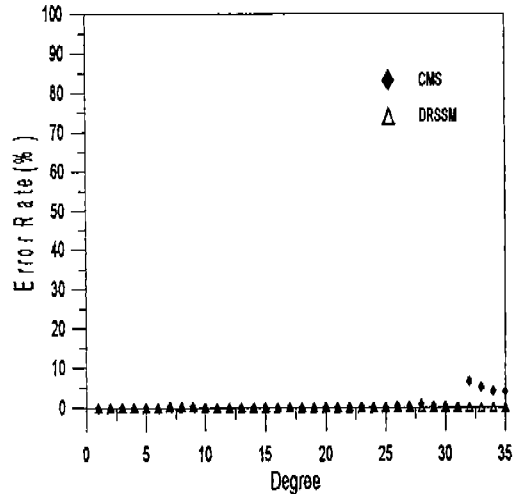


Fig. 7 Comparison of Error rate(No. of natural freq. : 1~35)

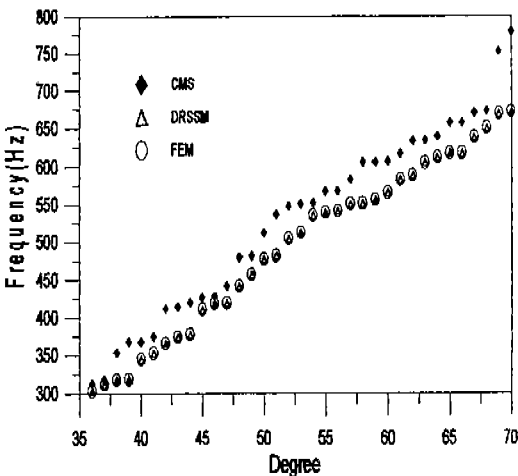


Fig. 6 Comparison of CMS, DRSSM & FEM(No. of natural freq. : 36~70)

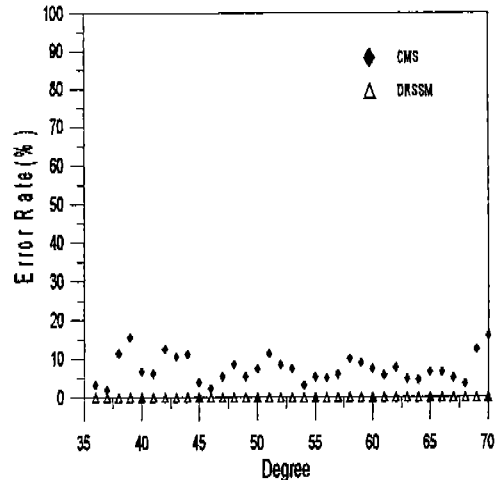


Fig. 8 Comparison of Error rate(No. of natural freq. : 36~70)

4. 결 론

참고문헌

본 연구에서는 동축소법을 이용한 부분구조합성법을 제안하고 이를 이용한 진동해석을 수행하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 구분 모우드 합성법으로 진동해석시 모우드를 저차의 몇십 개만 채용한다면 고차 고유진동수 대역으로 갈수록 오차가 커지는 것을 확인할 수 있었다.
- 2) 동축소법을 이용한 부분구조합성법에 의한 진동해석을 수행하여 FEM과 일치하는 결과를 얻을 수 있었고, 제안한 방법의 유효성을 입증할 수 있었다.
- 3) Guyan의 정축소법을 이용한 구분 모우드 합성법 해석의 단점인 고차 고유진동수대역으로 갈수록 고유진동수의 오차가 커지게 되는 것을 보완할 수 있었다.
- 4) 구분 모우드 합성법으로는 해석할 수 없는 소음문제 등에서 다루어지는 고차 고유진동수 대역에서의 해석도 가능하다

결합부의 자유도가 크거나 고유진동수들이 서로 인접하여 있더라도 보다 빠르고 정확한 해를 구할 수 있는 알고리즘 개발과 이를 실제 구조물에 적용하여 확인하는 것이 앞으로 해결되어야 할 연구과제이다.

- (1) R. L. Fox, "Rates of Changes of Eigen Values and Eigen Vectors", AIAA J., Vol. 6, No. 12, pp. 2426~2435, 1968.
- (2) 長松昭男, 大雄政明, "部分構造合成法", 培風館, pp. 59~78, 103~124, 1991.
- (3) 大雄政明, "部分構造合成法による 振動解析", 博士學位論文, 日本工業大學, 1986
- (4) 朴錫柱, 長松昭男, "部分構造合成法에 의한 振動解析과 動特性的의 最適化", 韓國船舶用機關學會, pp. 262~269, 1989.
- (5) 戶川 人, "マトリックス의 數値解析", 오ーム社, pp. 170~177, 224~230, 1971.

저 자 소 개



박석주(朴錫柱)

1953년생. 1976년 한국해양대학 항해학과 졸업. 1983년 부산대학교 대학원 조선공학과, 1989년 동경공업대학교 대학원 기계공학과. 1979년~한국해양대학교 교수



박성현(朴成鉉)

1988년 한국해양대학교 항해학과 졸업. 1993년 한국해양대학교 대학원 조선공학과 수료. 2000년 일본규슈대학교 선박해양시스템공학부 수료 (공학박사)



김성우(金聖祐)

1969년생. 1995년 한국해양대학교 조선공학과 졸업. 2000년도 한국해양대학교 대학원 조선공학과 졸업.