

# 변화위치 집중하중을 받는 변단면 단순보의 비선형 거동

## Non-Linear Behavior of Tapered Simple Beam with a Floating Concentrated Load

이        병        구\*   · 이        태        은\*\*  
Lee Byoung Koo   · Lee    Tae       Eun  
김        선        기\*\* · 김        종        응\*\*  
Kim    Sun       Ki    · Kim    Jong    Ung

### Abstract

This paper explores the non-linear behavior of tapered beam subjected to a floating concentrated load. For applying the Bernoulli-Euler beam theory to this beam, the bending moment at any point of elastica is obtained from the final equilibrium state. By using the bending moment equation and the Bernoulli-Euler beam theory, the differential equations governing the elastica of simple beam are derived, and solved numerically. Three kinds of tapered beam types are considered. The numerical results of the non-linear behavior obtained in this study are agreed quite well to the results obtained from the laboratory-scale experiments.

### I. 서    론

최근에 재료공학의 발달로 농공학을 비롯한 각종 구조공학 분야에서 탄성이 매우 큰 재료로 이루어진 구조물의 시공이 가능하게 되었다. 이러한 구조물에서는 대변형에 대해서도 안정성이 확보될 수 있기 때문에 구조물의 기하학적 비선형 거동 해석이 필수적이다. 구조물의 비선형 거동에 관한 연구방법으로는 정확형태해법, 급수해법, 수치해석 해법, 실험적 해법 등의 4가지로 구분할 수 있다(Lee, *et al.*, 1993). 정확형태해는 타원적분

의하여 정확탄성곡선식을 대수적 방법으로 산출하는 엄밀해이다. 이 방법은 대단히 난해하기 때문에 대상 구조물이 등단면이거나 고정단의 경계조건이 모두 기지수인 캔틸레버 보와 같이 간단한 형태의 구조물 해석에 제한되고 있다(Rojahn, 1968). 급수해는 정확탄성곡선식을 급수항으로 나타내어 급수항의 미지계수들을 대수적인 방법으로 결정하는 해법이다. 이 방법은 급수항을 적게 가정하면 미지계수를 용이하게 산출할 수 있지만 해의 정도는 매우 떨어진다. 반면에 공학적으로 허용될만한 정도의 해를 얻기 위해서는 많은 급수항

\* 원광대학교 공과대학

\*\* 원광대학교 대학원

키워드 : 변단면 보, 비선형 거동, 변화위치 집중하중, Bernoulli-Euler 보 이론

을 도입하여야 하며 이 경우에는 미지계수를 얻기가 매우 어렵다(Lau, 1981). 수치해석에는 정확탄성곡선상의 임의점에서 부정정력을 미지수로 하여 휨 모멘트식을 구하고 이 식을 기하학적 비선형 미분방정식에 적용하여 부정정력을 산출하는 방법이다. 이미 발표된 논문들이 대부분 이 방법에 의한 연구들이다. 이 방법에 의한 단순보의 비선형 거동에 관한 연구로는 Chucheeepsakul, *et al.* (1996), Lee, *et al.* (2000)의 논문을 들 수 있고, 캔틸레버 보에 관한 연구로는 이(1990), Lee, *et al.* (1993)의 논문을 들 수 있다. 실험적 해법은 정확탄성곡선을 실험에 의하여 산출하는 방법이며 앞에서 언급한 해석방법들의 이론적 검증에 이용되고 있다(Lee, *et al.*, 1993; Wilson and Strong, 1997).

이 논문은 변화위치 집중하중을 받는 변단면 단순보의 비선형 거동해석에 연구목적이 있다. 변단면을 구조물에 이용하는 경우에 경제적 이점, 미적 감각 또는 시공상의 이유 등으로 변단면 부재의 사용은 해석상의 어려움에도 불구하고 그 사용이 필수적이다. 저자들의 문헌조사로는 변화위치 집중하중을 받는 변단면 보의 비선형 거동해석에 이 논문이 최초인 것으로 사료된다.

이 논문에서는 보가 하중을 받아 최종적으로 평형이 된 상태에서 휨 모멘트 식을 산정하고, 이 식을 Bernoulli-Euler 보 이론에 적용하여 단순보의 비선형 거동을 해석하였다. 본 연구 방법의 타당성을 검증하기 위하여 실험실 규모의 실험을 시행하여 비선형 거동해석의 이론 값과 실험 값을 비교하였다. 이 연구에서 보의 재료는 선형탄성체로, 보의 축은 비압축성으로 가정하였다.

## II. 변단면의 정의

Fig. 1은 지간길이가  $l$ 이고, 지점  $A$ 의 단면이 차모멘트가  $I_A$ , 지점  $B$ 의 단면이차모멘트가  $I_B$ 인 변단면 보를 나타내고 있다. 점선으로 표시된 하중 재하전의 축방향 길이  $s$ 에서 단면이차모멘

트는  $I$ 로 정의한다. 이 논문에서는 단면이차모멘트  $I$ 가 다음 식으로 표시되는 선형 변단면을 채택한다(Gupta, 1985).

$$I = I_A [1 + (n^{1/e} - 1)s/l]^e, \quad n = I_B/I_A \quad \dots\dots(1a, b)$$

식 (1a)에서  $n$ 은 식 (1b)와 같이  $I_A$ 에 대한  $I_B$ 의 단면비이다.  $e$ 는 보의 변단면 형상에 따라서 결정되는 형상계수로서 폭 변단면의 경우  $e=1$ , 높이 변단면의 경우  $e=3$ , 정방형 변단면 또는 원형 변단면의 경우  $e=4$ 를 적용한다(Wilson, *et al.*, 1994).

Fig. 1에서 실선은 직선 보가 하중 재하후에 최종적으로 평형상태가 된 정확탄성곡선을 나타낸다. 임의점  $(x, y)$ 에서 보의 곡선길이는  $s$ 이며, 보의 축은 비압축성이기 때문에  $(x, y)$ 에서  $I$ 는 하중을 받기 전 보의 축  $s$ 에서  $I$ 와 같다. 정확탄성곡선상의 이동지점  $B'$ 에서  $s=l$ 이고, 따라서 지점  $B'$ 에서  $I$ 는  $I_B$ 이다.

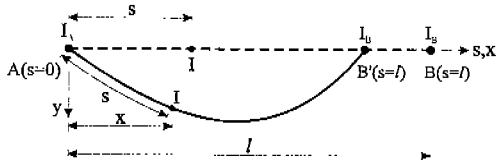


Fig. 1. Area moment of inertia before and after loading

## III. 수학적 모형

Fig. 2는 보가 변화위치 집중하중  $P$ 를 받아 최종적으로 평형상태를 이룬 정확탄성곡선의 변수들을 나타내고 있다. 이 연구에서 '변화위치 집중하중(floating concentrated load)'은 Fig. 2에서처럼 하중을 받기 전에 점선으로 표시된 집중하중이 하중을 받은 후에 실선으로 표시된 집중하중과 같이 하중의 작용선이 평행이동하는 집중하중으로 정의한다. 해석대상 보의 단순지지이며, 지점  $A$ 는 회

전지점, 지점  $B$ 는 이동지점이고, 지간길이는  $l$ , 하중 재하위치는  $L$ 이다. 하중 재하전에 보는 점선과 같이 직선상태이지만, 하중 재하후에 정확탄성곡선은 실선으로 표시되어 있다.

이 그림에서  $(x, y)$ 는 직교좌표계,  $s$ 는 지점  $A$ 로부터 보의 축을 따라 측정된 곡선길이,  $\theta$ 는 접선각,  $I$ 는 전 절에서 정의된 단면이차모멘트,  $M$ 은 휨 모멘트이다.  $\theta_A$ 는 지점  $A$ 의 접선각,  $R_A$ 는 지점  $A$ 의 수직반력이다. 집중하중  $P$ 의 수평변위는  $\Delta_P$ 이고, 지점  $B$ 의 수평변위는  $\Delta_R$ 이다. 보의 축은 비압축성이므로 정확탄성곡선에서 지간길이는  $l - \Delta_R$ 가 되고,  $P$ 가 위치하는 곡선길이  $s$ 는 하중 재하위치인  $L$ 을 유지한다. 정확탄성곡선상의 지점  $B'$ 에서  $s = l$ 이며,  $P$ 의  $x$ 좌표는  $L - \Delta_P$ 이다.

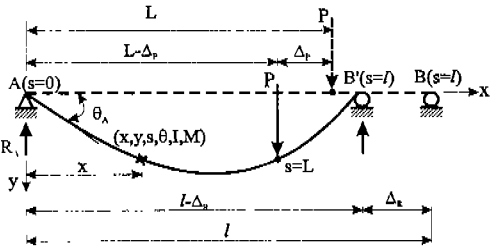


Fig. 2. Load and variables of elastica

Fig. 2의 정확탄성곡선은 Bernoulli-Euler 보 이론의 지배를 받는다. 이 이론을 적용하기 위하여 임의점에서 휨 모멘트  $M$ 을 산출하여야 하나  $\Delta_R$ ,  $\Delta_P$ 가 미지수이므로  $M$ 식을 산출할 수 없다. 그러므로 변화위치 집중하중을 받는 보의 비선형 거동에 대한 엄밀해는 아직 알려져 있지 않다. 따라서 이 연구에서는 비선형 거동의 개략해를 산출하는 수치해석 방법을 개발한다. 먼저  $\Delta_R$ 과  $\Delta_P$ 를 미지수인 채로 식 (2a)와 같이  $R_A$ 를 산출하고,  $R_A$ 를 이용하여 임의점  $(x, y)$ 에서 축방향력  $A$ , 전단력  $V$  및 휨 모멘트  $M$  식들을 다음과 같이 산출한다.

$$R_A = P(l - \Delta_R - L + \Delta_P) / (l - \Delta_R) \dots\dots\dots(2a)$$

$$A = \begin{cases} R_A \sin \theta, & 0 \leq s \leq L \\ (R_A - P) \sin \theta, & L \leq s \leq l \end{cases} \dots\dots\dots(2b)$$

$$V = \begin{cases} R_A \cos \theta, & 0 \leq s \leq L \\ (R_A - P) \cos \theta, & L \leq s \leq l \end{cases} \dots\dots\dots(2c)$$

$$M = \begin{cases} R_A x, & 0 \leq s \leq L \\ R_A x - P(x - L + \Delta_P), & L \leq s \leq l \end{cases} \dots\dots\dots(2d)$$

Fig. 3은 곡률반경이  $\rho$ 인 정확탄성곡선의 미소 요소이며, 이 요소에서 Bernoulli-Euler 보 이론에 의한 미분방정식들은 다음과 같다(Lee and Oh, 2000).

$$dx/ds = \cos \theta, \quad 0 \leq s \leq l \dots\dots\dots(3a)$$

$$dy/ds = \sin \theta, \quad 0 \leq s \leq l \dots\dots\dots(3b)$$

$$d\theta/ds = \rho^{-1} = -M(EI)^{-1}, \quad 0 \leq s \leq l \dots\dots\dots(3c)$$

식 (3c)에서  $E$ 는 탄성계수이다.

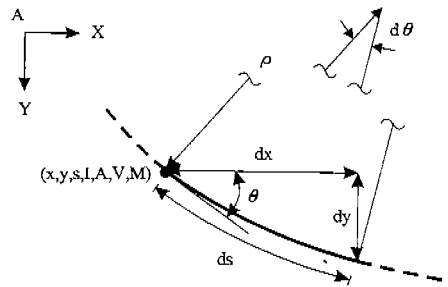


Fig. 3. Small element of elastica with curvature

Fig. 2의 정확탄성곡선에서 경계조건은 다음과 같다.

$$x_{s=0} = 0, \quad y_{s=0} = 0, \quad y_{s=l} = 0 \dots\dots\dots(4a \sim c)$$

$$x_{s=l} = l - \Delta_R, \quad x_{s=L} = L - \Delta_P \dots\dots\dots(4d \sim e)$$

식 (4a,b)는 지점  $A(s=0)$ 에서 수평변위와 수

직변위가 0이고, 식 (4c)는 지점  $B'(s=l)$ 에서 수직변위가 0임을 의미한다. 식 (4d)는 지점  $B'$ 의  $x$ 좌표가  $l-\Delta_R$ 이고, 식 (4e)는 집중하중  $P$ 의 위치에서  $s$ 는 하중의 처음 재하위치  $L$ 을 유지함을 의미한다. 경계조건 식 (4c~e)는 다음과 같이 하나의 식으로 정리하여 미분방정식 식 (3a~c)를 시행착오방법으로 해석하는 과정에서 미지수인  $\Delta_R, \Delta_P, \theta_A$ 를 찾는 데 이용한다.

$$|y_{s=l}| + |l - \Delta_R - x_{s=l}| + |L - \Delta_P - x_{s=L}| = 0 \quad \dots(5)$$

미분방정식들을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수를 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \lambda = s/l \quad \dots(6a \sim c)$$

$$\delta_R = \Delta_R/l, \quad \delta_P = \Delta_P/l, \quad \alpha = L/l \quad \dots(6d \sim f)$$

$$p = Pl^2/EI_A \quad \dots(6g)$$

$$i = I/I_A = [1 + (n^{1/a} - 1)\lambda]^e \quad \dots(6h)$$

$$r_A = R_A l^2/EI_A = p(1 - \delta_R - \alpha + \delta_P)/(1 - \delta_R) \quad \dots(6i)$$

$$a = Al^2/EI_A = \begin{cases} r_A \sin \theta, & 0 \leq \lambda \leq \alpha \\ (r_A - p) \sin \theta, & \alpha \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \quad \dots(6j)$$

$$v = Vl^2/EI_A = \begin{cases} r_A \cos \theta, & 0 \leq \lambda \leq \alpha \\ (r_A - p) \cos \theta, & \alpha \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \quad \dots(6k)$$

$$m = Ml/EI_A = \begin{cases} r_A \xi, & 0 \leq \lambda \leq \alpha \\ r_A \xi - p(\xi - \alpha + \delta_P), & \alpha \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \quad \dots(6l)$$

여기서  $\xi, \eta, \lambda, \delta_R, \delta_P, \alpha$ 는  $x, y, s, \Delta_R, \Delta_P, L$ 를 지간길이  $l$ 로 정규화한 것이며,  $p$ 는 무차원 하중,  $i$ 는 무차원 단면이차모멘트,  $r_A$ 는 무차원 반력,  $a, v, m$ 은 무차원 합응력이다.

미분방정식 식 (3a~c)와 식 (6a~l)을 이용하면

변화위치 집중하중을 받는 변단면 단순보의 비선형 거동을 지배하는 무차원 미분방정식이 유도된다.

$$d\xi/d\lambda = \cos \theta, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \dots(7a)$$

$$d\eta/d\lambda = \sin \theta, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \dots(7b)$$

$$d\theta/d\lambda = -m i^{-1}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \dots(7c)$$

경계조건식 식 (4a,b)와 식 (5)를 무차원화하면 다음과 같다.

$$\xi_{\lambda=0} = 0, \quad \eta_{\lambda=0} = 0 \quad \dots(8a,b)$$

$$|\eta_{\lambda=1}| + |1 - \delta_R - \xi_{\lambda=1}| + |\alpha - \delta_P - \xi_{\lambda=\alpha}| = 0 \quad \dots(8c)$$

#### IV. 수치해석방법 및 검증

주어진 단면조건  $n, e$  및 하중조건  $p, \alpha$ 에 대한 비선형 거동을 해석하기 위하여 미분방정식 식 (7a~c)를 수치해석하는 방법을 개발하였다. 이 연구에서 개발한 수치해석 방법을 간단히 설명한다.

미분방정식의 수치해석 문제는 초기치 문제이므로 경계조건식 식 8(a,b) 이외에 미지수인 경계조건  $\theta_A$ 와 정확탄성곡선에서 미지수인  $\delta_R$ 과  $\delta_P$ 를 가정한다.  $\theta_A, \delta_R$  및  $\delta_P$ 값이 정의되면 경계조건식 식 8(a-b)를 초기치로 하여 식 (7a~c)의 미분방정식을 Runge-Kutta법(Carnahan, *et al.*, 1969)으로  $\lambda=0$ 에서  $\lambda=1$ 까지 수치적분한다. 가정한  $\theta_A, \delta_R, \delta_P$ 값이 비선형 거동의 참값이면 경계조건식 식 (8c)를 만족하여야 한다. Fig. 2에서  $\theta_A$ 값은  $0 < \theta_A \leq \pi$ ,  $\delta_R$ 값은  $0 < \delta_R < 1 - \alpha$ ,  $\delta_P$ 값은  $0 < \delta_P < \alpha$ 에 존재함이 명백하므로 이 범위에서 시행착오방법으로  $\theta_A, \delta_R, \delta_P$ 값을 찾는다. 첫 번째 시행에서는  $0 < \theta_A \leq \pi, 0 < \delta_R < 1 - \alpha, 0 < \delta_P < \alpha$ 의 범위에서  $\theta_A, \delta_R, \delta_P$ 값을 일정 증분씩 증가시키면서 식 (8c)의 좌변값 즉,  $D = |\eta_{\lambda=1}| +$

$|1 - \delta_R - \xi_{\lambda=1}| + |\alpha - \delta_p - \xi_{\lambda=\alpha}|$  를 산출한다. 계산된  $D$  값 중에서 최소  $D$  값을 갖는  $\theta_A, \delta_R, \delta_p$  를 선택한 후에 이 값들을 기준으로  $\theta_A, \delta_R, \delta_p$  의 새로운 범위를 찾고, 이 범위에서  $D$  값들을 다시 산출한다. 다음 시행에서는 더 축소된  $\theta_A, \delta_R, \delta_p$  의 범위가 계산되고 이 과정을 반복하면 수렴한계  $D \leq 1 \times 10^{-15}$  를 만족하는  $\theta_A, \delta_R, \delta_p$  값을 찾을 수 있다. 이와 같이  $\theta_A, \delta_R, \delta_p$  값을 찾으면 Runge-Kutta법에 의하여  $\xi, \eta, a, v, m$  값들이 계산되어 정확탄성곡선과 합응력을 얻을 수 있다.

수치해석 결과의 검증은 위하여 Photo 1과 같이 실험실 규모의 실험을 실시하여,  $\theta_A, y_x=1/2, \Delta_R$  값을 측정하였다.

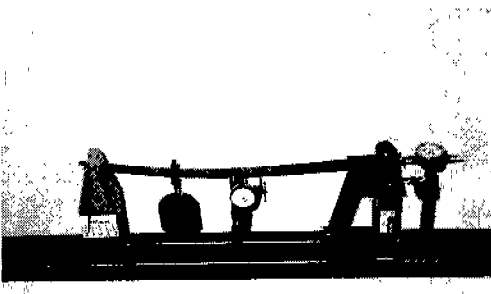


Photo 1. Experimental view measuring non-linear behaviors

Table 1은 본 연구와 실험 값의 결과를 비교한 표이며, 실험 재료의 기계적 성질과 제원을 표 아래에 기록하였다. 이론 값  $\delta_R, \eta_{\xi=0.5}$  은 식 (6d,b)를 이용하여  $\Delta_R, y_{x=0.3m}$  로 환산하였다. 본 연구와 실험에 의한 거동 값은  $\Delta_R$  는 약 3%의 오차를 보이며,  $y_{x=0.3m}, \theta_A$  는 오차가 거의 없었다.  $\Delta_R$  의 오차가  $y_{x=0.3m}$  의 오차에 비하여 상대적으로 큰 것은 적은 변위가 발생하여 정확한 값이 측정되지 못한 결과로 사료된다. 거동 값의 평균 오차는 약 1.1%로 이 연구의 미분방정식과 수치해석방법이 타당함을 알 수 있다.

Table 1. Comparisons of results between this study and experiments

condition	variables	this study(A)	experiments(B)	deviation(%) $ B - A  / A$
n=0.5 <sup>*</sup> p=1.75	$\Delta_R$	2.42mm	2.45mm	1.24
	$y_{x=0.3m}$	24.14mm	24.13mm	0.04
	$\theta_A$	0.133rad	0.133rad	0.00
n=2 <sup>**</sup> p=3.50	$\Delta_R$	2.80mm	2.88mm	2.86
	$y_{x=0.3m}$	25.43mm	25.86mm	1.69
	$\theta_A$	0.159rad	0.160rad	0.63

\*  $e=1, \alpha=0.333, E=206\text{GPa}, I_A = 1.7 \times 10^{-11} \text{ m}^4, P = 17 \text{ N}, l=0.6\text{m}$

\*\*  $e=1, \alpha=0.333, E=206\text{GPa}, I_A = 8.5 \times 10^{-12} \text{ m}^4, P = 17 \text{ N}, l=0.6\text{m}$

### V. 수치해석 결과

보의 단면조건  $n, e$  및 하중조건  $p, \alpha$  값을 변화시키면서 수치해석하여 이 변수들이 비선형 거동에 미치는 영향을 분석하였다. Table 2에서 형상계수  $e$ 가 무차원 변위와 휨 모멘트의 최대값  $m_{\max}$  에 미치는 영향을 분석하였으며, 거동값  $\delta_R, \delta_p, \eta_{\max}, \theta_A$  은  $e=4$ (정방향 변단면), 3(높이 변단면), 1(폭 변단면)의 순서로 크다. 여기서, 아래첨자 max는 비선형 거동의 최대 거동값을 의미한다.  $m_{\max}$  는  $e=1, 3, 4$ 의 순서로 위의 거동값들과 반대의 순서를 보인다. 이 표의  $\eta_{\max}$  비율에서와 같이  $e$ 가 비선형 거동에 미치는 영향은 약 4% 미만이다.

Table 2. Effect of  $e$  on non-linear behaviors

e	$\delta_R$	$\delta_p$	$\theta_A$	$\eta_{\max}$	$m_{\max}$	ratio**
1	0.0420	0.0201	0.0600	0.1305	1.1975	1.000
3	0.0447	0.0214	0.0618	0.1346	1.1941	1.031
4	0.0451	0.0216	0.0620	0.1351	1.1937	1.035

\*  $p=5, n=0.5, \alpha=0.5$

\*\* ratio of  $\eta_{\max}$  with  $e=1,3,4$  to  $\eta_{\max}$  with  $e=1$

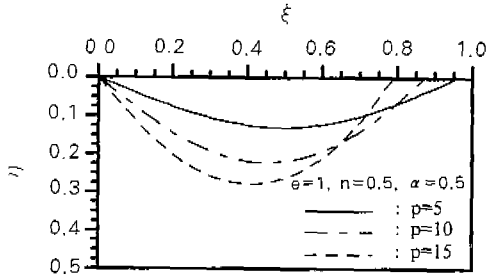


Fig. 4. Examples of elastica

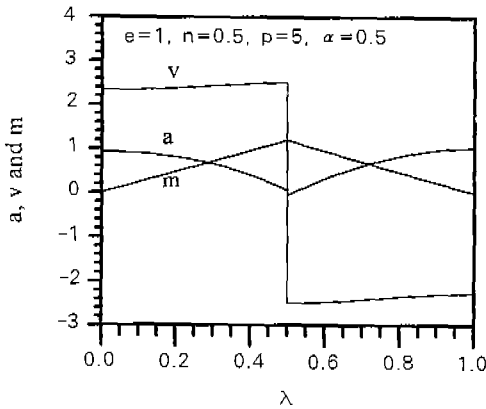


Fig. 5. Stress resultant diagrams

Fig. 4는  $e=1$ ,  $n=0.5$ ,  $\alpha=0.5$ 인 보에  $p=5$ , 10, 15일 때, 정확탄성곡선의 예를 보여준다.  $p$ 가 증가하면  $\theta_A$ ,  $\delta_R$ 도 증가하며,  $p$ 는  $\alpha=0.5$ 인 대칭하중이지만 단면이  $n=0.5$ 로 비대칭이므로 정확탄성곡선은 비대칭이다.

Fig. 5는 Fig. 4에서  $p=5$ 인 경우에  $a$ ,  $v$ ,  $m$ 의 합응력도를 나타낸다. 축방향력  $a$ 는 단부에서, 전단력  $v$ , 휨 모멘트  $m$ 은 보 중앙에서 크게 발생한다.

Fig. 6은  $e=1$ ,  $n=0.5$ ,  $\alpha=0.5$ 인 보에  $p$ 의 크기가 변화할 때, 변위  $\delta_R$ ,  $\delta_P$ ,  $\eta_{max}$ ,  $\theta_A/(2\pi)$ 의 변화를 보여주며, 이들의 관계는 비선형이다.  $\delta_R$ ,  $\delta_P$ 는 작은 하중에서 작은 증가율을, 큰 하중에서 큰 증가율을 보이지만,  $\theta_A/(2\pi)$ ,  $\eta_{max}$ 는 작은 하중에서 큰 증가율을 보인다.

Fig. 7은  $e=1$ ,  $p=5$ ,  $\alpha=0.5$ 의 보에 단면비

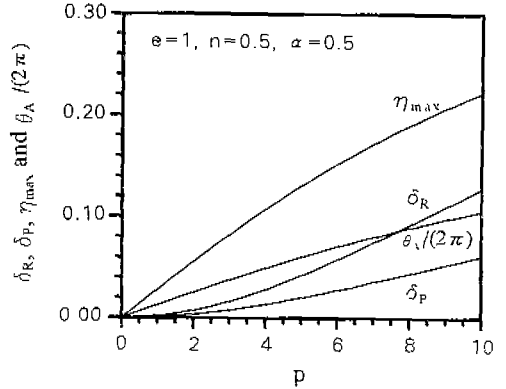


Fig. 6. Displacements versus load curves

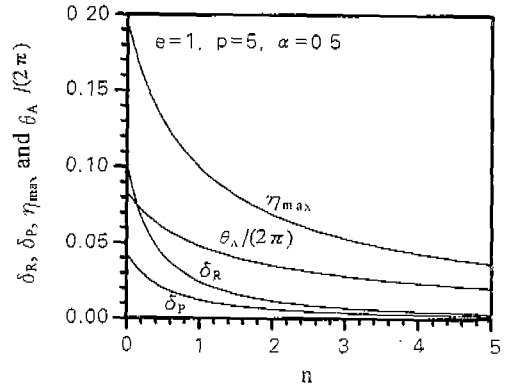


Fig. 7. Displacements versus section ratio curves

$n$ 가 변화할 때, 변위  $\delta_R$ ,  $\delta_P$ ,  $\eta_{max}$ ,  $\theta_A/(2\pi)$ 의 변화를 나타내며  $n$ 값이 증가함에 따라 거동값이 당연히 감소한다. 작은  $n$ 값에 대하여 감소율은 더 크고  $n$ 값이 증가함에 따라 감소율은 감소한다.  $n$ 값이 약 3이상에서  $\delta_R$ ,  $\delta_P$ ,  $\eta_{max}$ ,  $\theta_A/(2\pi)$ 는 수평선에 접근하여 일정한 값에 수렴한다.

Fig. 8은  $e=1$ ,  $n=0.5$ ,  $p=5$ 의 보에 하중위치  $a$ 가 변화할 때,  $a$ 와  $\delta_R$ ,  $\delta_P$ ,  $\eta_{max}$ ,  $\theta_A/(2\pi)$ 사이의 관계를 나타낸 것이다.  $a$ 값이 0.5까지 증가함에 따라 변위들은 증가하고 그 이후에는 감소한다.

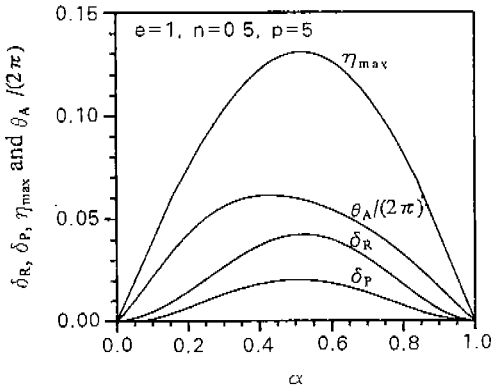


Fig. 8. Displacements versus load position curves

## VI. 결 론

이 논문은 변화위치 집중하중이 작용하는 변단면 단순보의 비선형 거동해석에 관한 연구이다. 보의 최종 평형상태에서 미지 변위  $\delta_R$ ,  $\delta_P$ 를 변수로 휨 모멘트 식을 산정하고, 이 식을 Bernoulli-Euler 보 이론에 적용하여 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 이 미분방정식을 수치적분 기법과 시행착오 방법을 이용하여 수치해석하였다. 본 연구와 실험에 의한 거동값들이 잘 일치하여 본 연구에서 개발한 수치해석 방법이 비선형 거동해석에 타당함을 입증하였다. 일련의 수치해석을 실시하여 정확탄성곡선, 합응력 및 하중, 단면비, 하중위치 변수가 변위와 합응력에 미치는 영향을 분석하였다. 본 연구의 결과들은 대변형이 발생하는 구조물의 비선형 해석 및 설계에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 사료된다.

## 참 고 문 헌

1. 이병구, 1990, "캔틸레버보의 과대처짐 해석," 대한토목학회논문집, 제10권 제1호, pp. 1~7.
2. Carnahan, B., Luther, H. A. and Wilkes, J. O.,

- 1969, Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons.
3. Chucheepsakul, S., Thepphitak, G. and Wang, C. M., 1996, "Large Deflection of Simple Variable-Arc-Length Beam Subjected to a Point Load," Structural Engineering and Mechanics, Vol. 4, pp. 49~59.
4. Gupta, A. K., 1985, "Vibration of Tapered Beams," Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 111, pp. 19~36.
5. Lau, J. H., 1981, "Large Deflection of Cantilever Beam," Journal Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 107, pp. 259~264.
6. Lee, Byoung Koo and Oh, Sang Jin, 2000, "Elastica and Buckling Load of Simple Tapered Columns with Constant Volume," International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, No. 18, pp. 2507~2518.
7. Lee, Byoung Koo, Wilson, J. F. and Oh, Sang Jin, 1993, "Elastica of Cantilevered Beams with Variable Cross-Section," International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 28, pp. 579~589.
8. Rojahan, C., 1968, Large Deflections of Elastic Beams, Thesis for the Degree of Engineer, Stanford University.
9. Wilson, J. F., Lee, Byoung Koo and Oh, Sang Jin, 1994, "Free Vibrations of Circular Arches with Variable Cross-Section," Structural Engineering and Mechanics, Vol. 2, No. 4, pp. 345~357.
10. Wilson, J. F. and Strong, D. J., 1997, "Elastic Buckling of End-Loaded, Tapered Cantilevered Beams with Initial Curvature," Structural Engineering and Mechanics, Vol. 5, No. 3, pp. 257~268.