

다영역 모델의 해석을 위한 공간모멘트법의 적용

Application of the Method of Spatial Moment for Analysing the Multi-Region Model

이 덕 주*
Lee, Duk Joo

Abstract

The moment equations of the concentration distribution for the multi-region model are derived using the method of moment. The method originally devised by Aris is to obtain the concentration moments satisfying a given PDE (Partial Differential Equation). The method of moment is used to obtain the first five moments (0^{th} to 4^{th}) that satisfy the model PDE.

Each moment of the concentration distribution for the model equation is plotted for the dimensionless time and gave similar results except the skewness and the kurtosis. The results of the analysis show the physical meaning of each moment. The comparisons with the number of regions or the global interaction coefficient give a possibility to determine the parameters of the multi-region model with the analytical concepts.

I. 서 론

통계학적인 개념을 이용한 모멘트법은 Aris (1956)⁴⁾에 의해서 제안된 이래로 토양내의 용질 (또는 오염물질)이동모델을 분석하는데 많이 이용되었다. 이 방법은 농도분포에 대한 각 모멘트들의 물리적인 의미를 나타내고 모델의 적용과정에 대한 이해를 높여준다.

모멘트법은 시간모멘트법과 공간모멘트법으로 대별된다. 시간모멘트법은 1차 이류분산이동에 의한 농도 반응을 분석하는데 이용되어 왔으며, (Goltz와 Roberts, 1987⁷⁾; Valocchi, 1985¹³⁾; Wakao와

Kaguei, 1982¹⁴⁾) 용질이동모델의 변수를 결정하는 방법으로도 많이 이용되어 왔다. (Leij와 Dane, 1992¹¹⁾; Han 등, 1985⁹⁾; Güven 등, 1984⁸⁾)

공간모멘트법의 이용은 시간모멘트법보다 상대적으로 적으나 역시 이류분산 방정식의 분석이나 모델의 변수를 결정하는데 사용되었다 (Montas와 Eigel, 1995¹²⁾; Adams와 Gelhar, 1992²⁾; Goltz와 Roberts, 1987⁷⁾). 특히 Montas와 Eigel(1995)¹²⁾은 몇몇 용질이동모델식을 비교하였고, Adams와 Gelhar (1992)²⁾는 모멘트법을 포장실습규모의 실험에 적용하여 용질의 손실을 분석하였다.

안과 이(2000)¹⁾의 토양내의 용질이동에 대한

* 퍼듀대학교 대학원

키워드 : Preferential 흐름, 다영역 모델, 왜곡도, 침예도, 모멘트법, 농도분포, 함수비, 분산계수, 상호계수

Preferential 흐름의 모델식에 대하여, 본 연구는 공간 모멘트법을 이용하여 농도분포에 대한 모멘트들을 구하고, 이 모델이 갖고있는 변수들의 특성을 분석하고자 한다.

II. 모멘트 방정식의 유도 및 적용

1. 모멘트방정식의 유도

농도분포에 대한 p 차 공간모멘트 방정식은 식 (1)과 같이 정의된다.

$$C_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^p C(x) dx \dots\dots\dots(1)$$

모멘트 방정식의 초기 및 경계조건은 식 (2)와 같다.

$$C(x, 0) = M\delta(x) \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} C(\pm\infty, t) = 0; \quad n \geq 0$$

여기서 통계적인 개념으로 모멘트를 설명하면, 0차 모멘트는 농도의 양이고, 1차 모멘트는 농도의 질량중심으로부터의 거리이고, 2차 모멘트는 농도분포의 분산정도이고, 3차 모멘트는 왜곡도(skewness), 그리고 4차 모멘트는 첨예도(kurtosis)와 밀접한 관계가 있다.

위의 식 (1)은 다영역 모델에서 i 번째 영역에 대한 b 차 모멘트방정식으로 표현하면 식 (3)과 같다.

$$C_{ib} = \int_{-\infty}^{\infty} x^b C_i(x) dx \dots\dots\dots(3)$$

따라서 전체영역에 대한 평균 모멘트는 식 (5)의 방식으로 구할 수 있으며 평균모멘트를 가지고 식 (6)~(9)를 통해 표준(normalized) 모멘트를 구할 수 있다. 우선 0차 모멘트는 평균 및 표준모멘트의 값이 같으며 그 자체가 용질의 질량을 나타낸다. 즉,

$$C_0(t) = M \dots\dots\dots(4)$$

1차 평균 모멘트는 식 (5)와 같이 표현되며, 표준 모멘트는 식 (6)과 같다.

$$\overline{C_1}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\theta_i}{\theta} C_{1i}(t) = \overline{v} M t \dots\dots\dots(5)$$

$$\mu_1 = \frac{\overline{C_1}}{C_0} = \frac{\overline{v} M t}{M} = \overline{v} t \dots\dots\dots(6)$$

다음은 $p \geq 2$ 에 대한 표준 모멘트를 구하는 식이며, 이 식들에 평균 모멘트를 대입함으로써 구할 수 있다.

$$\mu_2 = \frac{\overline{C_2}}{C_0} - \mu_1^2 \dots\dots\dots(7)$$

$$\mu_3 = \frac{\overline{C_3}}{C_0} - 3\mu_1\mu_2 - \mu_1^3 \dots\dots\dots(8)$$

$$\mu_4 = \frac{\overline{C_4}}{C_0} - 4\mu_1\mu_3 - 6\mu_1^2\mu_2 - \mu_1^4 \dots\dots\dots(9)$$

이 연구에서는 위의 5 모멘트 방정식을 구하고 분석한다.

2. 모델방정식에의 적용

토양내의 Preferential 흐름에 대한 모델방정식은 식(10)과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} - v_i \frac{\partial C_i}{\partial x} - \sum_{j=1}^n L_{ij} \frac{C_j}{\theta_j} + \sum_{j=1}^n L_{ji} \frac{C_j}{\theta_j} \dots\dots\dots(10)$$

여기에서 C_i 와 C_j 는 각 영역(또는 공극군, pore group)에서의 농도이고, D_i 는 분산계수, v_i 는 토양 공극내 용질의 유속, θ_i 는 함수비, L_{ij} 는 영역간의 상호계수, 그리고 n 은 영역의 수를 나타낸다. 이 모델식에서 결정하여야 할 변수들은 전체상호계수 L , 각 영역의 분산계수 D_i , 그리고 모델영역의 수 n 이다.

위의 식(1)을 모멘트 연산자(operator) 형태로 표시하면 식 (11)과 같고,

$$\frac{\partial C_{ip}}{\partial t} = pv_i C_{ip-1} + p(p-1)D_i C_{ip-2} - \sum_{j=1}^n \frac{L_{ij} C_{ip}}{\theta_j} + \sum_{j=1}^n \frac{L_{ij} C_{jp}}{\theta_j} \dots\dots\dots(11)$$

이 식을 풀기 위해서는 다음의 가정이 필요하다. 즉 각 영역의 함수비율을 포함하는 모델계수의 합은 그 계수의 합이라는 가정이다. 이를 다시 표현하면 식 (12)와 같다.

$$\begin{aligned} \theta &= \sum_{i=1}^n \theta_i & \bar{C} &= \sum_{i=1}^n \frac{\theta_i C_i}{\theta} \\ \bar{D} &= \sum_{i=1}^n \frac{\theta_i D_i}{\theta} & \bar{v} &= \sum_{i=1}^n \frac{\theta_i v_i}{\theta} \dots\dots(12) \\ \chi &= \frac{v_i - \bar{v}}{\bar{v}} & \bar{\chi} &= \sum_{i=1}^n \frac{\theta_i \chi_i}{\theta} = 0 \end{aligned}$$

위의 새로이 정의된 식들을 가지고 식 (11)을 정리하면 아래와 같다.

$$\frac{\partial C_{ip}}{\partial t} = \frac{L}{\theta} \frac{\theta_i - \theta}{\theta} C_{ip} + \sum_{j=1}^n \frac{L}{\theta^2} \theta_j C_{jp} + pv_i C_{ip-1} + p(p-1)D_i C_{ip-2} \dots\dots\dots(13)$$

이를 행렬식 형태로 나타내면 식 (14)와 같다.

$$C_p' = \frac{L}{\theta} A C_p + V C_{p-1} + D C_{p-2} \dots\dots\dots(14)$$

여기서 **A**는 상수행렬, **V**는 유속행렬, **D**는 분산행렬이고, C_p, C_{p-1}, C_{p-2} 는 농도모멘트의 연산자 벡터이다. 행렬 **A**의 특수한 형태로 인해 행렬 **A**의 고유값(eigen value)들은 $i=1 \dots n-1$ 일 때 $\lambda = -1$ 이고 $\lambda_n = 0$ 이다.

여기서 $C_p = RY_p$ 와 $C_p' = RY_p'$ 라고 하면 식 (14)로부터 Y_p' 에 대하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Y_p' = \frac{L}{\theta} A Y_p + R^{-1} V C_{p-1} + R^{-1} D C_{p-2} \dots(15)$$

위의 식을 각 영역에 대한 개개의 방정식으로 풀기 위해 정리(theorem)를 이용하면 아래와 같이 쓸 수 있다. (Boyce와 DiPrima, 1996)⁵⁾

$$y_{ip} = e^{\frac{L}{\theta} \lambda_i t} \int_0^t e^{-\frac{L}{\theta} \lambda_i \tau} \left\{ \sum_{j=1}^n r_{ij}^{-1} p v_j C_{jp-1} + \sum_{j=1}^n r_{ij}^{-1} p(p-1) D_j C_{jp-2} \right\} d\tau + W_i e^{\frac{L}{\theta} \lambda_i t} \dots\dots\dots(16)$$

이 식을 이용하여 C_{kp} 를 구하면 다음과 같고,

$$\begin{aligned} C_{kp} &= \sum_{i=1}^n r_{ki} y_{ip} \\ &= \sum_{i=1}^n r_{ki} \left\{ \sum_{j=1}^n r_{ij}^{-1} p v_j e^{\frac{L}{\theta} \lambda_j t} \int_0^t e^{-\frac{L}{\theta} \lambda_j \tau} C_{jp-1} d\tau + \sum_{j=1}^n r_{ij}^{-1} p(p-1) D_j e^{\frac{L}{\theta} \lambda_j t} \int_0^t e^{-\frac{L}{\theta} \lambda_j \tau} C_{jp-2} d\tau + W_i e^{\frac{L}{\theta} \lambda_i t} \right\} \dots(17) \end{aligned}$$

여기서 지수 k 는 k 번째 영역을 나타낸다. 위의 식은 상수 행렬 **A**의 고유값과 고유벡터가 특수한 형태로 이루어져서 보다 세심한 계산이 요구된다. 전 영역에 대한 농도분포의 모멘트 방정식은 최종적으로 식 (18)과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} C_{kp} &= \sum_{i=1}^n \frac{\theta_i}{\theta} \left\{ p v_i \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{L}{\theta}(t-\tau)} \right) C_{ip-1} d\tau + p(p-1) D_i \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{L}{\theta}(t-\tau)} \right) C_{ip-2} d\tau \right\} \\ &+ p v_k \int_0^t e^{-\frac{L}{\theta}(t-\tau)} C_{kp-1} d\tau + p(p-1) D_k \int_0^t e^{-\frac{L}{\theta}(t-\tau)} C_{kp-2} d\tau \\ &+ (\bar{W} - W_k) e^{-\frac{L}{\theta} t} + W_n \frac{\theta_n}{\theta} (1 - e^{-\frac{L}{\theta} t}) \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

위 식은 다영역 모델 방정식에 대한 농도 모멘트의 일반식이라 할 수 있다. 식 (18)과 초기조건을 토대로 각 모멘트 방정식을 구할 수 있으며, 이 방정식들과 식 (5)를 통해서 평균 모멘트를 구할 수 있다. 또한 통계적 개념을 도입하여 평균 모멘트를 가지고 표준 모멘트식을 구할 수 있다. (Kendall과 Stuart, 1977)¹⁰⁾

이 연구에서는 0차에서 4차 모멘트에 이르기까지 5개의 모멘트를 유도하였으며, 이 모멘트들은 단일 방향의 유속단면하에서 이류분산이동에 의한 용질농도의 단면을 설명하는데 중요한 역할을 하여왔다. (Andersson과 Berglin, 1981)³⁾ 다영역 모델에 대한 2차에서 4차까지의 표준 모멘트 식은 아래와 같다.

$$\mu_2 = 2\left(\overline{D} + \overline{v^2} \frac{\overline{x^2} \theta}{L}\right)t - 2 \overline{v^2} \frac{\overline{x^2} \theta^2}{L^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta}}\right) \dots\dots\dots(19)$$

$$\mu_3 = 12 \overline{v} \overline{Dx} \frac{\theta}{L} t + 6 \overline{v^3} \frac{\overline{x^3} \theta^2}{L^2} t \left(1 + e^{-\frac{t}{\theta}}\right) - 12 \overline{v} \frac{\theta^2}{L^2} \left(\overline{Dx} + \overline{v^2} \frac{\overline{x^3} \theta}{L}\right) \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta}}\right) \dots\dots\dots(20)$$

$$\mu_4 = 12\left(\overline{D} + \overline{v^2} \frac{\overline{x^2} \theta}{L}\right)^2 t^2 + 12 \overline{v^4} \frac{\theta^2}{L^2} (\overline{x^4} - \overline{x^2}^2) t^2 e^{-\frac{t}{\theta}} - 24 \overline{v^2} \frac{\theta^2}{L^2} \left[2 \overline{x^2} \overline{D} - 3 \overline{Dx^2} + \overline{v^2} \frac{\theta}{L} (3 \overline{x^2}^2 - 2 \overline{x^4})\right] t \left(1 + e^{-\frac{t}{\theta}}\right) + 24 \frac{\theta}{L} (\overline{D^2} - \overline{D}^2) t - 24 \overline{v^2} \frac{\theta^2}{L^2} \left[2 \overline{x^2} \overline{D} + \overline{v^2} \frac{\theta}{L} \overline{x^4}\right] t - 24 \frac{\theta^2}{L^2} \left[\overline{D^2} - \overline{D}^2 - \overline{v^2} \frac{\theta}{L} \left\{\overline{v^2} \frac{\theta}{L} (6 \overline{x^2}^2 - 3 \overline{x^4}) + 6 \overline{x^2} \overline{D} - 6 \overline{Dx^2}\right\}\right] \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta}}\right) \dots\dots\dots(21)$$

여기서 왜곡도와 첨예도는 표준 모멘트로 다음과 같이 표현된다.

$$skewness = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \dots\dots\dots(22)$$

$$kurtosis = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \dots\dots\dots(23)$$

III. 결과 및 고찰

1. 모델적용의 입력자료

모멘트 방정식을 위한 변수는 Table 1과 같으며 다영역 모델을 위한 기본 입력자료는 Elrick 과 French(1966)⁶⁾의 실험결과로부터 얻었으며 이는 Table 2와 같다.

Table 1. Parameters for the Calculation of the Method of Moment

Number of regions, n	Dispersivity, λ (cm)	Global interaction coefficient, L (h ⁻¹)
2, 3, 4, 10, 15	0.2, 2.0, 5.0, 10.0	0.15, 1.5, 5.0, 20.0

Table 2. Parameters for the Calculation of the Model Equation

Saturated hydraulic conductivity, K _{sat} (cm/h)	Saturated moisture content, θ _{sat}	Residual moisture content, θ _{res}	Input parameter, η	Hydraulic gradient, β
0.606	0.5504	0.26	7.9	1.3805

본 연구에서는 모멘트 방정식의 분석을 위하여 무차원 시간을 이용하였다. 각 모멘트는 무차원 시간을 어떻게 정의하느냐에 따라 모멘트를 나타낸 형상이 다소 달라질 수 있으나, 모멘트와 변수간의 물리적인 의미는 변하지 않으며, 따라서 분석에 사용한 무차원 시간은 식 (24)와 같이 정의하였다.

$$\tau = \frac{tL}{x^2} \dots\dots\dots(24)$$

여기서, t는 시간(h), L은 전체상호계수(h⁻¹), x는 유속편차이다.

2. 모델적용의 결과 및 고찰

0차 모멘트는 식 (4)와 같이 용질의 질량이며, 1차 표준 모멘트는 식 (6)과 같이 토양내의 유속과 시간의 곱의 형태로 단순하기 때문에 분석에서 제외하였다.

가. 2차 모멘트(농도분포의 분산)

농도분포의 2차 모멘트를 무차원 시간이 대하여 나타낸 결과는 Fig. 1과 2와 같다. Fig. 1은 분산도(λ)가 2.0이고 전체 상호계수(L)가 5.0일 때, 영역의 수의 변화에 대한 결과이다. Fig. 2는 4개

의 영역을 갖는 다영역 모델에서 분산도가 2.0일 때, 전체 상호계수의 변화에 대한 결과이다.

Fig. 1은 2차 모멘트와 무차원 시간이 직선관계를 보여주고 있으며, 이는 식 (14)의 둘째 항이 첫째 항보다 상대적으로 작아지기 때문이다. 또한 2차 모멘트는 영역의 수가 증가할수록 값이 커지나 그 증가율은 감소함을 볼 수 있다. Fig. 2는 전체 상호계수가 커질수록 2차 모멘트의 증가율이 감소함을 보여준다.

나. 3차 모멘트(μ_3)

농도분포에 대한 3차 모멘트의 결과는 Fig. 3과

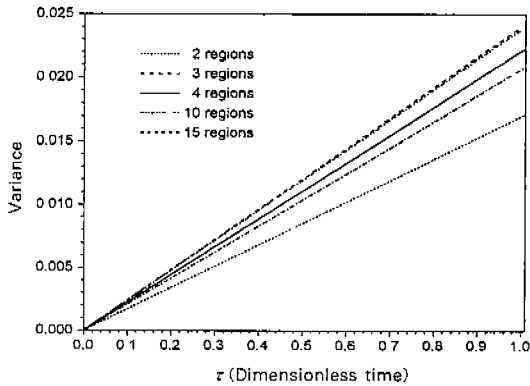


Fig. 1. Variance of the solute concentration predicted by the multi-region model with $\lambda = 2.0$ and the global interaction coefficient, $L = 5.0$

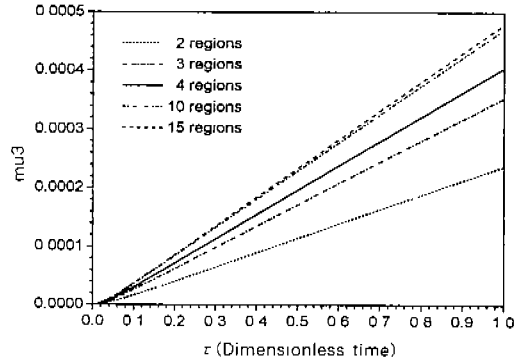


Fig. 3. Third central moment of the solute concentration predicted by the multi-region model with $\lambda = 2.0$ and the global interaction coefficient, $L = 5.0$

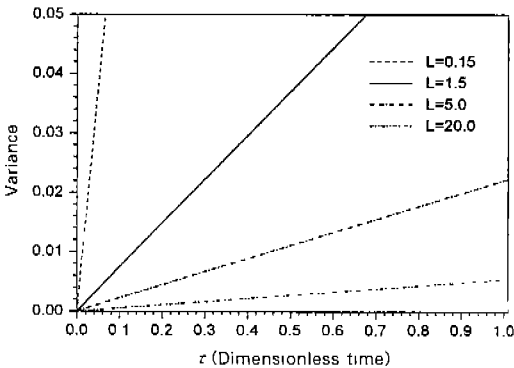


Fig. 2. Variance of the solute concentration predicted by the multi-region model of 4 regions with $\lambda = 2.0$

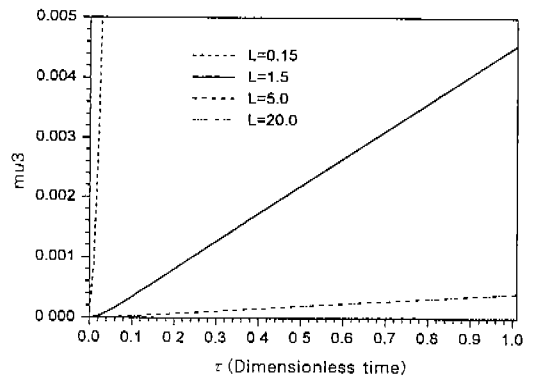


Fig. 4. Third central moment of the solute concentration predicted by the multi-region model of 4 regions with $\lambda = 2.0$

4에 나타난 바와 같으며, 기본 조건은 2차 모멘트와 같다. 3차 모멘트는 2차 모멘트와 비슷한 양상을 가지나 초기시간 ($\tau < 0.6$)일 때 모멘트 값의 변화가 완만하다. 이는 식 (15)의 둘째 항의 지수함수 값이 초기시간에 적용되다 소멸되었기 때문이다.

다. 왜곡도(Skewness)

Fig. 5와 6은 용질의 농도분포에 대한 왜곡도를 나타낸 것으로 3차 모멘트와 밀접한 관계를 가지고 있다. 왜곡도의 값은 초기시간에 증가하다가 $0.05 < \tau < 0.07$ 을 정점으로 감소하는 형태를 보였으며 이는 3차 모멘트의 초기값의 변화에 따른 것이다.

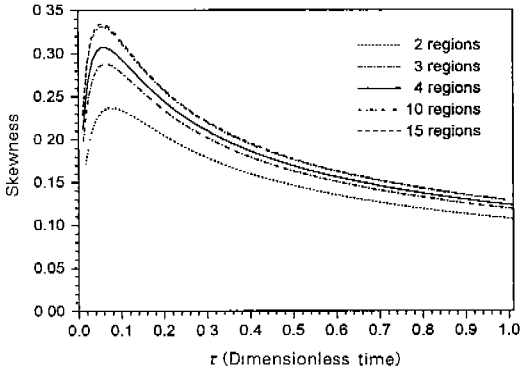


Fig. 5. Skewness of the solute concentration predicted by the multi-region model with $\lambda = 2.0$ and the global interaction coefficient, $L = 5.0$

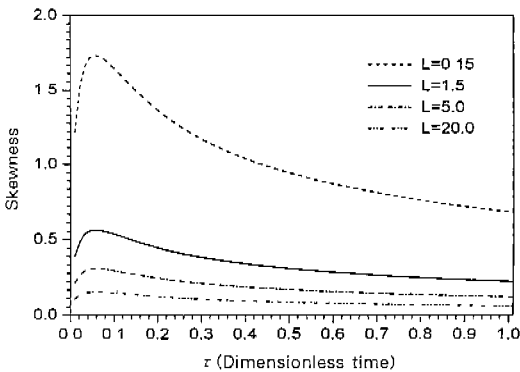


Fig. 6. Skewness of the solute concentration predicted by the multi-region model of 4 regions with $\lambda = 2.0$

2차나 3차 모멘트와 같이 왜곡도도 2영역일 때의 값이 3영역이상일 때와는 다소 동떨어져 있음을 볼 수 있다. 이와 같은 현상은 4차 모멘트에서도 나타나는데, 이는 각 영역을 구분하는데 있어서 함수비와 수리전도도의 관계를 이용할 때 2영역 모델은 두 영역간의 변수값의 차이가 크게 기인한다. 즉 2영역 모델은 preferential 흐름을 표현하기에는 변수간의 차이가 크므로 적절치 못하다.

라. 4차 모멘트(μ_4)

4차 모멘트는 시간에 대하여 2차식 형태로 증가

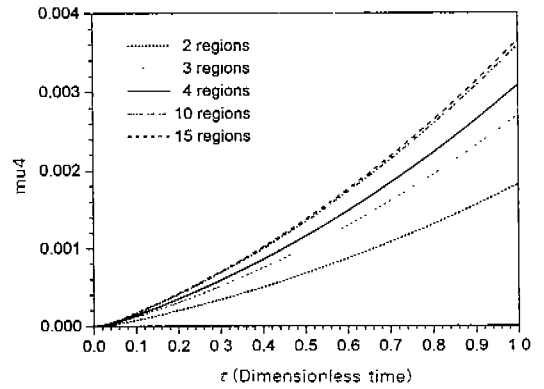


Fig. 7. Fourth central moment of the solute concentration predicted by the multi-region model with $\lambda = 2.0$ and the global interaction coefficient, $L = 5.0$

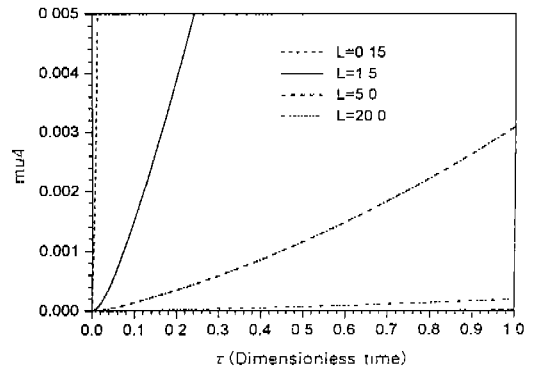


Fig. 8. Fourth central moment of the solute concentration predicted by the multi-region model of 4 regions with $\lambda = 2.0$

하였으며 이는 식 (21)의 첫째와 둘째 항의 영향이 다른 항보다 큼을 알 수 있다. 4차 모멘트의 기본적인 추이는 2차 모멘트와 3차 모멘트의 변화와 큰 차이를 보이지 않았다.

마. 첨예도(Kurtosis)

농도분포에 대한 첨예도의 결과는 Fig. 9와 10에 나타나 있다. 첨예도는 초기시간에 급감하다 점차 완만한 형태로 감소함을 보였으나 첨예도의 값은 영역의 수의 변화와 전체 상호계수의 변화에 대하여 큰 차이를 나타내지 않았다. 다만 초기시간 ($\tau < 0.2$)에 각 영역의 수에 대한 첨예도의 변화가 다소 있으며, 주목할 사항은 영역의 수가 많을수록 첨예도가 크다는 점이다. 따라서 영역의 수가 많으면 보다 더 정확한 값을 초기시간에 예측할 수 있다. 이는 기존의 이류분산이동모델이 초기의 용질이동을 정확히 예측하지 못하는 단점을 preferential 흐름에 대한 모델로 해결하려는 노력에 부합된다고 할 수 있다.(안과 이, 2000)¹⁾

2차에서 4차에 이르는 모멘트와 왜곡도 및 첨예도를 분석할 때 나타난 공통점은 영역의 수가 늘어날수록 각 모멘트들의 값은 증가하였으며, 10영역 모델에 가까워질수록 각 모델에 의해 계산된 값의 차이가 작고 특히 10영역과 15영역 모델은 거의 차이를 보이지 않았다. 이는 영역의 수를 10영

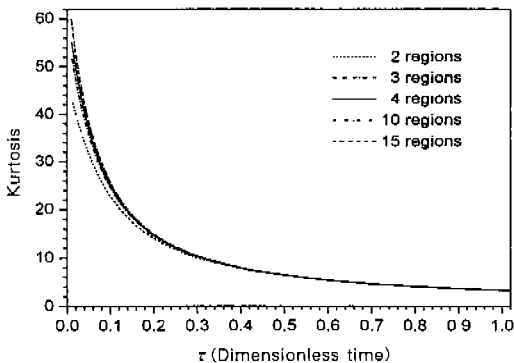


Fig. 9. Kurtosis of the solute concentration predicted by the multi-region model with $\lambda = 2.0$ and the global interaction coefficient, $l = 5.0$

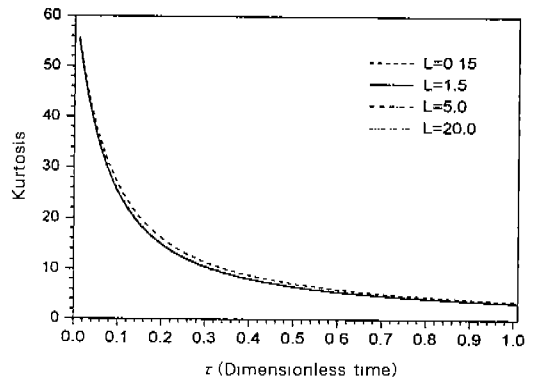


Fig. 10. Kurtosis of the solute concentration predicted by the multi-region model of 4 regions with $\lambda = 2.0$

역이상으로 계산하여도 다영역 모델식에 의한 결과는 거의 같음을 보여준다. 따라서 영역의 수를 3영역에서 10영역 사이에서 결정함이 적정하나 보다 더 정확한 영역수의 결정을 위한 최적화 기법이 요구된다.

IV. 결 론

본 연구는 preferential 흐름의 해석을 위한 다영역 모델에 대하여 통계적 개념을 포함한 공간 모멘트법을 이용하여 분석하였다. 0차에서 4차에 이르는 5개의 모멘트방정식을 구하고 그 결과를 분석하였으며 요약하면 다음과 같다.

1. 2차, 3차 및 4차 모멘트는 시간이 지남에 따라 각 모멘트의 값이 증가하였고, 영역의 수가 증가함에 따라 모멘트의 값이 증가하였다.
2. 2차, 3차 및 4차 모멘트의 값은 전체 상호계수의 값이 커짐에 따라 그 증가율이 감소하였다.
3. 왜곡도는 초기시간에 증가하다가 $\tau = 0.06$ 을 정점으로 감소하였으며, 영역의 수의 증가에 대하여 왜곡도의 크기도 증가하였고 전체상호계수가 커짐에 따라 그 증가율이 감소하였다.
4. 첨예도는 $\tau < 0.2$ 에 영역의 수에 대하여 다소 변화가 있었으나 그 이후는 거의 같은 값을 나타냈으며, 전체 상호계수의 변화에 대하여도 첨예도

의 변화는 거의 없었다.

5. 다영역 모델의 영역의 수는 3영역 이상 10영역 이내에서 결정하면 되나, 최적 영역수의 결정을 위한 연구가 앞으로 요구된다.

참 고 문 헌

1. 안병기, 이덕주, 2000. Preferential 흐름에 대한 토양내의 다영역 용질이동 모델. 한국농공학회지, 42(2), pp. 71~77.
2. Adams, E. E. and L. W. Gelhar, 1992. Field Study of Dispersion in a Heterogeneous Aquifer: 2. Spatial Moments Analysis. Water Resour. Res., 28(12), pp. 3293~3307.
3. Andersson, J. L. and T. Berglin, 1981. Dispersion in Laminar Flow Through a Circular Tube. Proc. Roy. Soc. London A., 377, pp. 251~268.
4. Aris, R., 1956. On the Dispersion of a Solute in a Fluid Flowing through a Tube. Proc. Roy. Soc. London A., 235, pp. 67~77.
5. Boyce, W. E. and R. C. DiPrima, 1986. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 4th ed. John Wiley & Sons, New York.
6. Elrick, D. E. and L. K. French, 1966. Miscible Displacement Patterns on Disturbed and Undisturbed Soil Cores. Soil Sci. Soc. A. Proc., 30(2), pp. 153~156.
7. Goltz, M. N., and P. V. Roberts, 1987. Using the Method of Moments to Analyze Three-Dimensional Diffusion-Limited Solute Transport from Temporal and Spatial Perspectives. Water Resour. Res., 23(8), pp. 1575~1585.
8. Güven, O., F. J. Molz and J. G. Melville, 1984. An Analysis of Dispersion in a Stratified Aquifer. Water Resour. Res., 20(10), pp. 1337~1354.
9. Han, N.-W., J. Bhakta and R. G. Carbonell, 1985. Longitudinal and Lateral Dispersion in Packed Beds: Effect of Column Length and Particle Size Distribution. AIChE J., 31(2), pp. 277~288.
10. Kendall, M. and A. Stuart, 1977. The Advanced Theory of Statistics, Volume 1, 4th ed., MacMillan Pub. Co. Inc., New York.
11. Leij, F. J. and J. H. Dane, 1992. Moment Method Applied to Solute Transport with Binary and Ternary Exchange. Soil Sci. Soc. Am. J., 56, pp. 667~674.
12. Montas, H. J. and J. D. Eigel, 1995. A Deterministic Model of Solute Transport in Soils with Preferential Flow Pathways. Paper No. 95-2428, Presented at the 1995 ASAE Annual International Meeting, Chicago, IL, June 18-23. ASAE, St.-Joseph, MI, 49085.
13. Valocchi, A. J., 1985. Validity of the Local Equilibrium Assumption for Modeling Sorbing Solute Transport Through Homogeneous Soils. Water Resour. Res., 21(6), pp. 808~820.
14. Wakao, N. S. and S. Kaguei, 1982. Heat and Mass Transfer in Packed Beds. Gordon and Breach, New York.