

## 단일연결 제약하의 설비입지를 고려한 망설계 문제의 쌍대기반 해법

윤 문 길\*

A dual based heuristic for the hub location and network design problem with single assignment constraint

Moon-Gil YOON\*

### ■ Abstract ■

In this paper, we address a network design problem including the decision of hub facility locations which is typically found in a communication and a transportation network design studies. Due to the administrative and the geographical restrictions, it is common to assume that each user should be assigned to only one hub facility. To construct such a network, three types of network costs should be considered: the fixed costs of establishing the hubs and the arcs in the network, and the variable costs associated with transversing the network. The complex problem is formulated as a mixed IP model embedding a multicommodity flow problem. Exploiting its special structure, a dual-based heuristic is then developed, which yields near-optimal design plans. The test results indicate that the heuristic is an effective way to solve this computationally complex problem.

### 1. 서 론

정보기술과 통신기술의 발전으로 정보통신망이 비약적으로 발전되고 있으며, 각종 규제완화 조치

로 수송망에서도 커다란 변화가 이루어져 왔다. 대부분의 통신망과 수송망은 비용절감과 운영의 효율화를 위하여 중계노드(Hub)를 고려하는 계층구조를 갖는 망으로 표현될 수 있다. 이 같은 형태의

\* 한국항공대학교 경영학과

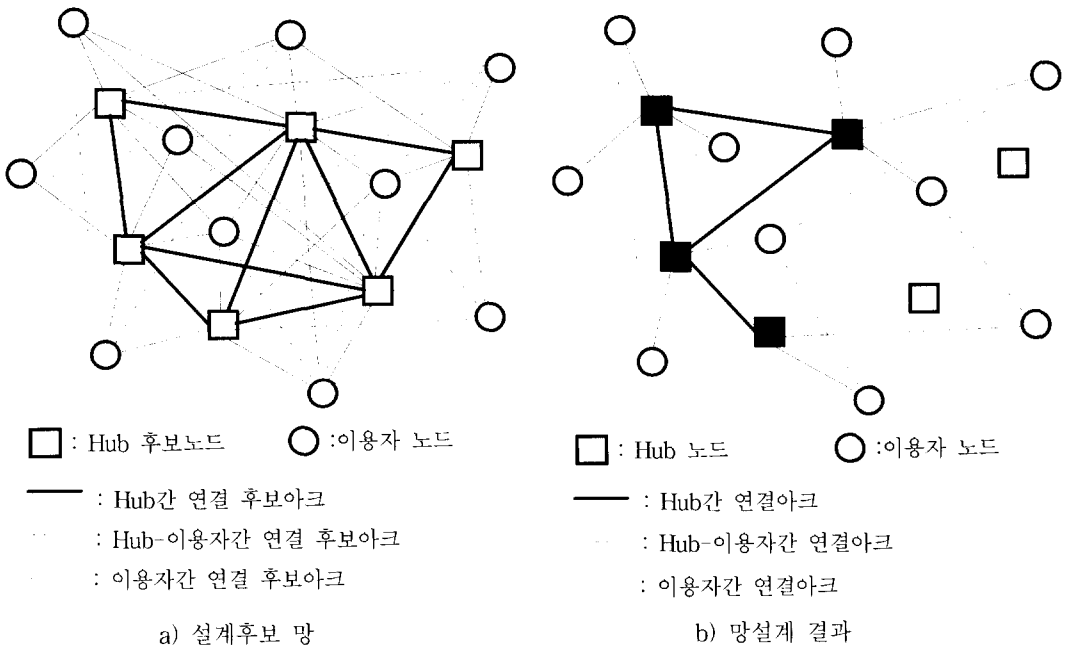
망구성은 광전송망, 가입자망 등의 통신망과 물류 배송망, 항공망 등의 수송망에서 쉽게 볼 수 있다. 이 경우에 최소의 비용을 가져오는 망을 설계하기 위해서 중계노드의 적정 위치선정과 이용자와 중계노드를 포함하는 최적의 망설계가 이루어져야 한다.

이 같은 망설계를 위해서는 크게 3가지 비용요소가 고려되어야 한다: Hub 설치를 위한 고정비용, 아크 설치를 위한 고정비용, 아크를 이용하는 수요량에 대한 변동비용. 이 같은 비용요소에 대하여 Hub 노드의 최적 위치, Hub노드와 이용자 노드간을 연결하는 망설계, 이용자 노드간의 수요를 처리하기 위한 경로설정이 비용최적화 되도록 결정되어야 한다. 그러나, 이들 세 가지 비용요소간의 상충(Trade-off)효과 때문에, Hub 노드의 위치선정과 망설계문제가 하나의 모형하에서 다루는 것이 매우 어렵기 때문에, 여러 개의 부문제로 분할되어 해결하는 접근방법이 연구되어져 왔다. 이 같은 접근 방법은 많은 계산상의 노력에도 불구하고 얻어

진 실행가능해를 평가할 수 있는 방법을 제공하고 있지 못하다. 따라서, 이 같은 문제점을 해결할 수 있는 방법의 하나로 입지선정 문제를 포함하는 망설계 문제를 하나의 설계모형에서 동시에 해결하기 위한 통합된 접근방법의 연구가 최근에 시도되고 있다[25, 28, 41, 43, 44]. 본 연구에서는 통신망 및 수송망 설계시에 발생하는 문제 중에서 단일 연결계약하의 설비입지선정과 망설계 문제를 동시에 해결하기 위한 것으로, Hub 노드와 아크상의 용량제약을 고려하지 않는 문제를 다룬다. [그림 1]과 <표 1>은 본 연구에서 다루는 문제를 나타내고 있다.

<표 1> Hub 위치결정 및 망설계 통합문제

구 분	주 요 내 용
주어진 조건	하부망 구조, Hub 설치 후보의 위치, 이용자 노드의 위치, 이용자 노드간의 수요
망 구조	단일 Hub에의 연결을 고려하는 mesh-star 구조, 이용자 노드간의 직접연결 허용
비용 요소	Hub 설치비용, 아크이용에 따른 비용
의사결정변수	Hub 노드의 위치, 이용될 아크결정, 수요의 전달을 위한 경로 결정.



[그림 1] 단일연결 제약하의 설비입지를 고려한 망설계 문제

Hub의 설치비용은 고정비용으로 고려될 수 있고, 아크의 이용비용은 두 가지로 구분하여 고려되어야 한다. 즉, 아크의 이용에 따른 고정 비용과 아크를 이용하는 수요량에 대한 변동비용으로 구분하여 고려한다. 본 연구에서 다루는 문제는 다음과 같은 통신망의 설계문제와 수송망의 설계문제에 효과적으로 적용될 수 있다.

광통신망의 경우, 각 교환국간의 연결을 위하여 대량의 전송용량을 가지고 있는 광케이블을 설치하고, 효과적인 운영을 위하여 동기식디지털계층(Synchronous Digital Hierarchy)를 전송표준으로 채택하고 있다. 광통신망의 설계시에는 각 교환국에서 다른 교환국으로 연결되는 모든 전송수요를 합하여 일차적으로 광전송 중계노드(ADM, DCS, OADM등)에 보내고, 광전송 중계노드에서는 목적지가 같은 전송수요를 구분하여 다른 광전송 중계노드로 보내거나, 목적지 교환국으로 보낼 수 있다. 이 경우에는 설치되는 광케이블 수 및 광관로 수가 감소하게 되어 망구성 비용을 절감할 수 있다. 그러나, 광전송 중계노드의 설치를 위한 비용이 추가로 발생하므로, 망구성 비용의 감소분과 광전송 중계노드 설치비용의 관계를 고려하여 경제적인 방법을 결정하게 된다. 이 경우에는 각 교환시설이 이용자노드로, 광전송 중계노드는 Hub노드로 고려될 수 있다. 교환국간의 통화수요를 광전송수요로 환산하는 과정은 Yoon등[43]의 연구를 참조할 수 있다.

수송망의 경우에는 계층적 구조를 갖는 물류수송망의 설계문제를 고려할 수 있다. 즉, 각 지역별 수화물 집하장을 이용자 노드로 고려하고, 대규모 수화물 중계센터를 Hub 노드로 고려할 수 있다. 각 지역별 집하장에 수집된 화물은 목적지에 관계없이 모두 수화물 중계센터에 보내진다. 수화물 중계센터에서는 도착된 화물을 대상으로 목적지별로 재분류 및 포장하여 최종 목적지 또는 다음 중계지까지 보내게 된다. 이 경우에 수송물량의 집적화에 따른 비용절감이 가능하지만, 중계센터의 설치 및 이용에 대한 추가비용을 고려하여 경제적인 방법

을 결정하게 된다.

항공운송망의 경우에는 Hub-spoke 망구조에 대한 설계문제가 고려될 수 있다[24, 37]. 즉, 전체 운송지역을 몇 개의 지역으로 구분하고, 각 지역별 거점공항(Hub Airport)을 정하여 거점공항간은 대형항공기를, 거점공항과 지역 중소공항과는 중소형항공기를 투입하여 수송하는 체계이다. 따라서, 모든 공항간의 수송수요를 거점공항을 경유하여 수송하는 방식으로, 각 지방의 공항을 이용자 노드로, 거점공항을 Hub 노드로 고려할 수 있다. 이 경우에, 특정 공항을 거점공항으로 사용하는 경우의 투자비 및 환승비용, 거점공항간, 또는 거점공항과 지방공항간의 수송에 따른 비용을 고려하여 최소비용의 항공망을 결정하게 된다.

이 같은 문제는 NP-hard의 계산복잡도를 갖는 전통적인 설비입지선정 문제와 망설계 문제가 결합된 형태로서 매우 복잡한 문제로 간주되어 왔다. 따라서, 과거에는 각각의 문제를 부문제로 하여 반복적인 방법을 통하여 해결을 시도하는 반복적 접근법을 적용하였으나, 최근의 연구에서는 하나의 모형에서 통합하여 해결하려는 통합접근법이 시도되고 있다. 망설계 문제와 설비입지 문제를 동시에 고려한 연구들은 주로 통신망의 전송망 설계시에 Tree-star[25, 29, 36], Ring-star[28], Mesh-star[43], Full Mesh-star[14] 등 여러 가지 망구조 형태에 따라 다양하게 연구되어져 왔다. 수송망의 경우에는 물류망 설계를 위한 “설비입지 및 경로선정문제(Location and Routing Problem)”[4, 16, 23, 40], 항공망 설계를 위한 “Hub-Spoke Network Design Problem”[4, 24, 37] 등으로 연구가 진행되어 왔다. 이에 대한 기존 연구들의 특성과 고려된 비용요소 및 의사결정변수, 적용해법 등은 <표 2>에 정리되어 있다.

본 연구와 유사한 연구로 Yoon등[43]과 Yoon & Current[44]의 연구를 들 수 있다. 이들 연구에서는 세 가지 주요 비용요소를 고려하여 하나의 설계모형에서 문제를 해결하는 접근방법을 사용하였다. 그러나 Yoon등[43]의 연구에서는 대상지역을 미리

〈표 2〉 Hub Location and Network Design 연구의 모형 및 해법

Researchers	Problems	Network Topology	Costs	Decisions	Algorithms Employed
Y.H. Lee et.al.[29]	Designing of digital data network	Tree-star	Fixed Cost on Hub Fixed Cost on Arc	Hub Location Arc Selection User Assignment	Lagrangean Relaxation
D.W. Tcha and M.G. Yoon[41]	Conduit and cable installation problem	Logically star-star/ Physically no restrictions	Fixed Cost on Hub Fixed Cost on Arc Variable cost on Arc	Hub Location Arc Selection User Assignment Path Selection	Dual Ascent Method (Centralized Network)
M.G. Yoon et.al. [43]	Distributed fiber transport network design	No restrictions (Single Hubbing)	Fixed Cost on Hub Fixed Cost on Arc Variable cost on Arc	Hub Location Arc Selection User Assignment Path Selection	Dual Ascent Method (Distributed Network)
P.Jaillet et.al.[24]	Hub and spoke airline network design	Hub and Spoke	Variable Cost on Arc	Hub Location Arc Selection	Heuristic using Valid Inequalities
J.G. Kim and D.W. Tcha[25]	Backbone network design with tree-star configuration	Tree-star	Fixed Cost on Hub Fixed Cost on Arc	Hub Location Arc Selection User Assignment	Dual Ascent Method
S.H. Chung et.al. [14]	Hierarchical network with full meshed structure	Full mesh-star	Fixed Cost on Hub Fixed Cost on Arc	Hub Location Arc Selection User Assignment	Branch and Bound using Dual Ascent Method
J.F. Cambell[12,13]	p-hub median problem	Hub and Spoke	Fixed Cost on Hub Variable Cost on Arc	Hub Location Arc Selection	Lagrangeran Relaxation
H. Pirkul and V. Nagarajan[36]	Centralized communication network design with tree-star topology	Tree-star	Fixed Cost on Hub Fixed Cost on Arc	Hub Location Arc Selection	Lagrangeran Relaxation
C.H. Lee et.al.[28]	Hierarchical network with ring star topology	Ring-star	Fixed Cost on Hub Fixed Cost on Arc Variable cost on Arc	Hub Location Arc Selection User Assignment Path Selection	Branch and Bound using Dual Ascent Method
M.G. Yoon, J.R. Current[44]	Hub location and network design	Mesh-star (multiple hubbing)	Fixed Cost on Hub Fixed Cost on Arc Variable cost on Arc	Hub Location Arc Selection User Assignment Path Selection	Dual Ascent Method
H. Pirkul, and D.A. Shilling[37]	Hub and spoke airline network design	Hub and Spoke	Variable cost on Arc	Hub Location Arc Selection	Lagrangeran Relaxation

일정한 범위의 지역으로 분할하고, 분할된 각 지역에 반드시 하나의 Hub 노드를 설치하는 것을 가정하였다. 반면에, Yoon & Current[44]의 연구에서는 이 같은 지역분할의 가정을 적용하지 않았고, 관로망 또는 도로망 등의 물리적인 망이 이미 주어진 상태에서, Hub 노드설치 및 이용자간 수요전달

을 위한 경로선정을 결정하는 문제를 다루었다. 특히, 각 이용자들이 비용절감을 위해서 두 개 이상의 Hub 시설에 연결될 수 있고, 이용자들의 직접 연결을 통한 수요처리도 허용하고 있다. 본 연구는 Yoon & Current[44] 연구의 확장으로, 운영관리 및 지리적 제약 측면에서 모든 이용자가 반드시 하

나의 Hub 시설에만 연결(Single Hubbing)되도록 하는 제약을 추가한 것이다. 이 같은 경우는 통신망 또는 항공운송망 등에서 쉽게 찾아볼 수 있으며, 추가된 제약조건으로 인해서 기존의 해법과는 다른 새로운 해법이 개발되어야 한다.

2장에서는 본 연구에서 다루는 설계문제가 0-1 혼합정수계획모형으로 정식화되는 과정을 설명하였고, 3장에서는 정수제약식의 선형완화를 통한 쌍대기반 해법을 설명하였다. 본 연구에서 고려하는 쌍대기반 해법은 Balakrishnan<sup>등</sup>[5]이 용량제약이 없는 망설계 문제에서 적용한 Dual Ascent 방법을 본 모형에 적합하도록 수정하여 적용하였다. 또한, 쌍대변수 값을 이용하여 실행가능해를 찾는 발견적 해법을 제시하였다. 4장에서는 임의로 만들어진 144문제를 대상으로 제안된 해법의 유용성을 평가하기 위하여 모의실험을 실시하였고, 이를 바탕으로 시사점 및 향후 발전방향 등을 5장에서 논의하였다.

## 2. 모형수립

이용자 노드의 집합을  $I$ 라하고, Hub의 설치 가능한 노드(Hub 노드)의 집합을  $J$ 라 하자. 이용자 노드는 일정한 규모의 이용자들의 집합을 나타낼 수 있고, 통신망의 경우에는 전화국, 수송망의 경우에는 도시 또는 공항을 나타낼 수 있다. Hub 노드는 이용자 노드로부터 전송(또는 수송)이 요구되는 수요를 집적(또는 수집)하고, 목적지 별로 재조합하여 전달하는 대규모 중계장치(또는 시설)로, 통신망의 경우에는 다중화 전송장비, 수송망의 경우에는 대규모 물류센터 또는 중심공항을 나타내게 된다. 전체 노드의 집합을  $N$ 으로 표현하자.  $E$ 는 두 노드간의 연결을 나타내는 아크의 집합이라 하자.  $A$ 는  $E$ 로부터 양방향의 방향성 있는 아크의 집합을 나타낸다. 모형상에서의 구분을 위하여 방향성이 없는 아크의 경우와 방향성이 있는 아크를 각각  $\{i, j\}$ 와  $(i, j)$ 로 표현하기로 한다.

주어진 문제를 효과적으로 정식화하기 위하여 이용자 노드간에 주어진 수요를 다품목 형태의 하나로 표현할 수 있다. 즉, 각 이용자 노드간의 수요를 하나의 품목  $k$ 에 대응되도록 표현하면,  $o(k)$ 와  $d(k)$ 는 각각 품목  $k$ 의 출발노드와 종착노드를 나타내고,  $o(k)$ 부터  $d(k)$ 까지의 수요는 품목  $k$ 의 수요로 정의된다.  $K$ 는 모든 품목들의 집합을 나타낸다. 이 같은 노드, 아크 및 품목의 정의와 함께 다음과 같은 기호 및 변수에 대한 정의가 필요하다.

- $z_j$  : Hub 노드  $j$ 의 설치 유무를 나타내는 0-1 변수,
- $y_{ij}$  : 아크  $(i, j)$ 의 설치 유무를 나타내는 0-1 변수,
- $x_{ij}^k$  : 아크  $(i, j)$ 상을 품목  $k$ 의 수요가 이용하는 비율,
- $g_j$  : Hub 노드  $j$ 의 설치에 따른 고정비용,
- $f_{ij}$  : 아크  $(i, j)$ 의 설치에 따른 고정비용,
- $c_{ij}^k$  : 아크  $(i, j)$ 상을 품목  $k$ 의 수요가 이용하는 데 따른 비용.

이들 변수 및 기호를 이용하여 본 연구에서 고려하는 문제를 정식화하면 다음과 같다.

$$[P] \quad \text{Min} \sum_{j \in J} g_j z_j + \sum_{(i,j) \in E} f_{ij} y_{ij} + \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^k x_{ij}^k, \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in N} x_{ij}^k - \sum_{j \in N} x_{ji}^k = \begin{cases} 1, & i = o(k), \\ -1, & i = d(k), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad i \in N, k \in K, \quad (2)$$

$$x_{ij}^k \leq y_{ij}, \quad \{i, j\} \in E, k \in K, \quad (3)$$

$$x_{ji}^k \leq y_{ij}, \quad \{i, j\} \in E, k \in K, \quad (4)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ji}^k \leq z_j, \quad j \in J, k \in K, \quad (5)$$

$$\sum_{(i,j) \text{ or } (j,i) \in E, j \in J} y_{ij} \leq 1, \quad i \in I, \quad (6)$$

$$z_j \in \{0, 1\}, \quad y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad x_{ij}^k, x_{ji}^k \geq 0, \quad (7)$$

$$i \in J, \{i, j\} \in E, k \in K.$$

[P]의 목적함수 (1)에는 Hub 설치에 소요되는

고정비용, 아크 개설에 소요되는 고정비용 및 아크 상에 각 이용자 노드간의 수요를 전달하기 위한 변동비용을 포함하고 있으며, 이 값이 최소가 되는 해를 찾기 위한 것이다. 제약조건 (2)는 흐름보전 제약으로 각 품목별로 출발지 노드( $o(k)$ )로부터 종착지 노드( $d(k)$ )까지의 연결을 보장하기 위한 제약식이다. (3)과 (4) 제약조건은 아크가 개설된 구간에만 수요의 전달이 가능하도록 하는 제약조건이고, 제약조건 (5)는 Hub가 설치되는 경우에만 Hub를 경유한 수요의 전달이 가능함을 나타내고 있다. 즉, 만일 Hub  $j$ 가 설치되지 않는 경우라면,  $j$ 노드를 경유하는 어떠한 수요도 허용되지 못함을 나타내고 있고, 따라서  $j$ 노드와 연결되는 어떠한 아크도 개설되지 않게 된다. (6)은 각 이용자노드에서 연결될 수 있는 Hub 노드는 오직 하나임을 나타내는 것이다. 물론 각 이용자 노드에서 설치될 수 있는 아크는 다수 있을 수 있지만, Hub노드와 연결되는 것은 하나만 존재하도록 하는 것이다. Hub를 경유하지 않는 연결은 제약식 (2), (3), (4)에 의하여 비용의 경제성 여부에 따라 설치유무가 결정 될 수 있다. 단, Hub를 경유하지 않는 연결의 경우에는 다른 이용자 노드를 중계노드로 이용할 수 없으므로, 모든  $(i, j) \in A, i \in I, j \in I$ 에 대하여 변동비용은 다음과 같이 정의된다.

$$c_{ij}^k = \begin{cases} 0, & i = o(k), j = d(k), k \in K, \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

모형 [P]는 여러 가지 유형의 계층적 구조의 망 설계 문제에 효과적으로 적용할 수 있는 유연성을 가지고 있다. 즉, 이용자 노드간의 직접연결을 배제하고 적절한 비용변환을 통하여 기존의 여러 가지 망구조의 설계 문제로 손쉽게 변형될 수 있다. Hub의 고정비용을 0으로 정의하는 경우는 모형 [P]가 용량제약이 없는 망설계모형이 되기 때문에, 최단거리문제, 최소절침나무문제, Steiner Tree 문제 등으로 쉽게 변환될 수 있다[31]. 따라서, NP-hard의 계산복잡도를 갖는 용량제약이 없는 망설계문제, Steiner Tree 문제등이 [P]의 특수한 경우

가 되므로, [P] 또한 NP-hard의 계산복잡도를 갖게 된다.

모형 [P]는 Campbell[12, 13]의 연구에서 제시된 Network Hub Location(NHL) 문제로 변환될 수 있다. NHL 문제는 각 이용자 노드가 적어도 하나의 Hub 노드에 연결되고, Hub노드를 경유하여 수요의 전달이 가능하도록 하는 것으로, 아크의 이용에 대한 변동비용과 Hub노드 설치를 위한 고정비용을 고려한다. 따라서, 모형 [P]에서 각 아크의 고정비용을 0으로 정의하고( $f_{ij} = 0$ ), 각 품목의 변동비용을 다음과 같이 정의하면 NHL문제로 변환이 가능하다. ( $\overline{c}_{ij}^k$ 를 NHL문제에서 주어진 변동비용이라 하자.)

$$c_{ij}^k = \begin{cases} \overline{c}_{ij}^k, & i = o(k), j \in J, \text{ or} \\ & i \in J, j = d(k), \text{ or} \\ & i \in J, j \in J, \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

항공망의 설계에서 고려되는 기존의 Hub-spoke 구조의 항공망 설계문제[4, 24, 37]에서는 항공노선을 아크로 고려하고 각 아크상에 수송량에 따른 변동비용만 고려하게 된다. 모형 [P]에서 Hub 설치비용과 아크의 고정비용을 0으로 정의하고, 아크상의 변동비용을 다음과 같이 정의하면 기존의 Hub-spoke 항공망 설계문제로 변환될 수 있다.

$$c_{ij}^k = \begin{cases} \overline{c}_{ij}^k, & i = o(k), j \in J, \\ & \text{or } i \in J, j = d(k), \\ \overline{c}_{ij}^k \times \alpha, & i \in J, j \in J, \\ \text{otherwise.} \end{cases}$$

여기서,  $\overline{c}_{ij}^k$ 는 원래 주어진 변동비용을,  $\alpha$ 는 Hub 노드간을 연결하는 아크상에서의 비용 할인율을 나타낸다. 그러나, 현실적으로 특정 공항을 Hub 공항으로 사용하는 경우에는 각종 운영시설 및 관리시설이 설치되므로 설치비용이 발생하는 것이 일반적이다. 따라서, 이 경우에는 기존의 모

형으로는 해결할 수 없으나, 모형 [P]에서는  $f_{ij}$  만을 0으로 정의함으로써 가능하게 된다.

통신망의 설계문제에서 볼 수 있는 Tree-star 구조의 설계문제는 Hub노드들이 Tree 구조로 연결되고, 이용자 노드를 Hub 노드의 한 곳에 연결하는 문제이다[25, 29, 36]. 모형 [P]를 이 문제를 해결하기 위한 모형으로 변환하기 위하여, 이용자 노드 하나를 임의로 선정하여 중앙노드(Root)로 정한다. 각 이용자 노드와 중앙노드간을 하나의 품목으로 정의하고 수요량은 1이 되도록 한다. 또한 모든 품목에 대하여 아크상의 변동비용은 0으로 정의한다. 이 같은 품목정의와 비용변환이 이루어지면 [P]에서는 각 노드에서 중앙노드까지 연결되는 경로가 설정되며, 이 경우에 고정비용만 고려되고 변동비용이 0이므로 최적해에서는 어떤 경우도 Cycle이 발생하지 않게 된다. 즉, 모형 [P]의 최적해는 항상 Tree-star를 얻게 된다.

### 3. 쌍대기반 해법

모형 [P]는 다품목흐름문제(Multicommodity network flow problem)를 내포하고 있기 때문에, 이 구조를 이용하면 기존의 연구결과인 쌍대기반 해법을 효과적으로 활용하는 해법의 개발이 가능하다. 본 연구에서는 모형 [P]에 대한 선형완화문제의 쌍대문제를 Dual Ascent 방법으로 해결하고, Dual Ascent 방법에서 얻어진 정보를 이용하여 실행가능해를 얻는 쌍대기반 해법을 개발한다. 선형완화된 쌍대문제를 해결하기 위한 Dual Ascent 방법은 Balakrishnan 등[5]이 개발한 Labeling Dual Ascent (LDA) 방법으로 몇 가지 수정과정을 거치는 발견적 해법을 개발하였다.

모형 [P]에 대한 선형완화된 쌍대문제는 다음과 같다.

$$[D] \text{ Max } \sum_{k \in K} v_{\alpha(k)}^k - \sum_{i \in I} \xi_i, \quad (8)$$

$$\text{s.t. } s_{ij}^k = \widehat{c}_{ij}^k - v_i^k + v_j^k \geq 0, \quad (9)$$

$$(i, j) \in A, k \in K,$$

$$s_{ij} = \begin{cases} f_{ij} - \sum_{k \in K} (w_{ij}^k + w_{ji}^k) + \xi_i \geq 0, & (i, j) \in E, i \in I, \\ f_{ij} - \sum_{k \in K} (w_{ij}^k + w_{ji}^k) \geq 0, & (i, j) \in E, i \notin I, \end{cases} \quad (10)$$

$$s_j = g_j - \sum_{k \in K} u_j^k \geq 0, \quad j \in J, \quad (11)$$

$$w_{ij}^k, w_{ji}^k, u_j^k \geq 0, \quad (12)$$

$$(i, j) \in E, j \in J, k \in K,$$

$$\left( \widehat{c}_{ij}^k = \begin{cases} c_{ij}^k + w_{ij}^k + u_i^k, & i \in J, (i, j) \in A, k \in K, \\ c_{ij}^k + w_{ij}^k & \text{otherwise.} \end{cases} \right)$$

쌍대변수  $v_i^k, w_{ij}^k, w_{ji}^k, u_i^k, \xi_i$ 는 각각 (2)~(6)의 제약식에 대응되는 변수이다. (2)의 제약식에서 각 품목  $k$ 에 대하여 중복되는 제약식이 하나씩 존재하므로, 쌍대문제에서 임의의 변수 하나를 0으로 설정할 수 있으므로,  $v_{\alpha(k)}^k = 0$ 으로 설정하였다[5].

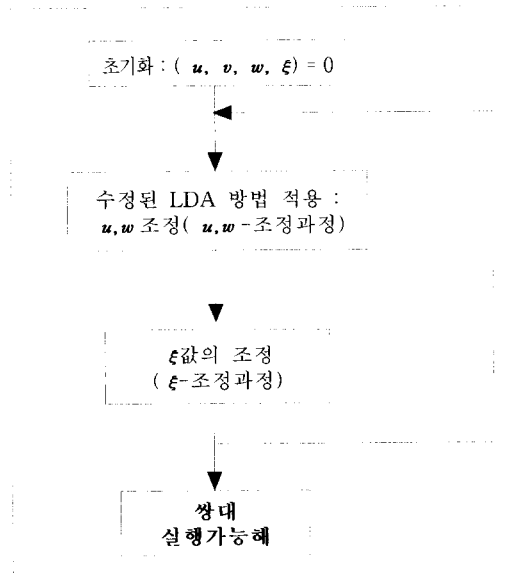
[D]에서  $\{u_i^k\}, \{\xi_i\}$ 이 주어진다면, 나머지 문제는 용량제약이 없는 망설계 문제의 선형완화된 쌍대문제와 동일하게 된다. 따라서, 이 경우에는 Balakrishnan 등이 개발한 LDA 해법을 그대로 이용할 수 있다. 결국, 어떻게  $\{u_i^k\}, \{\xi_i\}$ 를 조정하여 쌍대 목적함수 값을 최대화할 것인가를 결정하는 문제가 남게 된다. 본 연구에서는 [D]를 해결하기 위하여 LDA 방법을 기본적으로 사용하면서,  $\{u_i^k\}, \{\xi_i\}$ 의 조정을 통한 쌍대 목적함수 값의 효과적인 증가방법을 개발한다.

#### 3.1 Dual Ascent 해법

$u, v, w, \xi$ 를  $\{u_i^k\}, \{v_i^k\}, \{w_{ij}^k\}, \{\xi_i\}$ 을 나타내는 벡터로 정의하자. [D]에서  $u, w, \xi$  값이 결정되면, 나머지 문제는 각 품목  $k$  별로 분할이 가능하게 되어  $|K|$ 개의 부분제를 얻을 수 있다. 이 때 품목  $k$ 별로 분할될 수 있는 각 부분제는  $o(k)$ 부터  $d(k)$ 까지 최단경로 문제의 쌍대문제로 표현

된다[5]. 이 경우 아크 길이는  $\widehat{c}_{ij}^k$ 로 정의된다. 따라서,  $u, w, \xi$ 를 조정하여 가능한 각 품목별 최단 경로의 길이를 최대화하도록 함으로써 쌍대목적함수 값을 증가시킬 수 있다.

$\xi$  값의 조정시에는  $\xi$ 의 증가에 따른 목적함수에서 다음 같은 상충효과(trade-off)를 고려한 증가 방법을 결정하여야 한다. 즉, 쌍대 목적함수식 (8)에서  $\xi$  값의 한 단위 증가는 직접 목적함수값의 한 단위 감소를 초래하게 된다. 그러나, (10) 제약식으로부터  $\xi$  값의 증가가 관련된 각 아크의  $\{s_{ij}\}$  값들을 증가시킴으로써  $\{\widehat{c}_{ij}^k\}$ 의 증가가 가능하기 때문에  $\{v_{\alpha(k)}^k\}$  값의 증가를 얻을 수 있다. 따라서  $\{v_{\alpha(k)}^k\}$ 의 증가분이  $\xi$  값의 증가분 보다 큰 경우에 쌍대 목적함수 값이 증가할 수 있으므로, 이 경우에만  $\xi$  값의 증가를 고려할 수 있다. 본 연구에서는 [D] 문제를 효과적으로 해결하기 위하여  $u, w$ 의 조정 과정( $uw$ -조정과정)과  $\xi$  값의 조정과정( $\xi$ -조정과정)으로 구분하여 쌍대 실행가능해를 찾는 방법을 개발한다([그림 2]).



[그림 2] Dual Ascent 과정

### 3.1.1 uw-조정과정

$\xi$  값을 고정시킨 상태에서  $u, w$  값의 조정을 통한  $\{v_i^k\}$ 의 증가과정은 다음과 같다. 품목집합  $K$ 에서 하나의 품목( $k$ )을 선택하고, 노드 집합  $N$ 을  $o(k)$ 를 포함하는  $N(k)$ 와  $d(k)$ 를 포함하는  $\overline{N(k)}$ 로 분할한다. 초기에는  $N(k) = \{o(k)\}$ ,  $\overline{N(k)} = N \setminus N(k)$ 로 정의한다. LDA 방법의 개념은  $\overline{N(k)}$ 에 포함된 노드를 점차  $N(k)$ 에 포함되도록 하면서, 최종적으로  $d(k)$ 가  $N(k)$ 에 포함되면 종료되도록 하는 방법이다. 품목  $k$ 에 대하여  $N(k)$ 와  $\overline{N(k)}$ 가 결정되면, 이 두 노드 집합을 연결하는 아크의 집합을 다음과 같이 정의한다.

$$A(k) = \{(i, j) \in A : i \in N(k), j \in \overline{N(k)}\}.$$

아크집합  $A(k)$ 는 다음과 같이 3가지 유형의 아크 집합으로 나누어 볼 수 있다.

$$A_1(k) = \{(i, j) \in A(k) : s_{ij}^k > 0\},$$

$$A_2(k) = \{(i, j) \in A(k) : s_{ij}^k = 0, s_{ij} > 0\},$$

$$A_3(k) = \{(i, j) \in A(k) : s_{ij}^k = 0, s_{ij} = 0, s_i > 0, i \in J\}.$$

따라서,  $A(k)$ 에 속한 아크의 유형에 따라  $v_i^k$  값의 증가방법과 증가량이 다르게 된다.  $v_i^k$ 의 증가량( $\Delta$ )은 [D]의 제약조건을 만족시키는 범위에서 결정되어야 하기 때문에 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \min \{s_{ij}^k : (i, j) \in A_1(k)\}, \\ \Delta_2 &= \min \{s_{ij} : (i, j) \in A_2(k)\}, \\ \Delta_3 &= \min \{s_i : (i, j) \in A_3(k), i \in J\}, \end{aligned}$$

$$\Delta = \min \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}.$$

$\Delta$  값이 결정되면, 노드집합  $N(k)$ 에 속한 모든 노드 상의  $v_i^k$  값을  $\Delta$ 만큼 증가시키고,  $v_{\alpha(k)}^k$ 의 조정에 따라  $\overline{N(k)}$ 에 속한 노드의 일부를  $N(k)$ 에



**uw-조정과정**

[Step 0]  $CAND = K$ 로 정의.

[Step 1] 품목  $k \in CAND$  선택하고,  $N(k), \overline{N(k)}$  정의:  $N(k) = \{o(k)\}$ ,  $\overline{N(k)} = M \setminus N(k)$ .

[Step 2]  $A_1(k), A_2(k), A_3(k)$ 를 정의하고,  $N(k)$ 에 있는 Hub 노드집합을 정의:

$$HUB(k) = N(k) \cap J. \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \text{를 계산하고, } \Delta \text{값을 결정.}$$

[Step 3] 쌍대변수값 조정:

$$\begin{aligned} v_i^k &\leftarrow v_i^k + \Delta, \quad i \in N(k), \\ s_i &\leftarrow s_i - \Delta, \quad i \in HUB(k), \\ s_{ij} &\leftarrow s_{ij} - \Delta, \quad (i, j) \in A_2(k), \\ s_{ij}^k &\leftarrow s_{ij}^k - \Delta, \quad (i, j) \in A_1, \text{ and } i \notin HUB(k). \end{aligned}$$

[Step 4]  $i \in N(k) \cup J, j \in \overline{N(k)}$ 인 아크상에  $s_{ij}^k = s_{ij} = 0$  이거나,  $i \in N(k) \cup J, j \in \overline{N(k)}$ 인 아크상에서  $s_{ij}^k = s_{ij} = s_i = 0$ 인 경우에는 노드  $j$ 를  $N(k)$ 에 포함시키고,  $\overline{N(k)}$ 에서 제외.

[Step 5]  $d(k)$ 가  $N(k)$ 에 포함되면  $k$ 를  $CAND$ 에서 제거. 만일  $CAND = \phi$ 이면 **uw-조정과정**을 종료.  $CAND \neq \phi$ 인 경우에는 [Step 1]부터 반복.

속하도록 해야 한다. 즉,  $A(k)$ 에 속하는 아크  $(i, j)$ 에 대하여  $s_{ij}^k = 0, s_{ij} = 0$ 이고,  $i$ 노드가 이용자 노드인 경우에는 노드  $j$ 를  $\overline{N(k)}$ 에서 제거하여  $N(k)$ 에 포함되도록 한다. 만일 노드  $i$ 가 Hub 노드인 경우에는  $s_{ij}^k = s_{ij} = s_i = 0$ 인 경우에 노드  $j$ 를  $N(k)$ 에 포함되도록 하고,  $\overline{N(k)}$ 에서 제거한다. 이 같은 과정에서  $d(k)$ 가  $N(k)$ 에 포함되면  $k$ 에 대한 Dual Ascent는 종료하고,  $K$ 에 남아 있는 다른 품목에 대하여 Dual Ascent를 계속한다. 더 이상 Dual Ascent를 실행할 품목이 남아 있지 않으면, **uw-조정과정**을 종료하고,  $\xi$ -조정과정을 수행한다. **uw-조정과정**에서 각 품목  $k$ 에 대하여  $o(k)$ 부터  $d(k)$ 까지  $c_{ij}^k$ 값을 아크의 거리로 하는 최단 경로상의  $s_{ij}^k$ 의 값은 항상 0이 됨을 알 수 있다. 또한 이 같은 최단 경로는 **uw-조정과정**이 종료되면, 적어도 하나 이상 존재하게 된다.

3.1.2  $\xi$ -조정과정

$\xi$  값의 조정과정은 **uw-조정과정** 보다 복잡하게 이루어진다. 즉, 각 이용자 노드  $i^* \in I$ 에 대하여

$\xi_{i^*}$  값의 증가는 이 노드와 Hub 노드와 연결된 모든 아크상의  $s_{i^*j}$  값을 증가시키게 된다. 증가된  $s_{i^*j}$  값을 이용하여 추가적인 **uw-조정과정**을 적용함으로써 전체적인 쌍대 목적함수 값이 증가되도록 한다. 따라서, 개별 이용자 노드  $i^*$ 에서  $\xi_{i^*}$ 의 증가가능성을 검토하고, 증가가 가능하면 최소 증가량을 결정하여 **uw-조정과정**을 적용함으로써 쌍대 목적함수 값을 개선한다. 만일 모든 이용자 노드에서 쌍대 목적함수 값의 증가가 이루어지지 않는 경우에는  $\xi$ -조정과정을 종료하고, 모든 Dual Ascent 과정을 종료한다.

이용자 노드  $i^*$ 에서  $\xi_{i^*}$ 가  $\Delta^*$ 만큼 증가하게 되면 노드  $i^*$ 와 Hub 노드를 연결하는  $(i^*, j)$ 상의  $s_{i^*j}$ 가  $\Delta^*$ 만큼 증가하게 된다. 이 값은 노드  $i^*$ 를 출발지로 하는 품목과 종착지로 하는 품목의 최단경로의 길이를 증가시키는 데 이용될 수 있다. 따라서, 노드  $i^*$ 를 출발지로 하는 품목의 집합  $O_{i^*}(k)$ 와 종착지로 하는 품목의 집합  $D_{i^*}(k)$ 을 정의하여 여기에 속한 품목들의 최단경로 길이의 증가가능성을 검토하여야 한다.

우선 노드  $i^*$ 를 종착지로 하는 품목  $k \in D_i(k)$ 를 고려하자. 이용자 노드  $i^*$ 를 제외한 나머지 노드를 대상으로 노드집합  $Lab(k)$ ,  $\overline{Lab(k)}$ 를 정의한다.  $Lab(k)$ 는  $k$ 의 출발지로부터  $s_{ij}^k = s_{ij} = 0$ 이거나,  $s_{ij}^k = s_{ij} = s_i = 0, i \in J$ 인 아크로 연결되는 노드의 집합이고,  $\overline{Lab(k)} = M \setminus Lab(k)$ 로 정의된다. 이용자 노드  $i^*$ 는 어느 경우에도 포함되지 않도록 한다.  $Lab(k)$ 와  $\overline{Lab(k)}$ 가 정의되면 두 집합을 연결하는 아크집합이 결정되고, 이들 아크 집합의 유형에 따라 쌍대가능성을 유지하면서 최단경로의 길이를 증가시킬 수 있는 최소증가량  $\Delta$ 가  $\Delta^*$ 로 결정된다.  $\Delta_k^*$ 를 품목  $k$ 의  $\xi_{i^*}$ 에 대한 최소증가량이라 하면,  $\Delta^*$ 는  $\min\{\Delta_k^*, k \in D_i(k)\}$ 로 결정

된다. 따라서  $\Delta^*$ 값을  $\xi_{i^*}$ 값에 추가하여  $s_{i^*j}$ 값을 개선한 후  $uw$ -조정과정을 실시하여 쌍대 목적함수 값을 개선한다.

이용자 노드  $i^*$ 를 출발지로 하는 품목  $k \in O_i(k)$ 의 경우는 다음과 같은 과정을 따라  $\xi_{i^*}$ 값이 조정된다.  $\xi_{i^*}$ 의 증가는 Hub 노드와 연결된 아크  $(i^*, j)$ 의 상태에 따라 다른 결과를 얻게 된다. 즉,  $(i^*, j)$ 아크 상에서  $s_{i^*j}^k > 0$ 인 경우에는  $\xi_{i^*}$ 의 증가에 따른  $s_{i^*j}$ 의 증가된 값이  $v_{i^*}^k$ 의 증가에 이용되지 않기 때문에, 다른 품목의 최단경로 길이를 증가시키는 데 이용될 수 있다. 그러나,  $s_{i^*j}^k = 0, s_{i^*j} > 0$  또는  $s_{i^*j}^k = s_{i^*j} = 0$ 인 경우에는  $\xi_{i^*}$ 의 증가에 따른  $s_{i^*j}$ 의 증가량이 모두  $w_{i^*j}^k$ 의

### $\xi$ -조정과정

[Step 0]  $CAND_I = I$ 로 정의,  $O(i) = D(i) = 1, i \in I$ .

[Step 1]  $i \in CAND_I$ 를 선택하고,  $O_i(k), D_i(k)$ 를 정의.

[Step 2]  $D(i) = 1$ 인 경우에  $D_i(k)$ 에 대한 증가량( $\Delta$ ) 계산

1)  $k \in D_i(k)$  선택하고,  $Lab(k), \overline{Lab(k)}$  정의.

$s_{o(k)d(k)}^k = s_{o(k)d(k)} = 0$ 이면,  $\Delta_k = 0$ 으로 하고, 다음  $k$  선택.

2)  $\Delta_1^k, \Delta_2^k, \Delta_3^k$  및  $\Delta_k$  계산:

$\Delta_1^k = \min\{s_{ij}^k : s_{ij}^k > 0, i \in Lab(k), j \in \overline{Lab(k)}\}$ ,

$\Delta_2^k = \min\{s_{ij} : s_{ij}^k = 0, s_{ij} > 0, i \in Lab(k), j \in \overline{Lab(k)}\}$

$\Delta_3^k = \min\{s_i : s_{ij}^k = s_{ij} = 0, s_i > 0, i \in Lab(k) \cap J, j \in \overline{Lab(k)}\}$

$\Delta_k = \min\{\Delta_1^k, \Delta_2^k, \Delta_3^k\}$

3)  $\Delta = \min\{\Delta_k > 0, k \in D_i(k)\}$ ,  $\xi_i \leftarrow \xi_i + \Delta$ ,  $s_{ij} \leftarrow s_{ij} + \Delta$ ,  $j \in J$  조정.

4) 모든  $k \in D_i(k)$ 에 대하여  $uw$ -조정과정 실행하여 쌍대 목적함수 값 비교.

5) 쌍대 목적함수 값의 증가가 없으면,  $D(i) = 0$ .

[Step 3]  $O(i) = 1$ 인 경우에  $O_i(k)$ 에 대한 증가량( $\Delta$ ) 계산

1)  $k \in O_i(k)$  선택하여  $\Delta_k$  계산 :  $\Delta_k = \min\{s_{ij}^k > 0, j \in J\}$

$s_{o(k)d(k)}^k = s_{o(k)d(k)} = 0$ 이면,  $\Delta_k = 0$ 으로 하고, 다음  $k$  선택.

2)  $\Delta = \min\{\Delta_k, k \in O_i(k)\}$ ,  $\xi_i \leftarrow \xi_i + \Delta$ ,  $s_{ij} \leftarrow s_{ij} + \Delta$ ,  $j \in J$

3)  $O_i(k)$ 의 모든 품목에 대하여  $uw$ -조정과정을 실행하여 쌍대 목적함수 조정

4) 쌍대 목적함수의 증가가 없으면,  $O(i) = 0$ .

[Step 4]  $O(i) = 0$ ,  $D(i) = 0$ 이면,  $i$ 를  $CAND_I$ 에서 제외.

$CAND_I = \phi$ 이면,  $\xi$  조정과정 종료.  $CAND_I \neq \phi$ 이면, [Step 1]부터 반복.

증가에 이용됨으로써 품목  $k$ 이외의 품목의 최단경로를 증가시키는 데는 이용되지 못하게 된다. 따라서, Hub 노드와 연결된  $(i^*, j)$  아크상에서  $s_{i^*j}^k > 0$ 이 하나 이상 존재하는 경우에만  $\xi_{i^*}$ 의 증가에 따른 목적함수의 증가 가능성을 기대할 수 있다. 품목  $k$ 를 위한  $\xi_{i^*}$ 의 증가량  $\Delta_k^*$ 는  $\min \{s_{i^*j}^k > 0, j \in J\}$ 로 결정된다.  $s_{i^*j}^k > 0$ 인 아크가 하나도 존재하지 않는 경우에는  $\Delta_k^* = 0$ 이 된다.  $O_{i^*}(k)$ 에 속하는 모든 품목  $k$ 에 대하여  $\xi_{i^*}$ 의 최소증가량  $\Delta_k^*$ 는  $\min \{\Delta_k^* > 0, k \in O_{i^*}(k)\}$ 으로 결정되게 된다.  $\Delta_k^*$ 값이 결정되면, 이 값 만큼  $\xi_{i^*}$ 값을 증가시켜 Hub와 연결된 아크상의  $s_{ij}$ 를 증가시키고, **uw-조정과정**을 수행하여 쌍대 목적함수 값을 개선시킨다.

$O_i(k)$  또는  $D_i(k)$ 에 속한 품목  $k$ 에 대하여  $o(k)$ 부터  $d(k)$ 까지 Hub 노드를 공유하지 않고 직접 연결된 아크가 최단경로에 포함되는 경우에는  $\xi_i$ 의 증가가 최단경로의 거리를 증가시키지 못하므로 해당 품목의  $\Delta_k^*$ 값을 0으로 결정한다. 이용자 노드  $i$ 를 중심으로  $\xi_i$ 의 증가에 따른 쌍대 목적함수 값의 개선 가능성을 검토하고, 모든 이용자 노드에 대하여 더 이상의 쌍대 목적함수 값의 증가가 이루어지지 않는 경우에는  **$\xi$ -조정과정**을 종료하고, 쌍대변수 값을 이용하여 실행가능해를 찾도록 한다.

### 3.2 실행가능해 발견과정

[P]의 실행가능한 정수해를 찾기 위하여 [D]의 해결과정에서 얻어진 쌍대변수의 정보를 활용한다. 즉, [P]의 선형완화된 쌍대문제 [D]로부터 선형계획법에서 사용되는 상보여유조건(Complementary Slackness Conditions)을 이용할 수 있다. 즉, 쌍대해로부터 상보여유조건을 최대한 만족시키는 실행가능해가 최적해에 가까울 것이라는 기대를 바탕

으로 실행가능해를 찾는 연구들이 수행되어져 왔다[20, 41, 43, 44]. 따라서, 다음과 같은 상보여유조건을 최대한 만족하도록 초기 실행가능해를 구하고, 초기 실행가능해로부터 해의 개선을 검토하여 개선된 실행가능해를 찾는 접근을 제시한다.

$$s_{ij}^k x_{ij}^k = 0, \quad (i, j) \in A, \quad (13)$$

$$s_{ij} y_{ij} = 0, \quad (i, j) \in E, \quad (14)$$

$$s_{j^*} = 0, \quad j \in J. \quad (15)$$

(15)식으로부터 Hub 노드로 활용될 수 있는 노드의 집합  $J^*$ 를 다음과 같이 정의한다:  $J^* = \{j \in J : s_j = 0\}$ . 또한 각 품목  $k$ 로부터 최단경로가 설치될 수 있는 아크의 집합  $A_k^*$ 와 아크의 설치가능한 집합  $E^*$ 를 다음과 같이 정의한다:

$$A_k^* = \{(i, j) \in A : s_{ij}^k = 0, s_{ij} = 0\},$$

$$E^* = \{(i, j) \in E : (i, j) \in \cup_k A_k^* \text{ or } (j, i) \in \cup_k A_k^*\}$$

따라서, 노드집합  $I \cup J^*$ 와 아크집합  $E^*$ 를 대상으로 실행가능해를 찾는다. 첫째,  $E^*$ 에 대응되는  $A^*$ 에 대하여 각 품목별로  $c_{ij}^k$ 를 아크 길이로 하는 최단경로를 찾아  $A_k^o$ 라하고, 모든 품목에 대하여 최단경로가 구해지면  $E^o$ 를 다음과 같이 정의한다:  $E^o = \cup_k A_k^o$ .  $E^o$ 에는 이용자 노드  $i$ 에서 Hub 노드와 연결되는 아크가 두 개 이상 존재하는 경우도 포함되기 때문에, 각 이용자 노드가 하나의 Hub 노드에만 연결되도록 단계적으로 아크를 제거한다.

각 이용자 노드들이 하나의 Hub 노드에만 연결되는 초기 실행가능해에는 불필요한 아크들이 존재할 수 있으므로 이를 제거하는 과정이 필요하다. 또한, 불필요한 Hub 노드들이 포함될 수 있으므로 불필요한 Hub 노드의 제거에 따른 비용감소 가능성을 검토하여야 한다. 즉,  $J^*$ 에서 하나의 Hub 노드  $j^*$ 를 선택하여  $J^*$ 에서 제외하고, 위에서 설명

한 방법으로 실행가능해를 찾는다. 만일, 실행가능해가 존재하지 않으면,  $j^*$ 를  $J^*$ 에 다시 포함시키고, 실행가능해가 존재하면 이 전에 구한 최선의 실행가능해(Incumbent Solution)와 비용을 비교하여 비용절감이 이루어지는 경우 최선의 실행가능해를 대체한다. 이 같은 과정은 더 이상의 비용절감이 발생하지 않을 때까지 반복적으로 적용하여, 불필요한 Hub의 설치로 인한 비용증가를 방지할 수 있다.

### 3.3 Problem Reduction

Dual Ascent 과정으로부터 얻어진 쌍대 목적함수 값은 [P]의 최적해에 대한 하한 값이 되고, 쌍대 변수 값을 이용하여 최적해에 대한 상한 값을 제공하는 실행가능해를 얻을 수 있다. 또한, 쌍대변수 값은 특정 Hub 노드 및 아크에 대하여 최적해에 포함될 수 있는지를 평가하는 데 있어서 중요한 정보를 제공하게 된다. 특히, 실행가능해 발견과정에서의  $J^*$ 에 포함된 Hub 노드들은  $s_j=0$ 인 노드들로 Hub 노드가 설치될 수 있다. 반면에,  $J^*$ 에 속하지 않는 노드들은  $s_j>0$ 이라 하여도, Hub 노드로 이용될 수 있으나 그 가능성은 매우 낮다. 따라서,  $J^*$ 에 속하지 않는 Hub의 설치 후보 노드가 최적해에 결코 포함되지 않는다는 것을 입증할 수 있으면, 고려되는 후보 망의 규모가 대폭적으로 줄게되어 최적해에 가까운 해를 얻을 수 있다. 이런 과정은 아크의 경우에도 마찬가지로  $s_{ij}>0$ 인 특정 아크가 결코 최적해에 포함되지 않음을 알 수 있으면, 이 아크를 배제한 후보 망을 대상으로 설계방법을 적용함으로써 최적해에 가까운 해를 얻을 수 있다. 전자의 경우를 노드제거 방법이라 하고, 후자를 아크제거 방법이라 한다.

$s_{i^*,j^*}>0$ 인 아크  $(i^*,j^*)$ 가 최적해에 포함되어야 한다고 가정하자. 이 경우에는 [P]에  $y_{i^*,j^*}=1$ 인 제약식이 추가되어야 하고, 이에 대응되는 쌍대변수를  $\pi_{i^*,j^*}$ 라 하면 쌍대제약식은  $\sum_{k \in K} (w_{i^*,j^*}^k + w_{j^*,i^*}^k)$

$+ \pi_{i^*,j^*} \leq f_{i^*,j^*}$ 가 된다. 쌍대 목적함수에는  $\pi_{i^*,j^*}$ 가 추가되게 된다. 제약식 (9)으로부터,  $\pi_{i^*,j^*} = s_{i^*,j^*}$ 로 놓으면, 쌍대 실행가능성이 유지되는 새로운 쌍대해를 얻게 된다. 따라서,  $Z_D + s_{i^*,j^*} > Z_P$ 가 되면  $y_{i^*,j^*}=1$ 의 제약조건이 실행불가능해를 가져오므로,  $y_{i^*,j^*}=0$ 이 되어야 한다. 즉, 아크  $(i^*,j^*)$ 는 최적해에 포함될 수 없음을 알 수 있다. 이것을 아크 제거검사(Arc Exclusion Test)라 한다[5].

Hub 노드의 경우에도 동일한 개념이 적용될 수 있다. 즉,  $J^*$ 에 속하지 않는 Hub 노드의 후보를  $j^*$ 이라 하고,  $j^*$ 노드가 반드시 최적해에 포함되어야 한다고 가정하여  $z_{j^*}=1$ 이라는 제약식을 [P]에 추가로 고려하자.  $\alpha_{j^*}$ 를 새로운 제약식에 대응되는 쌍대변수라 하자. 이 경우  $z_{j^*}$ 에 대응되는 쌍대 제약식은  $\sum_{k \in K} u_{j^*}^k + \alpha_{j^*} \leq g_{j^*}$ 가 되고, 새로운 쌍대 목적함수 값은  $\sum_{k \in K} v_{o(k)}^k - \sum_{i \in I} \xi_i + \alpha_{j^*}$ 가 될 것이다.  $s_{j^*}$ 가 (10)제약식에서  $g_{j^*} - \sum_{k \in K} u_{j^*}^k$ 를 나타내므로,  $\alpha_{j^*} = s_{j^*}$ 로 대치하면 쌍대가능성을 유지하는 새로운 쌍대해가 얻어질 수 있다.  $Z_D, Z_P$ 를 각각  $z_{j^*}=1$ 을 고려하기 전의 쌍대 목적함수 값 및 실행가능해의 목적함수 값이라 하면, 새로운 제약식의 추가로 인한 쌍대목적함수 값은  $Z_D + s_{j^*}$ 가 된다.  $Z_D + s_{j^*}$ 가  $Z_P$ 보다 큰 값이 되면,  $z_{j^*}=1$ 이 실행불가능해임을 알 수 있다. 따라서, 이 같은 경우에는  $z_{j^*}=0$ 으로 결정한다. 즉, Hub 노드  $j^*$ 는 최적해에 포함될 수 없음을 알 수 있다. 이것을 노드 제거검사(Node Exclusion Test)라 한다. 일반적으로 비용구조 상  $s_{j^*}$  값이  $s_{i^*,j^*}$  값 보다 크기 때문에, 노드 제거검사가 아크 제거검사 보다 효과적이다. 이 같은 과정을 거쳐 축소된 망을 대상으로 쌍대기반 해법을 다시 적용하면 보다 효과적인 실행가능해를 찾을 수 있게 된다.

## 4. 실험결과

제안된 해법을 일반적인 형태의 망설계문제에 적용하기 위하여 C언어를 이용하여 프로그램을 작성하였고, SUN-Sparc20 (Workstation)을 이용하여 부작위로 발생된 문제에 대한 해법의 성능을 평가하였다. 해법의 효율성을 평가하기 위한 실험문제는 노드 및 아크 수, 비용요소의 크기 등에 따라 난수를 이용하여 생성하였다. 이를 위하여 (100 × 100) 정방형 평면상에 미리 주어진 수 만큼의 Hub 노드와 이용자 노드를 부작위로 위치시킨다. 부작위로 위치한 각 이용자 노드를 임의의 Hub 노드에 연결시키고, Hub 노드들 간에는 Spanning Tree가 되도록 연결하여 실행가능성을 유지하도록 한다. 이렇게 형성된 망에 대하여 미리 지정된 수 만큼의 아크가 되도록 추가로 아크를 연결한다.

부작위로 생성된 망에 대해 Hub 노드의 고정비용, 아크의 고정비용 및 아크상을 이용하는 품목별 단위당 변동비용을 정의해야 한다. Hub 노드의 고정비용은  $(a, b)$  범위 내에서 결정할 수 있도록 매개변수화 하여 Hub 노드의 고정비용의 규모가 해에 미치는 영향을 분석할 수 있도록 하였다. 아크상의 비용을 정의하기 위하여 각 아크별 기본비용을 두 노드간의 Euclidean 거리로 정의하였다. 아크의 고정비용은 아크의 기본비용에 상수  $f$ 를 곱하여 결정하고, 각 품목별 아크 상의 변동비용은 기본비용에 각 품목의 수요량을 곱하여 결정하였다. 즉,  $f$  값을 변동시켜 아크의 변동비용과 고정비용간의 크기에 따른 영향을 분석할 수 있도록 하였다. 특히, 변동비용의 경우에는 다음 두가지 경우를 추가로 고려하였다. 첫째, Hub 노드간을 연결하는 아크 상에서의 품목별 변동비는 Hub 노드와 이용자 노드를 연결하는 아크상에서의 품목별 비용보다 저렴해야 한다. 따라서, Hub 노드간을 연결 아크상에서는 산출된 변동비용에 상수  $\alpha$ 를 곱하여 결정하고,  $\alpha$  값은 (0.1, 0.5) 사이에서 결정하였다. 둘째, 각 품목별 출발지 노드와 종착지 노드를 직접 연결하는 아크상의 변동비용에는 산출된 변

동비용에 상수  $\beta$ 를 곱하여 결정하고,  $\beta$ 는 (1.0, 3.0)사이에서 결정하였다. 각 품목에 대한 수요량은 (5.0, 20.0)의 구간에서 부작위로 발생된 난수를 이용하여 결정하였다.

이 같은 방법으로 생성된 총 144개의 실험문제에 대하여 해법을 적용하였다. 실험문제는 문제의 크기에 따라 4개의 집단으로 구분하였고, 각 집단 별로 Hub 고정비용의 크기에 따라 3개의 소집단으로 구분하였다. 또한 각 소집단 별로 아크의 변동비용의 크기에 따라 3개로 구분하였고, 각각 4개씩의 문제에 대한 결과의 평균을 산출하였다 (<표 3>). 실험문제의 크기는 10개의 이용자노드, 5개의 Hub 설치 후보노드, 90개의 아크와 45개의 품목을 갖는 문제(95개의 정수변수, 8100개의 실수변수 및 9010개의 제약식)에서부터 30개의 이용자노드, 10개의 Hub 설치 후보노드, 300개의 아크와 435개의 품목을 갖는 문제(310개 정수변수, 261000개의 실수변수 및 280780개의 제약식)까지를 대상으로 하였다.

<표 3>의 결과에서 실행가능해의 품질을 평가할 수 있는 %Gap이 대체로 5% 내외를 보이고 있고, 문제 규모가 비교적 작은 경우에는 1% 내외의 좋은 결과를 보이고 있음을 알 수 있다. 계산시간 면에서도 최대 10분 내외의 실행시간을 보이고 있다. 이 같은 결과는 문제의 규모 및 문제복잡도를 고려하고, 유사한 문제에서의 계산결과(37, 44) 등과 비교하면 매우 좋은 결과라 할 수 있다. Hub의 설치비용이 증가함에 따라 %Gap과 계산시간 모두 감소하는 경향을 보이고 있다. 이 것은 높은 고정비용으로 인해 쌍대 목적함수 값의 충분한 증가가 가능하기 때문이고, 실행가능해를 계산하는 경우에  $s_j > 0$ 인 Hub가 많아지면서 실행가능해를 쉽게 구할 수 있기 때문으로 판단된다. 아크의 고정비용의 증가도 %Gap을 약간씩 감소시키고 있다. 따라서, 현실적인 문제에서 Hub의 고정비용이 비교적 크게 주어지고 아크의 고정비용도 큰 값을 고려하면, 이 같은 결과로부터 본 연구에서 제시된 해법이 현실적인 문제에도 효과적으로 적용될 수 있음을 알

〈표 3〉 실험문제 유형 및 계산결과

$ I  \times  J  \times  E  \times  K $	Hub 비용	$f$ 비율	%Gap(%)*	실행시간(sec.)**	직접연결 경로수
10x5x90x45	1,000 - 5,000	3.0	0.2	2.0	2.1
		5.0	0.1	2.0	1.8
		10.0	0.2	1.2	0.5
	5,000 - 10,000	3.0	0.6	1.0	3.0
		5.0	0.6	1.5	2.5
		10.0	0.8	1.5	1.0
	20,000 - 50,000	3.0	0.0	1.0	2.2
		5.0	0.1	0.8	1.2
		10.0	0.1	1.0	1.0
15x5x160x105	1,000 - 5,000	3.0	1.1	8.5	2.2
		5.0	1.2	7.2	3.0
		10.0	2.3	5.5	1.2
	5,000 - 10,000	3.0	0.2	8.2	2.7
		5.0	0.3	6.0	2.5
		10.0	0.2	6.2	2.0
	20,000 - 50,000	3.0	0.4	14.0	4.1
		5.0	0.6	10.2	3.0
		10.0	0.5	10.5	1.7
20x10x200x190	1,000 - 5,000	3.0	3.8	28.1	1.5
		5.0	3.7	26.4	0.7
		10.0	3.4	32.0	0.5
	5,000 - 10,000	3.0	4.5	28.3	1.7
		5.0	3.6	26.6	1.0
		10.0	2.9	24.0	0.5
	20,000 - 50,000	3.0	0.7	21.0	1.7
		5.0	0.5	22.5	0.7
		10.0	0.4	20.5	0.5
30x10x300x435	1,000 - 5,000	3.0	4.7	393.1	0.5
		5.0	5.9	669.4	0.2
		10.0	4.7	658.2	0
	5,000 - 10,000	3.0	4.2	227.8	0.5
		5.0	3.8	130.0	0.2
		10.0	3.3	121.1	0
	20,000 - 50,000	3.0	6.4	111.2	1.2
		5.0	6.1	106.7	1.0
		10.0	4.9	163.0	0.7

\* %Gap = (Upper Bound - Lower Bound)/Lower Bound x 100.

\*\* 실행시간 : SUN SPARC 20에서의 실행시간.

%Gap 및 실행시간은 각각 4개 문제의 계산결과에 대한 평균임.

수 있다. 아크의 고정비용이 증가하면 설치되는 아크의 수를 최소화하기 때문에 Hub 노드를 경유하지 않는 직접연결 경로의 수도 최소화하게 된다. 이 같은 결과도 <표 3>에서 확인할 수 있다. 따라서, 본 연구에서 제시된 해법이 좋은 실행가능해를 제공하고 있음을 알 수 있고, 보다 큰 규모의 현실적인 문제에도 효과적으로 적용될 수 있을 것으로 판단된다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 통신 및 수송망의 설계시에 주로 나타나는 계층적 구조를 갖는 망설계 문제에서, Hub 노드의 위치 결정과 망설계를 동시에 결정하는 문제를 다루었다. 계층적 구조를 갖는 망구조에서 운용 및 관리의 효율화를 위하여 각 이용자 노드를 단일 Hub 노드에 연결하는 제약(단일 연결 제약)을 추가하였고, 특정 이용자 노드간의 연결이 Hub 노드를 경유하지 않고 직접 연결될 수 있도록 하는 제약조건을 추가함으로써 현실적인 제약요인을 보다 많이 반영하였다. 이 같은 문제는 전통적인 설비입지선정 문제와 망설계 문제를 동시에 고려하는 것으로 매우 어려운 문제로 간주되어 왔었다. 따라서, 전체 문제를 별도의 두 개의 부분제로 분할하여 해결하는 접근방법을 적용하여 왔으나, 많은 계산시간 및 노력에도 불구하고 얻어진 실행가능해에 대한 평가방법이 불가능했었다. 본 연구에서는 이 같은 문제에 대하여 하나의 설계모형으로 모형화하였고, 실행가능해에 대한 평가가 가능할 뿐만아니라 효과적으로 최적해에 가까운 해를 얻을 수 있는 해법을 개발하였다.

효과적인 해법의 개발을 위하여 다품목 흐름문제를 내포하는 혼합정수계획 모형을 제시하였고, 이를 바탕으로 쌍대기반의 발견적 해법을 개발하였다. 특히, 본 연구에서 제시된 통합설계모형은 적절한 비용정의를 통하여 기존에 다루어진 여러 형태의 망구조를 갖는 설계문제로 쉽게 변환될 수 있는 유연성을 가지고 있다. 따라서, 현실적으로

존재하는 다양한 형태의 망설계 문제에 본 통합설계모형이 효과적으로 적용될 수 있을 것이다. 쌍대기반 해법은 최적해에 대한 하한 값을 얻기 위한 Dual Ascent 과정과 실행가능해 발견과정으로 구성된다. Dual Ascent 과정은 Balakrishnan 등[5]이 전통적 망 설계문제에 적용하였던 Labeling Dual Ascent 방법을 수정하여 적용하였고, 실행가능해 발견과정은 쌍대변수 값을 이용하여 적절한 해를 찾는 과정으로 구성되었다.

제시된 해법의 효율성을 평가하기 위하여 임의로 만들어진 144개의 실험문제를 대상으로 평가한 결과 최대 5%내외의 %Gap과 Workstation에서 최대 10분 내외의 계산시간을 보여 기존의 유사한 연구결과와 비교하면 좋은 결과를 제시하였다. 특히, Hub 노드 설치를 위한 고정비용이 클수록 %Gap이 줄어들고 계산시간이 감소하는 것을 알 수 있었다. 현실적으로 통신망 또는 수송망의 설계시에 Hub 노드로 고려되는 중계장비 또는 중계지 시설의 설치비용이 매우 큰 점을 고려하면 현실적인 문제에서도 효과적으로 적용되어 좋은 실행가능해를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

본 연구에서 제시된 모형의 유용성과 해법의 효율성에 더하여 보다 현실적인 문제로 확장하기 위하여는 다음과 같은 분야로의 연구가 확장되어야 한다. 첫째, Hub 노드의 용량제약과 용량 확장문제이다. 본 연구에서는 Hub노드의 용량제약을 고려하지 않았으나, 다양한 설비용량을 갖는 Hub 노드의 선택 문제와 설비용량의 확장 시점 등에 대한 연구가 필요하다. 둘째, 통신망 문제에서 발생하는 생존도(Survivability) 문제이다. 이 경우에 아크의 장애(이용불능 상태) 뿐만아니라 Hub 노드의 장애도 고려하는 문제로 확장되어야 한다. 특히, Hub 노드의 장애를 고려하는 경우에는 다수 Hub 노드와의 연결제약을 갖는 것으로 본 연구에서 제시된 설계모형이 쉽게 확장될 수 있다. 이 같은 연구로 확장하는 데 있어, 본 연구 결과가 효과적으로 활용될 수 있을 것이다.

## 참 고 문 헌

- [1] 윤문길, 백영호, 김대근, “광가입자 선로망 구성을 위한 설계모형 조사연구”, 「경영과학」, 제11권, 제3호 (1994) pp.103-128.
- [2] 차동완, 윤문길, “Tree 구조를 갖는 중앙집중식 통신망 설계모형에 관한 연구”, 「한국경영과학회지」, 제15권, 제1호 (1991), pp.1-22.
- [3] 윤문길, 차동완, “SDH기반의 동기식 광전송망 설계체계에 관한 연구”, *Telecommunications Review*, Vol.9, No.2 (1999), pp.233-245.
- [4] Aykin, T. and G. F. Brown, “Interacting new facilities and location-allocation problems”, *Transportation Science*, Vol.26 (1992), pp.212-222.
- [5] Balakrishnan, A., T.L. Magnanti and R. T. Wong, “A dual-ascent procedure for large-scale uncapacitated network design”, *Operations Research*, Vol.37 (1989), pp.716-740.
- [6] Balakrishnan, A., T. L. Magnanti and P. Mirchandani, “A dual-based algorithm for multi-level network design”, *Management Science*, Vol.40 (1994), pp.567-581.
- [7] Balakrishnan, A., Magnanti, T. L., and Wong, R. T., “A decomposition algorithm for local access telecommunication network”, *Operations Research*, Vol.43 (1995), pp.43-57.
- [8] Ball, M. O., T. L. Magnanti, C. L. Monma and G. L. Nemhauser, Eds., *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Vol.7: Network Models, North-Holland, New York, 1995.
- [9] Billheimer, J. and P. Gray, “Network design with fixed and variable cost elements”, *Transportation Science*, Vol.7 (1973), pp.49-74.
- [10] Boorstyn, R. R. and H. Frank, “Large scale network topological optimization”, *IEEE Transactions on Communications*, Vol.25 (1977), pp.29-47.
- [11] Campbell, J. F., “Integer programming formulations of discrete hub location problems”, *European Journal of Operational Research*, Vol.72 (1994), pp.387-405.
- [12] Campbell, J. F., “A survey of hub location”, *Studies in Location Analysis*, Vol.6 (1994), pp.31-49.
- [13] Campbell, J. F., “Hub location and the p-hub median problem”, *Operations Research*, Vol.44 (1996), pp.923-935.
- [14] Chung, C. H., Y.S. Myung and D.W. Tcha, “Optimal design of a distributed network with a two-level hierarchical structure”, *European Journal of Operational Research*, Vol.62 (1992), pp.105-115.
- [15] Claus, A. and Kratzig, S. “Optimal planning of network structures within an exchange area”, *European Journal of Operational Research*, Vol.7 (1981), pp.67-76.
- [16] Crainic, T. G. and L. Delorme, “Dual-ascent procedures for multicommodity location-allocation problems with balancing requirements”, *Transportation Science*, Vol.27 (1993), pp.90-101.
- [17] Current, J. R., “The design of a hierarchical transportation network with transshipment facilities”, *Transportation Science*, Vol.22 (1988), pp.270-277.
- [18] Current, J. R. and H. Pirkul, “The hierarchical network design problem with transshipment facilities”, *European Journal of Operational Research*, Vol.52 (1991), pp.338-347.
- [19] Daskin, M. S., *Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Applications*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1995
- [20] Erlenkotter, D., “A dual-based procedure for uncapacitated facility location”, *Operations*



- Research*, Vol.26 (1978), pp.992-1009.
- [21] Gavish, B., "Topological design of computer communication networks - The overall design problem", *European Journal of Operational Research*, Vol.58 (1992), pp.149-172.
- [22] Gavish, B. and H. Pirkul, "Computer and database location in distributed computer systems", *IEEE Transactions on Computers*, Vol.35 (1986), pp.583-590.
- [23] Ghosh, A. and F. Harche, "Location-allocation models in the private sector", *Location Science*, Vol.1 (1993), pp.81-106.
- [24] Jaillet, P., G. Song and G. Yu, "Airline network design and hub location problems", *Location Science* Vol.4 (1996), pp.195-212.
- [25] Kim, J. G. and D.W. Tcha, "Optimal design of a two-level hierarchical network with tree-star configuration", *Computers & Industrial Engineering*, Vol.22 (1992), pp.273-281.
- [26] Kuby, M. J. and R. G. Gray, "The hub network design problem with stopovers and feeders: the case of Federal Express", *Transportation Research*, Vol.27A (1993), pp.1-12.
- [27] Lee, C. Y., "Application of cross decomposition algorithm to a location and allocation problem in distributed systems", *Computer Communications*, Vol.18 (1995), pp.367-377.
- [28] Lee, C. H., H.B. Ro and D.W. Tcha, "Topological design of a two-level network with ring-star configuration", *Computers & Operations Research*, Vol.20 (1993), pp.625-637.
- [29] Lee, Y. H., B. H. Lim and J. S. Park, "A hub location problem in designing digital data service networks: Lagrangean relaxation approach", *Location Science*, Vol.4 (1996), pp.185-194.
- [30] Leung, J. M. Y., T. L. Magnanti and V. Singhal, "Routing in point-to-point delivery systems: Formulations and solution heuristics", *Transportation Science*, Vol.24 (1990), pp.245-260.
- [31] Magnanti, T. L. and R. T. Wong, "Network design and transportation planning: models and algorithms", *Transportation Science*, Vol.18 (1984), pp.1-55.
- [32] Nemhauser, G. L. and L. A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1988.
- [33] O'Kelly, M. E., "The Location of interacting hub facilities", *Transportation Science*, Vol.20 (1986), pp.92-106.
- [34] O'Kelly, M. E., "Hub facility location with fixed costs", *Papers in Regional Science*, Vol.71 (1992), pp.293-306.
- [35] O'Kelly, M. E., D. Bryan, D. Skorin-Kapov and J. Skorin-Kapov, "Hub network design with single and multiple allocation: a computational study", *Location Science*, Vol.4 (1996), pp.125-138.
- [36] Pirkul, H. and V. Nagarajan, "Locating concentrators in centralized computer networks", *Annals of Operations Research*, Vol.36 (1992), pp.225-246.
- [37] Pirkul, H. and D.A. Shilling, "An efficient procedure for designing single allocation hub and spoke systems", *Management Science*, Vol.44 (1998) pp.235-242.
- [38] Powell, W. B. and Y. Sheffi, "Design and implementation of an interactive optimization system for network design in the motor carrier industry", *Operations Research*, Vol.37 (1989), pp.12-29.
- [39] Smith, K., M. Krishnamoorthy and M. Palaniswami, "Neural versus traditional approaches to the location of interacting hub facilities", *Location Science*, Vol.4 (1996), pp.125-138.

- [40] Srivastava, R. and W. C. Benton, "The location-routing problem: considerations in physical distribution system design", *Computers & Operations Research*, Vol.17 (1990), pp.427-435.
- [41] Tcha, D.W. and M.G. Yoon, "Conduit and cable installation for a centralized network with logical star-star topology", *IEEE Transactions on Communications*, Vol.45 (1995), pp.958-967.
- [42] Wong, R. T., "A dual ascent approach for Steiner tree problem on a directed graph", *Mathematical Programming*, Vol.28 (1984), pp.271-287.
- [43] Yoon, M. G., Baek, Y. H. and Tcha, D. W., "Optimal design of a distributed fiber transport network with hubbing topology", *European Journal of Operational Research*, Vol.104 (1998), pp.510-520.
- [44] Yoon, M. G. and Current, J. R., "Dual Based Heuristic for Hub Location and Network Design Problem", Working Paper, Dept. of Management Science, Ohio State University, 1996.