

## 여러 종류의 가공물과 배치 기계가 있는 재진입 흐름생산의 평균치분석

박영신\* · 전치혁\* · 김수영\*

Mean value analysis of re-entrant lines with batch  
machines processing multiclass jobs

Youngshin Park\*, Chi-Hyuck Jun\*, Sooyoung Kim\*

### ■ Abstract ■

We are concerned with estimating the average performance of a re-entrant line with single-job machines and batch machines. The system has multiclass jobs, which will be processed in predetermined routes. An analytical approach may be intractable since the system would not be modeled by product form queueing networks due to the inclusion of batch machines and the consideration of multiclass jobs which have different processing times. We propose an approximation method based on the Mean Value Analysis(MVA). Our method obtains the mean waiting time in each buffer of a workstation and the mean cycle time using the MVA and heuristics. Numerical experiments show that the errors of our method are within 5% compared with simulation.

### 1. 서 론

본 논문은 여러 종류의 가공물을 처리할 수 있는 기계로 구성된 재진입 흐름생산(re-entrant flow shop)에 배치 기계(batch machine)가 있는 경우, 각 종류의 가공물에 대한 생산 주기(cycle time)를

평균치분석(Mean Value Analysis, 이하 MVA라 한다)[29]을 이용하여 구하는 방법을 제시한다. 재진입 흐름생산은 가공물이 정해진 순서에 따라 작업을 하는 동안 같은 작업장을 여러 번 방문하게 되는 것을 의미한다[14]. 본 논문에서는 모든 작업장이 한 대의 기계로 구성되어 있다고 가정한다.

\* 포항공과대학교 기계산업공학부

각 종류의 가공물은 동일 작업장에서 처리되더라도 방문 차수와 종류에 따라 구분하여 작업되고, 서로 다른 버퍼에서 대기하는 것으로 모형화한다[20]. 이 버퍼들은 별도의 공간으로 구분될 필요는 없으며 논리적으로 구분하여 모형화한다. 재진입 흐름생산의 대표적인 예로는 반도체 공정에서 박막 공정을 생각할 수 있으며, 재작업이 필요한 경우도 재진입이라고 생각할 수 있다. 배치 기계는 반도체 공정의 확산(diffusion)공정이나 에칭(etching)공정과 같이 여러 개의 가공물을 한꺼번에 작업하는 설비로 같은 종류의 가공물을 묶어 작업한다. 배치 기계를 포함한 재진입 흐름생산에서 여러 종류의 가공물을 작업하는 경우의 예는 반도체 공정의 산화공정(oxidation), 확산 공정(diffusion), 화학기상 증착 공정(chemical vapor deposition)을 예로 들 수 있다. 이 경우 가공물은 웨이퍼(wafer)의 묶음인 카세트(cassette)이며, 여러 개의 카세트를 동시에 작업하는 산화공정의 설비가 배치 기계이다. 이런 설비에서 메모리의 용량이 다른 제품을 위한 웨이퍼가 담긴 카세트를 각각의 작업 조건과 작업 일정에 맞춰 번갈아 가며 작업하게 되는데, 메모리의 용량이나 목적에 따라 웨이퍼에 그려지는 회로의 모양이 달라져 작업 순서와 작업 조건 등이 달라지므로 다른 종류로 구분하게 된다. 이런 배치 기계로 구성된 작업장과 단일 작업 기계(한 개의 가공물씩 작업하는 기계)로 구성된 작업장이 함께 흐름생산 시스템을 구성하게 되면 승법형 대기행렬 네트워크로 모형화할 수 없다[2, 33]. 재진입 흐름생산 시스템에서 여러 종류의 가공물을 작업하는 경

우 같은 작업 순서로 작업되는 경우도 있지만[20] 본 논문에서는 여러 가지 흐름 라인이 있는 경우를 고려하기 위하여 각 종류의 가공물이 모두 다른 작업 순서에 따라 작업된다고 가정하여 모형화한다. 이와 같은 시스템의 성능 분석에는 모의실험(simulation)이 보편적으로 사용되나 많은 시간과 비용이 소요되는 단점이 있다. 본 연구에서는 MVA와 경험적 기법을 이용한 분석적인 방법을 제안하고 예제 시스템에 대한 분석 결과를 모의실험 결과와 비교한다.

재진입 흐름생산의 성능 분석에 관한 연구는 <표 1>에서, 대기행렬의 성능 분석에 평균치 분석을 사용한 연구는 <표 2>에서 보여준다.

재진입 라인에 대한 내용은 Kumar[14]에 자세하게 설명되어 있고, 이 시스템에 대한 일정계획 문제와 안정성에 대한 연구는 Kumar[15], Lu, Ramaswamy와 Kumar[21], Kumar[16], Kumar와 Meyn[18], Lu와 Kumar[20] 등에 의해 행해졌다. Chaudhry와 Templeton[6]은 배치 도착과 배치 작업에 대한 일반적인 이론을 정리하였고 Bailey[1], Neuts[23], Powell[27]은 배치 작업에 대한 여러 가지의 규칙과 조절 정책에 대해 연구하였다.

위와 같이 재진입 흐름, 여러 종류의 가공물, 배치 기계 등의 일부를 고려한 연구는 많으나 이들을 동시에 고려한 연구는 아직 없다. 본 연구는 배치 기계가 있는 재진입 흐름생산에 대한 Park, Kim과 Jun[24]의 연구를 확장하여 여러 가지 종류의 가공물이 서로 다른 작업 순서에 따라 작업되는 시스템을 고려한다. 이 시스템에 대한 설명과 예제 시스

<표 1> 재진입 흐름생산에 대한 분석

논 문	사용 방법	특 징
Kim, Schweitzer and Seidmann[13]	MVA	여러 종류의 가공물을 작업하는 Flexible Manufacturing System의 완성률과 각 기계의 이용률 산출방법 제시
Kumar[17]	Linear Programming	계획 정책의 안정성을 증명. 평균 체류 시간과 평균 완성률에 대한 한도 산출
Narahari and Khan[22]	MVA	가공물의 우선 순위가 다른 계획 정책을 사용할 때의 평균 생산 주기와 평균 완성률 산출
Dai, Yeh and Zhou[9]	QNET(Quality Network)	작업 부하 과정을 반사적 브라운 운동으로 모형화하여 각 작업장의 평균 작업 부하와 평균 체류 시간 산출

〈표 2〉 평균치 분석을 이용한 연구

논 문	대상 시스템	특 징
Reiser[28]	컴퓨터 통신 네트워크	작업 막힘을 방지하기 위하여 격자 흐름 제어를 사용하는 통신 네트워크를 폐쇄형 대기행렬 네트워크로 모형화하여 MVA 기법을 개발
Reiser and Lavenberg[29]	승법형 해를 갖는 폐쇄형 대기행렬 네트워크	정규화 상수와 승법항을 계산할 필요없이 반복적인 방법으로 평균 대기행렬의 크기, 평균 체류 시간, 완성을 구하는 방법을 제시
Bruell, Balbo and Afshari[5]	BCMP(Baskett, Chandy, Muntz and Palacios) 네트워크	BCMP의 승법형 대기행렬 네트워크를 풀기 위해 이전까지의 연구를 통합, 확장, 일반화시켜 MVA을 이용한 기법을 제시
Suri and Hildebrant[31]	FMS	복잡한 시스템의 생산율, 기계 사용을, 평균 대기 행렬의 크기를 쉽게 구하기 위해 MVAQ(MVA of Queues)를 개발
Hoyme, Bruell, Afshari and Kain[12]	컴퓨터 통신 네트워크	표준 MVA에 비해 저장공간과 계산량을 줄일 수 있는 Tree-MVA 알고리즘을 제시
Bondi and Chuang[4]	컴퓨터 시스템	반복적이 아닌 MVA 알고리즘과 동기화 오차, 체류시간의 오차, 선매(preemption)의 영향을 연구
Eager and Lipscomb [10]	컴퓨터 시스템	작업에 우선권을 부여하는 작업장이 있는 대기행렬 네트워크에 대한 MVA근사법을 제시
Pattipati, Kostreva and Teele[25]	폐쇄형 승법형 대기행렬 네트워크	완성률의 근사치를 구하기 위한 벡터 비선형 수식을 유도하여 완성률 근사치의 한계와 Schweitzer-Bard의 MVA근사법에 대한 여러 가지 성질을 증명
Conway, Silva and Lavenberg[7]	폐쇄형 승법형 대기행렬 네트워크	정규화 상수를 계산하는 RECAL(recursion by chain) 기법을 기초로 MVAC(Mean value analysis by chain)기법을 제시
Pattipati, Kostreva and Teele[26]	폐쇄형 승법형 대기행렬 네트워크	Schweitzer-Bard의 MVA근사법에 대해 해답의 존재, 유일함, 수렴성 연구
Zhuang and Hindi[34]	버퍼의 크기가 제한된 FMS	버퍼의 크기가 제한된 FMS를 중앙 처리 장치가 있는 대기행렬 네트워크로 모형화하여 MVA기법을 제시
Schmidt[30]	폐쇄형 대기행렬 네트워크	종류에 따라 작업시간이 다른 FCFS(First Come First Served) 대기행렬을 계산하는 수식 제안

템, 사용할 표기를 2절에서 설명하고, 3절에서는 본 논문에서 제안하는 MVA에 대해서 설명한다. 4절에서는 2절에서 설명한 예제 시스템에 대한 실험 결과를 모의실험 결과와 비교한다.

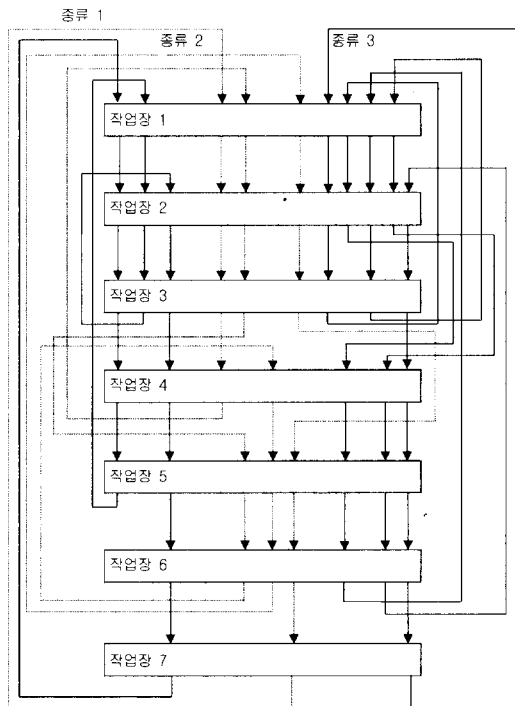
## 2. 여러 종류의 가공물을 작업하는 재진입 흐름생산

본 논문에서 고려하는 시스템은 여러 개의 작업장으로 구성되어 있고, 각 작업장은 단일 작업 기계 또는 배치 기계 한 대로 구성되어 있다. 각 작업장의 기계는 모두 여러 가지 종류의 가공물을 다 작업할 수 있는 것으로 가정한다. 각각의 가공물은 미리 정해진 작업 순서에 따라 작업되며 한 작업장에 한 번 이상 방문하게 되는 경우가 생긴다. 같은

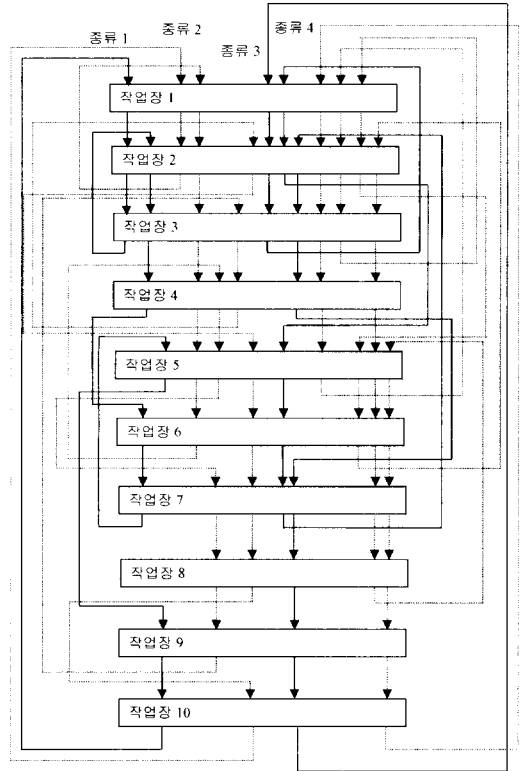
종류의 가공물이라도 한 작업장에 방문한 회수에 따라 작업이 진행된 단계(가공 상태)가 다르므로 별도로 분류되어 작업되며, 배치 기계의 경우 같은 종류, 같은 가공 상태의 가공물만을 모아서 배치를 만들어 작업한다. 따라서 한 작업장에 여러 개의 버퍼가 존재하여 종류와 가공 상태가 다른 가공물들을 분류하도록 모형화한다.

[그림 1]은 작업장이 7개이고 가공물의 종류가 세 가지인 시스템의 예다. 본 논문에서 연구하는 시스템은 흐름생산(flow shop)이므로 작업 순서가 미리 정해져 있다. [그림 1]의 경우 종류 1의 가공물은 작업장 1에서 첫번째 작업을 시작하고 작업장 2-3-4-5-1-2-3-2-3-4-5-6을 거쳐 작업장 7에서 마지막 작업을 하게 된다. 이런 시스템을 폐쇄형 대기행렬 네트워크로 모형화하여 분석한다. 따

라서 작업장 7에서 작업을 끝낸 가공물이 다시 작업장 1으로 들어오게 되고 시스템에 있는 가공물의 수는 일정하게 유지된다. [그림 2]는 작업장이 10개이고 가공물의 종류가 4가지인 예제 시스템이다. 이 시스템에서 작업장 3을 예로 들면 총 9개의 버퍼가 있다. 처음 2개는 종류 1의 가공물이 들어오는 버퍼이고, 다음 2개는 종류 2의 가공물, 다음 2개는 종류 3의 가공물, 나머지 3개는 종류 4의 가공물을 위한 버퍼이다. 즉 종류 1, 종류 2, 종류 3의 가공물들은 작업장 3를 두 번씩 방문하고 종류 4의 가공물은 세 번 방문함을 알 수 있다. 이 두 가지 예제 시스템을 대상으로 본 논문에서 제시한 기법을 적용시켜보고 그 결과와 모의실험에서 구해지는 결과를 비교하여 본 논문에서 제시하는 방법의 효과성을 보이고자 한다. 각 작업장에서의 작업 시간과 어떤 작업장이 배치 기계로 구성되는가 등의 실험 조건은 4절에서 설명한다.



[그림 1] 시스템 I : 7개의 작업장에서 3가지 가공물을 작업하는 시스템



[그림 2] 시스템 II : 10개의 작업장에서 4가지 가공물을 작업하는 시스템

본 논문에서 사용할 표기는 다음과 같다.

$i$  : 작업장 첨자,  $i = 1, \dots, m$

$j$  : 종류 첨자,  $j = 1, \dots, p$

$l$  : 방문 첨자,  $l = 1, \dots, v_{ij}$

$m$  : 작업장의 수

$p$  : 작업 종류(class)의 수

$v_{ij}$  : 작업장  $i$ 에 종류  $j$ 의 가공물이 방문하는 회수

$r_j$  : 시스템에 있는 전체 가공물 중 종류  $j$  가공물의 비율,  $\sum_{j=1}^p r_j = 1$

$k_j$  : 시스템에  $k$  개의 가공물이 있을 때 종류  $j$  가공물의 수,  $k_j = k \cdot r_j, \sum_{j=1}^p k_j = k$

$b_{ijl}$  :  $i$  작업장에 종류  $j$ 의 가공물이  $l$ 번째 방문하는 버퍼

$T_{ijl}$  :  $i$  작업장에  $l$ 번째 방문하는 종류  $j$ 의 가공물

- (또는 가공물의 배치)의 작업 시간의 평균
- $B_i$  :  $i$  작업장의 배치 크기( $B_i = 1$ 인 경우는 단일 작업 기계를 나타냄)
- $n_i$  :  $i$  작업장의 버퍼 수,  $n_i = \sum_{j=1}^p v_{ij}$
- $RB_{ij}$  : 버퍼  $b_{ij}$ 에서 배치를 만들지 못하고 남은 가공물의 수
- $K_j$  : 종류  $j$ 가공물 수의 절단시점
- $K$  : 시스템의 가공물 수의 절단시점
- $PB_j$  : 종류  $j$ 가공물의 배치 기계의 버퍼 수
- $PN_j$  : 시스템의 전체 버퍼 수 중 종류  $j$ 가공물에 해당하는 버퍼 수
- $s$  : 이동 평균의 범위(span of moving average)
- $N$  : 목표 재공
- $WFB_{ij}$  : 버퍼  $b_{ij}$ 에서 배치가 만들어지기까지의 시간
- $L_{ij}(k)$  : 시스템에  $k$ 개의 가공물이 있을 때,  $i$  작업장에  $l$ 번째 방문하는 종류  $j$  가공물의 평균 수
- $W_{ij}(k)$  : 시스템에  $k$ 개의 가공물이 있을 때,  $i$  작업장에  $l$ 번째 방문하는 종류  $j$  가공물의 평균 체류 시간(작업 시간 포함)
- $W^1_{ij}(k)$  : 배치 기계가 있는 작업장에 가공물이 도착해서 이미 배치가 만들어져서 기다리는 가공물들의 평균 작업시간
- $W^2_{ij}(k)$  : 배치 기계가 있는 작업장에 가공물이 도착해서 새로운 배치에 편성되어 작업되기까지의 평균 시간
- $W_j(k)$  : 시스템에  $k$ 개의 가공물이 있을 때 종류  $j$  가공물의 시스템에서의 평균 체류 시간
- $new\_W_j(k)$  : 이동 평균 보정에 의한  $W_j(k)$
- $\lambda_j(k)$  : 시스템에  $k$ 개의 가공물이 있을 때 종류  $j$  가공물의 완성률(throughput rate) 또는 도착률(arrival rate)

### 3. 평균치 분석(Mean Value Analysis)

작업의 흐름이 재진입이고 여러 가지 종류의 가공물을 작업하기 위해서 각 작업장에서 어느 한 작

업이 끝나고 다음 작업을 선택할 때, 어느 버퍼의 가공물을 먼저 할 것인가에 대한 정책이 있어야 한다. 본 논문에서는 작업의 종류와 몇 번째 공정인가에 상관없이 먼저 도착한 가공물을 먼저 작업하는 선착순(First Come First Served)정책을 사용한다. 이 정책이 안정적이라는 가정하에 각 종류의 가공물의 생산 주기를 구하는 MVA 알고리즘을 제시한다. MVA는 폐쇄형 시스템을 대상으로 시스템이 안정 상태(steady state)일 때, 다음의 두 가지 원칙에 따라 시스템의 인구(population)가  $k$ 일 때를 바탕으로  $k+1$ 일 때의 값을 구하는 반복적인 방법이다[29].

- 1) 도착 정리(arrival theorem) : 어떤 가공물이 작업장에 도착했을 때 관측된 기다리고 있는 가공물 수의 분포는, 시스템에 현재보다 하나 적은 가공물이 있을 때 밖에서 관찰한 분포와 같다[29].
- 2) Little의 공식[19] : 가공물이 시스템에 들어오는 도착률( $\lambda$ )과 시스템에서의 평균 체류 시간( $W$ )을 알면 현재 시스템에 있는 평균 가공물의 수( $L$ )를 계산할 수 있다( $L = \lambda W$ ).

위의 두 가지 원칙을 이용하여 시스템에  $k$ 개의 가공물이 있을 때의 평균 생산 주기(cycle time)와 평균 완성률을 이용하여 시스템에  $k+1$ 개의 가공물이 있을 때의 값들을 구하게 된다. 시스템의 생산 주기, 즉 한 개의 가공물이 투입되어서 작업을 끝내고 나올 때까지의 시간은 그 가공물이 거처온 모든 버퍼에서의 체류 시간을 더하여 구해진다. 본 논문에서는 각 작업장에서 가공물의 체류 시간을 가공물의 종류와 가공 상태에 따라 구분하여 구하기 위하여, 어떤 가공물이 작업장에서 보내는 시간을 버퍼에서의 체류 시간으로 표시한다. 이 버퍼에서의 체류 시간은 가공물이 작업되기 전에 대기하는 시간과 작업장에서 실제 작업하는 시간을 포함한 값이다.

#### 3.1 각 버퍼에서의 체류 시간

먼저 단일 작업 기계가 있는 작업장에서의 체류

시간을 구한다. 본 연구에서는 작업의 종류가 바뀔 때 작업장에서의 준비작업시간(setup time)은 고려하지 않는다. 단일 작업 기계에서 FCFS정책으로 작업할 때, 가공물이 어떤 버퍼에 들어가면 이미 기다리고 있는 가공물들의 작업시간만큼 기다린 후 작업할 수 있다. 그러므로 작업장의 모든 버퍼에 얼마만큼의 가공물이 기다리고 있는지를 계산하여 각 버퍼에 있는 가공물의 평균작업시간을 곱하면 이미 기다리고 있는 가공물의 총 작업시간이 계산되고, 그 값에 방금 버퍼에 도착한 가공물의 평균 작업시간을 더하면 단일 작업 기계에 종류  $j$ 의 가공물이  $l$ 번째 방문했을 때 걸리는 평균 체류 시간이 되고, 식은 다음과 같다.

$$W_{ij}(k) = \sum_{x=1}^p \sum_{y=1}^{v_y} L_{ixy}(k-1) \cdot T_{ixy} + T_{ij} \quad (1)$$

배치 기계가 있는 작업장에서는 여러 개의 가공물을 모아 배치를 만든 후 작업을 해야 하므로 배치를 만들 만한 수의 가공물이 각 버퍼에 있는지를 고려해야 한다. 작업 순서는 FCFS정책에 따라 먼저 만들어진 배치를 먼저 작업한다. 만약 작업장  $i$ 의 버퍼  $j$ 에 가공물이 도착한 순간 버퍼  $j$ 는 비어 있었고 버퍼  $j+1$ 에는  $B_i - 1$ 만큼의 가공물이 있었다면 다음 순간 버퍼  $j+1$ 에 들어온 가공물해 먼저 배치가 만들어질 수 있어 작업장  $i$ 측면에서는  $j+1$ 에서 만들어진 배치가 '먼저 들어온(First Come)' 가공물이 될 수 있다. 이 경우 가공물의 평균 체류 시간은 가공물이 버퍼에 도착할 때 이미 배치가 만들어져서 작업을 기다리는 가공물들의 평균 작업 시간  $W_{ij}^1$ 과, 도착한 가공물이 새로운 배치에 편성되어 작업되기까지의 평균 시간  $W_{ij}^2$ 로 나누어서 생각한다. 시스템에  $k$ 개의 가공물이 있을 때, 각 버퍼에서 기다리는 가공물의 평균 수는  $L_{ij}(k-1)$ 이므로 각 버퍼에서 만들어지는 배치의 평균 수는  $\lfloor L_{ij}(k-1)/B_i \rfloor$ 이다 ( $\lfloor x \rfloor$ 는  $x$ 를 넘지 않는 최대의 정수를 의미한다). 따라서 이미 배치가 만들어져서 작업을 기다리는 가공물들의 평균작업시간은 다음과 같이 계산된다.

$$W_{ij}^1(k) = \sum_{x=1}^p \sum_{y=1}^{v_y} \left\lfloor \frac{L_{ixy}(k-1)}{B_i} \right\rfloor \cdot T_{ixy} \quad (2)$$

버퍼  $b_{ij}$ 에서 배치를 만들지 못하고 남은 가공물의 수를  $RB_{ij}$ 이라고 한다면

$$RB_{ij} = L_{ij}(k-1) - \left\lfloor \frac{L_{ij}(k-1)}{B_i} \right\rfloor \cdot B_i \quad (3)$$

이고, 도착한 가공물이 배치에 포함되어 작업되기 위해서는 이미 기다리고 있던 가공물들 중 배치를 만들고 남은 가공물들과 합쳐져 배치가 만들어지거나, 만약에 배치를 만들기에 부족하면 다른 가공물이 올 때까지 기다려야 한다.  $RB_{ij} = B_i - 1$ 이면 방금 들어온 가공물이 들어오자마자 배치를 만들 수 있으므로 배치가 되기 위해 기다리는 시간은 없다. 그렇지 않은 경우 부족한 수만큼, 즉  $B_i - (RB_{ij} + 1)$ 개의 가공물이 더 들어올 때까지 기다려야 배치를 만들 수 있다. 따라서 배치가 만들어지기까지의 시간,  $WFB_{ij}$ 은 다음의 식으로 계산된다.

$$WFB_{ij} = \frac{\max[0, B_i - (RB_{ij} + 1)]}{\lambda_j(k-1)} \quad (4)$$

만약 다른 가공물들이 올 때까지 기다려야 한다면 그 동안에 다른 버퍼에도 가공물들이 도착하게 되고, 그 가공물들로 인해 다른 버퍼에서 또다른 배치들이 만들어진다면 FCFS정책에 의해 그 배치들의 작업시간도 포함해서 기다려야 한다. 따라서 도착한 가공물이 새로운 배치에 편성되어 작업되기까지의 시간은 배치가 되기까지의 시간  $WFB_{ij}$ 과  $WFB_{ij}$ 동안 같은 작업장의 다른 버퍼에서 만들어지는 배치들의 작업시간, 그리고 도착한 가공물이 포함된 배치의 작업시간의 합으로 계산된다.

$$W_{ij}^2(k) = WFB_{ij} + \sum_{x=1}^p \sum_{y=1}^{v_y} \left\lfloor \frac{WFB_{ij} \cdot \lambda_x(k-1) + RB_{ixy}}{B_i} \right\rfloor \cdot T_{ixy} + T_{ij} \quad (5)$$

배치 기계가 있는 작업장에 종류  $j$ 의 가공물이  $l$ 번째 방문했을 때 걸리는 시간은 위의 두 값을 더한

값이므로 이 경우의 평균 체류 시간은 다음과 같다.

$$W_{ij}(k) = W_{ij}^1(k) + W_{ij}^2(k) \quad (6)$$

$B_i = 1$  경우 식 (6)의 결과는 식 (1)의 결과와 같게 된다. 배치 기계가 있는 작업장의 경우 배치가 되기 위해서 기다리는 평균 시간  $WFB_{ij}$ , 식 (4), 를 표현하는데 도착률이 분모로 포함되어 있다. 도착률의 초기값은 0이므로 시스템에 있는 가공물의 수가 작을 때  $WFB_{ij}$ 의 값을 구할 수 없게 된다. 이 경우 기다리는 시간, 식 (4) 대신에 임의의 큰 값을 대입하거나 0을 대입하는 방법(이 방법을 총칭하여 BIG M방법이라 한다)을 사용한다. BIG M 방법에서 임의의 큰 값을 사용하는 것은 도착률이 낮을 때 기다리는 시간이 길다고 생각하는 것이고 0을 사용하는 것은 기다리는 시간이 없다고 생각하는 것인데 두 경우 모두 그 다음 단계, 즉  $k+1$ 일 때로 넘어가기 위한 방법일 뿐  $k$ 값이 커져서 BIG M방법을 사용하지 않아도 될 단계에 이르면 그 전에 사용했던 BIG M의 영향은 없어진다. 그래서 BIG M과 0중 임의로 값을 선택해서 적용한다.

### 3.2 시스템에서의 체류 시간

각 종류 가공물의 시스템에서의 체류 시간은 각 버퍼에서의 체류 시간의 합으로 생각할 수 있으므로 다음과 같이 구한다.

$$W_j(k) = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{v_{ij}} W_{ijl}(k); \quad j = 1, K, p \quad (7)$$

이 값을 구하면 Little의 공식을 사용하여 각 종류의 완성률과 각 버퍼의 평균 가공물 수를 구할 수 있다.

$$\lambda_j(k) = \frac{k_j}{W_j(k)} \quad (8)$$

$$L_{ijl}(k) = \lambda_j(k)W_{ijl}(k) \quad (9)$$

시스템이 안정 상태라고 가정하면 폐쇄형 시스템에서는 도착률과 완성률이 같고, 이 값은 모든

버퍼에의 도착률로도 생각할 수 있다. 따라서  $\lambda_j(k)$ 는 버퍼와 작업장을 구분하지 않고 사용되는 값이다. MVA를 이용하여 시스템에서의 체류 시간을 구하는 것은  $k$ 가 0일 때의 초기 조건을 기준으로  $k$ 를 1씩 증가시키며 정해진 재공(Work In Process)이 될 때까지 반복적으로 계산한다. 초기 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L_{ijl}(0) &= 0, W_{ijl}(0) = 0, \\ i &= 1, K, m; j = 1, K, p; l = 1, K, v_{ij} \\ \lambda_j(0) &= 0; \quad j = 1, K, p \end{aligned}$$

### 3.3 이동평균에 의한 보정

MVA는 초기값으로 0을 사용하여 시스템의 가공물 수(재공)를 1씩 증가시키며 계산하는데 본 연구에서는 가공물의 종류가 여러 가지여서 시스템의 전체 가공물 수를 일정한 비율로 나누어 종류별 가공물의 수를 정하였다. 이 때, 종류별 가공물의 수가 정수가 되지 않는 경우가 발생하는데 배치 작업장이 있는 경우 배치 크기가 정수여서 시스템의 전체 가공물 수에 따라 계산된 평균 체류 시간의 값이 불안정하게 커졌다 작아졌다 하는 모습을 보이게 된다. 이를 보완할 방법으로 본 연구에서는 이동 평균 방법의 사용을 제안한다. 이동 평균 방법은 다음 시점의 자료값을 예측하기 위해 현재까지의 자료를 이용하는 방법으로 처음부터 현재 시점까지 자료의 평균을 구하거나 최근 자료값의 평균을 구하여 다음 시점 자료값을 예측하는 방법이다[11]. 최근 자료값 몇 개를 사용하여 다음 시점의 자료값을 예측할 것인가가 이동 평균의 범위인데, 본 연구에서는 현재 시스템에 있는 가공물 수  $k$ 에 대한 체류시간을 식 (7)을 사용하여 구한 다음  $k - s + 1$ 일 때의 체류시간부터  $k$ 일 때의 체류시간까지 이동 평균의 범위  $s$ 만큼의 평균을 구하여  $k$ 에 대한 새로운 체류시간으로 정한다.

이동 평균 방법의 적용은  $k = s$ 일 때부터 가능하지만 시스템에 배치 기계가 포함된 경우,  $k$ 값이 작을 때 BIG M 방법을 사용하는 경우가 발생하는

테 이 구간에서의 값은 실제 체류 시간으로 생각할 수 없으므로 BIG M의 영향을 받을 가능성이 있는 구간을 제외하고 특정 시점부터 이동 평균을 사용한다. 이를 위한 시점을 '절단 시점'이라 하고, 가공물의 종류별 절단 시점  $K_j$ 와 전체적으로 적용하는 실제 절단 시점  $K$ 를 다음과 같이 산출한다.

$$K_j = (PB_j + s) \times 2 \quad (10)$$

$$K = p \cdot \max_j K_j \quad (11)$$

위에서  $PB_j$ 는 종류  $j$  가공물의 배치 기계의 버퍼 수이다. 즉, BIG M 방법의 영향을 없애기 위하여 절단 시점이 필요하므로 BIG M이 적용될 수 있는 회수로서 각 종류 가공물이 거쳐가는 버퍼 중 배치 기계에서의 총 버퍼 수를 계산하고, 이동 평균의 범위  $s$ 를 더한 값에 충분한 여유를 두기 위해 2배한 값으로 결정하였다. 이는 여러 실험적 경험에 의해 구한 값이다.  $K_j$ 는 각 종류에 해당하는 가공물 수이므로 시스템 전체의 가공물수로 환산하기 위하여  $K_j$ 중 가장 큰 값에 가공물의 종류 수를 곱한 값을 최종 절단 시점  $K$ 로 결정한다.  $K$ 보다 작은  $k$ 값에 대해서는 배치 기계의 영향으로 값을 구할 수 없는 경우로 생각한다. 이는 모의실험에서도 마찬가지로 값을 구할 수 없는 경우이다. 절단 시점 이후의  $k$ 에 대하여 다음의 식을 이용하여 새로운 평균 체류 시간을 계산한다.

$$new\_W_j(k) = \frac{1}{s} \cdot \sum_{l=k-s+1}^k W_j(l), \quad j = 1, \dots, p, k \geq K \quad (12)$$

### 3.4 평균 생산 주기

원래의 MVA는 시스템이 승법형 대기행렬 네트워크일 때 사용하는 방법인데 본 연구에서 고려하는 시스템은 승법형이 아니므로 값의 계산에 오차가 발생하게 된다. 본 논문의 대상 시스템이 승법형이 되지않는 가장 큰 이유는 배치 작업이다. 어떤 가공물을 작업할 때 단독으로 가공되지 못하고 다른 가공물과 함께 작업되어야 하는 조건때문에

승법형 해답을 얻을 수 없게 된다[33]. 위에서 설명한 MVA의 방법으로 각 종류의 생산 주기를 구하면 실제의 생산 주기보다 약간 작은 값을 얻게 된다. 이를 배치 기계의 영향으로 생각하여 분석하면, 한 개씩 작업하던 가공물들이 배치 기계에서 여러 개로 묶여져 작업하게 되고, 단일 작업 기계의 버퍼에 배치로 묶여져 한꺼번에 여러 개가 도착하여 차례를 기다리게 되면, 시스템 전체의 도착률과 각 버퍼에의 도착률이 같다고 가정하여 구한 값이 실제와 다른 값을 갖게 되기 때문이다. 배치 기계와 단일 작업 기계가 연결된 곳에서 도착률이 달라지게 되어 실제로보다 버퍼에서 짧게 기다리는 것으로 측정된다고 생각한다. 이는 가공물이 작업장에 도착하는 시간 분포의 분산이 달라짐에 의한 영향으로 생각할 수 있으며 특히 배치 기계가 많을 때 이런 현상이 두드러진다. 이를 보정하기 위한 경험적 기법으로 본 논문에서는 실험적으로 일정한 보정값을 구하여 MVA결과값에 일괄적으로 더하는 방식을 채택한다. 배치 기계의 영향으로 나타나는 차이이므로 가공물이 배치 기계에서 작업하는 비율에 따라 보정값을 구하고 전체적으로 배치 기계가 있는 작업장이 시스템에서 차지하는 비율이 작을 때는 차이가 크지 않으므로 일정한 값 이상일 때만 보정을 실시하는 것으로 한다. 배치 기계가 있는 작업장이 시스템에서 차지하는 비율을  $P$ 라고 할 때, 배치 작업장의 비율이  $P_0$ 이상일 때만 다음에 제안한 보정값을 더한다.

$$\text{보정값} = \begin{cases} 0 & \text{if } P < P_0 \\ W_j(K) \cdot PN_j \cdot PB_j & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

위의 식에서  $PN_j$ 는 시스템의 전체 버퍼 수 중 종류  $j$ 의 가공물에 해당되는 버퍼 수의 비율이고,  $PB_j$ 는 종류  $j$ 의 가공물이 거쳐가는 버퍼 중 배치 기계에 있는 버퍼 수로 절단 시점을 구할 때도 사용한 값이다. 따라서 식 (13)의 보정값은 절단 시점에서의 체류 시간의 일부분을 절단 시점 이후의 모든  $k$ 에 대한 체류 시간에 더한다는 의미이다. 여러 실험 결과를 통해서 적절한  $P_0$ 의 값으로 0.3을 제



안한다. 따라서 시스템의 재공이  $N$ 일 때 평균 생산 주기와 최종 완성률은 다음과 같이 구하게 된다.

$$\text{평균 생산 주기} = \text{new\_}W(N) + \text{보정값} \quad (14)$$

$$\text{완성률} = \frac{N}{\text{평균 생산 주기}} \quad (15)$$

지금까지 설명한 과정을 알고리즘으로 나타내면 다음과 같은 과정으로 표현된다.

단계 0 : 필요한 변수를 입력한다.

$$m, p, v_{ij}, N, s, r_j, T_{ij}, B_i$$

단계 1. 변수를 초기화시킨다.

$$L_{ij}(0)=0, W_{ij}(0)=0; i=1, \dots, v_{ij}, j=1, \dots, p, i=1, \dots, m$$

$$\lambda_j(0)=0; j=1, \dots, p$$

$$k = 0$$

$$k_j = k \cdot r_j$$

단계 2 :  $k$ 를 1 증가시킨다.

단계 3 : 식 (1)과 식 (6)을 사용하여 각 버퍼에서의 평균 체류 시간  $W_{ij}(k)$ 를 구하고, 식 (7)을 사용하여 각 종류의 시스템에서의 평균 체류 시간  $W_j(k)$ 를 구한다.

단계 4 :  $k$ 가 절단 시점  $K$ 보다 크면 식 (12)를 사용하여  $W_j(k)$ 를 수정한다.

$$W_j(k) = \text{new\_}W_j(k)$$

단계 5 : 식 (8)과 식 (9)를 사용하여 각 종류의 완성률,  $\lambda_j(k)$ 와 각 버퍼의 가공물 수,  $L_{ij}(k)$ 를 구한다.

단계 6 :  $k$ 가 목표 제공  $N$ 이면 단계 7로 가고, 아니면 단계 2로 되돌아간다.

단계 7 : 식 (14)를 사용하여 최종 평균 생산 주기를 구하고, 식 (15)를 사용하여 최종 완성률을 구한다.

## 4. 수치실험 및 비교 분석

본 논문에서 제시한 방법의 효과성을 보기 위해

서 [그림 1]의 시스템 I과 [그림 2]의 시스템 II에 대한 실험을 하였다. 시스템 I은 작업장이 7개이고, 3가지 종류의 가공물이 있고, 시스템 II는 작업장이 10개이고 4가지 종류의 가공물이 있는 재진입 흐름생산 시스템으로 임의로 만든 시스템이다. 시스템 I에 대해서 배치 기계가 있는 작업장의 수에 따라 5가지의 경우에 대해서 실험하였고, 시스템 II에 대해서는 3가지 경우에 대해서 실험하였다. 실험 결과의 효과성을 증명하기 위하여 모의실험을 실시하였는데 모의실험은 'Simul 8'[32]이라는 패키지를 사용하여 준비 기간(warm up period) 20,000시간이 지난 후 결과 수집 기간(result collection period) 50,000시간에 대한 결과를 구하였다. 폐쇄형으로 모형화된 시스템이므로 마지막 작업을 끝낸 가공물은 초기화되어 첫번째 작업을 위한 버퍼로 다시 들어가게 된다. 모의실험에서는 마지막 작업을 끝낸 가공물이 발생하면 새로운 가공물을 투입하도록 설정하여 시스템 내의 가공물 수를 일정하게 유지하였다. 모의실험에서는 비어있는 시스템에 작업을 투입하여 일정한 재공을 유지하며 작업될 때까지 어느 정도의 시간이 필요하고 시스템이 안정상태가 될 때까지 시간을 고려하여 충분한 여유를 두기 위해 준비 기간을 설정하였다. 이 모의실험에서의 시간 단위는 분으로 하였으므로 시스템이 안정상태에 이른 후 약 한달 정도의 결과를 수집하였다.

비교의 편의를 위하여 각 작업장에서의 작업시간은 상수로 설정하여 모든 종류와 가공 상태에 대해 동일하다고 가정하였고, 시스템에 있는 가공물 중 각 종류의 비율은 시스템 전체의 버퍼 수 중 각 종류의 버퍼 수가 차지하는 비율로 결정하였다. MVA방법으로는 시스템의 재공이 정수가 아닐 때에도 결과를 얻을 수 있지만 모의실험에서는 정수일 때에만 결과를 얻을 수 있으므로  $r_j$ 의 값에 따라 종류별 재공이 정수가 되는  $k$ 에 대해서 모의실험을 실시하여 MVA방법의 결과와 비교하였다. 시스템의 목표 재공은 1000으로 설정해 재공이 1000일 때의 생산 주기, 완성률 등의 값을 구하는 것으로

로 설정하였지만 MVA방법으로는 절단 시점이후 부터 목표 제공까지 모든  $k$ 에 대한 결과값을 얻을 수 있고 모의실험은  $r_j$ 의 값에 따라 종류별 재공이 정수가 될 때의  $k$ 값에 대해서 개별적으로 실험해야 한다. BIG M 방법으로 0을 선택하였다. 3.3절에서 설명한 이동 평균 방법을 사용하기 위한 이동 평균의 범위,  $s$ 의 값으로는 5를 사용하였다. MVA에 의한 결과와 모의실험에 의한 결과의 차이는 다음의 식을 이용하여 계산하였다.

$$\text{상대오차} = \frac{|(\text{모의실험의 생산주기}) - (\text{MVA의 생산주기})|}{\text{모의실험의 생산주기}} \times 100(\%) \quad (16)$$

#### 4.1 시스템 I의 실험

시스템 I의 전체 버퍼 수는 54개이고 각 종류의 버퍼 수는 14, 18, 22개이다. 따라서 시스템 I의  $r_1 = 14/54 = 0.2593$ ,  $r_2 = 18/54 = 0.3333$ ,  $r_3 = 22/54 = 0.4074$ 이다. <표 3>은 시스템 I의 작업 조건으로 각 작업장의 작업 시간과 각 종류의 방문 횟수를 보여준다. 2열은 각 작업장이 단일 작업 기계로 구성되어 있을 때의 작업 시간이고, 3열은 배치 기계로 구성되어 있을 때의 작업 시간과 배치 크기를 나타낸다. 괄호 안의 수가 각 작업장에서의 배치 크기이다.

<표 3> 시스템 I의 작업 조건

	작업 시간		방문 회수		
	단일 작업	배치 작업	종류 1	종류 2	종류 3
작업장 1	1.7		2	3	4
작업장 2	0.9	1.9(5)	3	3	5
작업장 3	1.4	2.5(2)	3	3	3
작업장 4	2.5	4.3(5)	2	2	3
작업장 5	3	4(4)	2	3	3
작업장 6	0.8		1	3	3
작업장 7	1.2		1	1	1

시스템 I에서 5가지 경우(실험 1-0부터 실험 1-4)에 대해서 실험하였는데 각 경우의 배치 작업장의 수와 어느 작업장이 배치 기계로 구성되어 있는가, 그리고 각 가공물 종류의 절단 시점과 실제

로 적용된 절단 시점을 <표 4>에서 보여준다.

<표 4> 시스템 I의 실험 조건

	배치 작업장의 수 (배치 작업장 번호)	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K$
실험 1-0	0	0	0	0	0
실험 1-1	1(3)	16	16	16	48
실험 1-2	2(3, 5)	20	22	22	66
실험 1-3	3(2, 3, 5)	26	28	32	96
실험 1-4	4(2, 3, 4, 5)	30	32	38	114

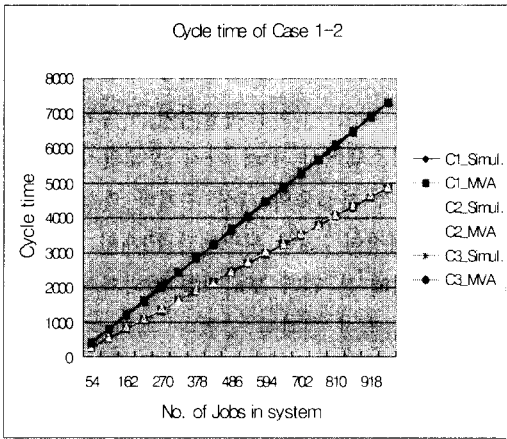
실험 1-0의 경우 배치 작업장의 수가 0이므로 모든 작업장이 단일 작업 기계로 구성된 경우이다. 여러 종류의 가공물을 가진 재진입 흐름생산 시스템에서 FCFS 정책으로 작업을 할 때 수식 (1)이 어느 정도의 정확성을 가지고 있는가를 알기 위해서 실험한 경우이다. 이 경우에 배치 작업장이 없으므로 이동 평균의 사용이나 보정할 필요 없이 순수하게 MVA의 수식에 의해서만 시스템에서의 생산 주기를 구하게 된다. 실험 1-1과 실험 1-2의 경우는 배치 작업장이 각각 1개와 2개씩 이므로 배치 기계가 전체 시스템에서 차지하는 비율이 30%이하이다. 본 연구에서는 배치 기계의 비율이 30%이상인 경우에 3.4절의 보정을 실시하므로 이 두 경우에는 3.3절의 이동 평균 방법만 적용된다. 나머지 두 경우 실험 1-3, 실험 1-4는 배치 기계의 비율이 30%이상이므로 보정을 실시한다. 절단 시점을 구하는 방법은 각 종류의 가공물이 배치 기계의 버퍼를 몇 군데 거쳐가게 되는지를 센 다음 이동 평균의 범위를 더해서 2배하면 된다. 예를 들어 실험 1-4의 경우, 종류 3의 가공물은 작업장 2에서 5회, 작업장 3, 4, 5에서 각각 3회씩 작업한다. 그러므로 배치 기계를 거쳐가는 회수는 총 14회이다. 이 경우의 절단 시점은  $(14 + 5) \times 2 = 38$ 이다. 같은 방식으로 다른 종류에 대해서도 절단 시점을 결정하고 그 중 가장 큰 값을 택해서 가공물 종류의 수를 곱한 후 전체적으로 적용한다.

<표 5>는 각 경우에 대해서 식 (16)에 의한 모의실험과 비교한 상대 오차를 보여준다. 실험 1-0의 경우는 단일 작업 기계만으로 구성된 재진입 호

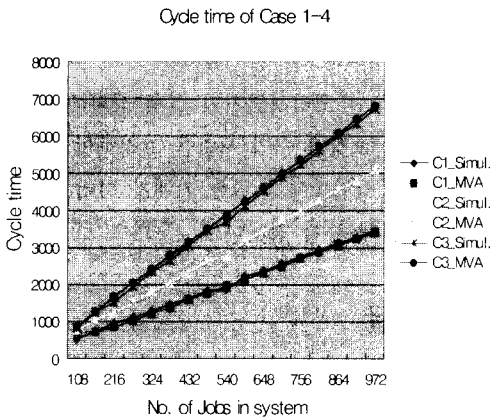
름생산 시스템에서 여러 종류의 가공물을 작업할 때의 생산 주기를 MVA를 이용하여 구한 결과인데, 3가지 종류에 대한 결과 모두 모의실험 결과와 매우 근접한 결과를 보였다.

<표 5> 시스템 I의 실험 결과

실험	종류 1	종류 2	종류 3
실험 1-0	0.15%	0.30%	0.23%
실험 1-1	1.55%	0.61%	0.75%
실험 1-2	1.95%	0.78%	1.42%
실험 1-3	4.46%	1.73%	1.04%
실험 1-4	3.33%	3.26%	3.14%



[그림 3] 실험 1-2의 생산 주기 비교



[그림 4] 실험 1-4의 생산 주기 비교

다음 [그림 3]과 [그림 4]는 실험 1-2와 실험 1-4의 생산 주기에 관한 모의실험과의 비교 결과를 보여준다. [그림 3]의 그래프에서 종류 1과 종류 2에 대한 결과가 거의 겹쳐서 한 개의 선처럼 보이고 종류 3에 대한 결과도 또한 모의실험과의 결과와 거의 일치함을 알 수 있다. [그림 4]에서는 각각의 종류 별로 구분이 되어지고 모의실험 결과와 본 연구에서 제안한 방법의 결과가 거의 유사함을 볼 수 있다.

#### 4.2 시스템 II의 실험

시스템 II의 실험에서 모의실험 실행 시간, 이동 평균의 범위, BIG M의 값, 재공 등의 실험 조건은 시스템 I의 실험에서와 같다. 시스템 II의 전체 버퍼 수는 72개이고, 각 종류의 버퍼 수는 11, 21, 15, 25개이다. 따라서 시스템 II의  $r_1 = 11/72 = 0.1528$ ,  $r_2 = 0.2917$ ,  $r_3 = 0.2083$ ,  $r_4 = 0.3472$ 이다. <표 6>은 시스템 II의 작업 조건을 보여준다. 이 시스템에서의 작업 시간도 상수로 실험하였으며 2열의 작업 시간은 각 작업장이 단일 작업 기계로 구성되어 있을 때의 작업 시간이다. 배치 기계로 바꾸어서 실험할 때에는 이 시간에 배치 크기를 곱한 값을 배치 기계에서의 작업 시간으로 하였다. 3, 4, 5, 6열은 각 종류가 각 작업장에 몇 번씩 방문하는지를 보여준다.

<표 6> 시스템 II의 작업 시간과 종류별 방문 회수

	작업시간	방문 회수			
		종류1	종류2	종류3	종류4
작업장 1	0.5	1	2	2	3
작업장 2	0.7	2	3	3	4
작업장 3	1.2	2	2	2	3
작업장 4	3	1	3	1	2
작업장 5	0.8	1	3	1	4
작업장 6	0.5	1	2	1	3
작업장 7	1	1	2	2	2
작업장 8	1.7	0	2	1	2
작업장 9	0.3	1	1	1	1
작업장 10	0.9	1	1	1	1

이 시스템에 대해서는 3가지 경우에 대해서 실

험하였는데 실험 조건은 <표 7>에서 각 종류의 절단 시점과 함께 보여준다.

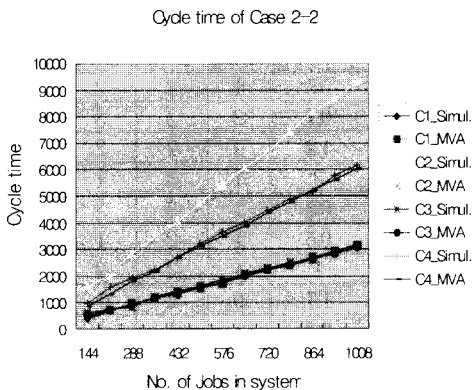
<표 7> 시스템 II의 실험 조건

	배치 작업장 번호 (배치 크기)	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K$
실험 2-0	0	0	0	0	0	0
실험 2-1	2(5), 6(3)	16	20	18	24	96
실험 2-2	2(5), 6(3), 7(4)	18	24	22	28	112

<표 7>의 2열에 어떤 작업장이 배치 기계로 구성되어 있는지를 나타내었고 괄호 안의 수는 배치 크기를 의미한다. 절단 시점을 구하는 방법은 시스템 I에서의 설명과 같다. 실험 2-1은 배치 기계로 구성된 작업장이 2개인 경우이고 작업장 2와 작업장 6이 배치 기계이다. 전체 작업장 수가 10개이므로 이 경우에는 배치 기계가 차지하는 비율이 30% 미만이어서 보정을 실시하지 않는다. 그러나 실험 2-2는 작업장 2, 작업장 6, 작업장 7이 배치 기계로 구성된 작업장이어서 배치 기계가 차지하는 비율이 30%이므로 보정을 실시한다.

<표 8> 시스템 II의 실험 결과

실험	종류 1	종류 2	종류 3	종류 4
실험2-0	0.05%	0.13%	0.28%	0.08%
실험2-1	4.90%	5.47%	2.32%	4.96%
실험2-2	4.71%	3.83%	4.76%	4.14%



[그림 5] 실험 2-2의 생산 주기 비교

각 경우에 대해서 식 (16)을 이용한 시뮬레이션과 비교한 상대 오차는 <표 8>에서 보여준다. 이 시스템에서도 모든 작업장이 단일 작업 기계일 때 모의실험과의 결과와 매우 근접함을 알 수 있다.

다음 [그림 5]는 실험 2-2의 생산 주기에 대해 모의실험과 비교한 결과를 그래프로 보여준다.

[그림 5]에서도 종류 1과 종류 3의 결과가 유사해 거의 한 개의 선처럼 보인다. 종류 2와 종류 4에 대한 결과도 모의실험과 거의 일치한다.

## 5. 결 론

MVA에 근거한 분석적인 방법을 사용하여 배치 기계와 단일 작업 기계가 혼합되어 구성된 재진입 흐름생산 시스템에서 여러 가지 종류의 가공물을 작업할 때, 각 가공물의 생산 주기와 완성률을 구하였다. 작업장이 7개인 시스템과 10개인 시스템에 대하여 실험해 본 결과 모의실험 결과와의 차이가 5%내외인 근접한 결과를 얻었다. 배치 기계가 없는 경우에는 차이가 1%이내로 매우 근접한 결과임을 알 수 있다. 본 논문에서는 이상적인 상황에서 분석값을 구하는 방법을 제시하였으나 복잡한 모의실험의 과정 없이 생산 주기를 알 수 있는 대안으로 유용할 것이다. 추후 연구로는 가정이 좀 더 완화된 상황에서의 분석적인 방법을 연구할 필요가 있을 것이다. 본 연구에서는 기계 고장이 전혀 없는 경우만 고려하였지만 실제 상황에 근접하기 위해서는 고장과 수리 시간을 고려해야 할 것이다. 또한 각 작업장에 동일한 기계가 여러 대 있는 경우도 고려해야 할 것이다.

## 감사의 글

두 심사위원님의 상세한 지적으로 본 논문의 구성과 표현방법에 큰 향상이 있었음을 진심으로 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

- [1] Bailey, N.T.J., "On queueing process with bulk service", *Journal of the Royal statistics Society*, B16 (1954), pp.80-87.
- [2] Baskett, F., K.M. Chandy, R.R. Muntz and F.G. Palacios, "Open, Closed, and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers", *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol.22, No.2 (1975), pp.248-260.
- [3] Bertsimas, D. and M. Georgia, "Multiclass queueing systems in heavy traffic: An asymptotic approach based on distributional and conservation laws", *Operations Research*, Vol. 45, No.3 (1997), pp.470-487.
- [4] Bondi, A.B. and Y. Chuang, "A New MVA-Based Approximation for Closed Queueing Networks with a Preemptive Priority Server", *Performance Evaluation*, Vol.8 (1988), pp.195-221.
- [5] Bruell, S.C., G. Balbo and P.V. Afshari, "Mean Value Analysis of Mixed, Multiple Class BCMP Networks with Load Dependent Service Stations", *Performance Evaluation*, Vol.4 (1984), pp.241-260.
- [6] Chaudhry, M.L. and J.G.C. Templeton, *A First Course in Bulk Queues*, Wiley, New York, 1983.
- [7] Conway, A.E., E.S.E. Silva and S.S. Lavenberg, "Mean value analysis by chain of product form queueing networks", *IEEE Transactions on computers*, Vol.38, No.3 (1989), pp.432-442.
- [8] Conway, A.E. and N.D. Georganas, "RECAL A new efficient algorithm for the exact analysis of multiple-chain closed queueing networks", *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol.33 (1986), pp.768-791.
- [9] Dai, J.G., D.H. Yeh and C. Zhou, "The qnet method for re-entrant queueing networks with priority disciplines", *Operations Research*, Vol. 45, No.4 (1997), pp.610-623.
- [10] Eager, D.L. and J.N. Lipscomb, "The AMVA Priority Approximation", *Performance Evaluation*, Vol.8 (1988), pp.173-193.
- [11] Elsayed, E.A. and T.O. Boucher, *Analysis and control of production systems*, Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [12] Hoyme, K.P., S.C. Bruell, P.V. Afshari and R.Y. Kain, "A Tree-Structured Mean Value Analysis Algorithm", *ACM Transactions on Computer Systems*, Vol.4, No.2 (1986), pp.178-185.
- [13] Kim, J., P.J. Schweitzer and A. Seidmann, "Analysis of Flexible manufacturing Systems with Distinct Repeated Visits: DrQ", *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, Vol.7, No.4 (1995), pp.319-338.
- [14] Kumar, P.R., "Re-entrant lines", *Queueing Systems: Theory and Applications*, Vol.13 (1993), pp.87-110.
- [15] Kumar, P.R., "Scheduling manufacturing systems of re-entrant lines", *Stochastic Modeling and Analysis of Manufacturing Systems*, Ch.1, pp.325-360, David D.Yao (ed.), Springer-Verlag, New York, 1994.
- [16] Kumar, P.R., "Scheduling queueing networks: stability, performance analysis and design", *Stochastic Networks, IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, Frank P. Kelly and Ruth William (ed.), Vol.71, pp.21-70, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [17] Kumar, P.R., "A tutorial on some new methods for performance evaluation of queueing networks", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Vol.13, No.6 (1995), pp.970-980.

- [18] Kumar, P.R. and S.P. Meyn, "Stability of queueing networks and scheduling policies", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.40 (1995), pp.251-260.
- [19] Little, J.D.C., "A proof for the queueing formula:  $L = \lambda W$ ", *Operations Research*, Vol.9 (1961), pp.383-387.
- [20] Lu, S.H. and P.R. Kumar, "Distributed scheduling based on due dates and buffer priorities", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.36 (1991), pp.1406-1416.
- [21] Lu, S.H., D. Ramaswamy and P.R. Kumar, "Efficient scheduling policies to reduce mean and variance of cycle-time in semiconductor manufacturing plants", *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, Vol.7, No.3 (1994), pp.374-385.
- [22] Narahari, Y. and L.M. Khan, "Performance analysis of scheduling policies in re-entrant manufacturing systems", *Computers and Operations Research*, Vol.23, No.1 (1996), pp. 37-51.
- [23] Neuts, M.F., "A general class of bulk queues with poisson input", *Annual Mathematical Statistics*, Vol.38 (1967), pp.757-770.
- [24] Park, Y., S. Kim and C.H. Jun, "Performance analysis of re-entrant flow shop with single-job and batch machines using mean value analysis", To appear in *Production Planning and Control*.
- [25] Pattipati, K.R., M.M. Kostreva and J.L. Teele, "On the properties of approximate mean value analysis algorithms for queueing networks", *Performance Evaluation Review*, Vol.16 (1988), pp.244-252.
- [26] Pattipati, K.R., M.M. Kostreva and J.L. Teele, "Approximate Mean Value Analysis Algorithms for Queueing Networks: Existence, Uniqueness, and Convergence Results", *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol.37, No.3 (1990), pp.643-673.
- [27] Powell, W.B., "The bulk service queue with a general control strategy: Theoretical analysis and a new computational procedure", *Operations Research*, Vol.34 (1986), pp.267-275.
- [28] Reiser, M., "A Queueing Network Analysis of Computer Communication Networks with Window Flow Control", *IEEE Transactions on Communications*, Vol.27 (1979), pp.1199-1209.
- [29] Reiser, M. and S.S. Lavenberg, "Mean-value analysis of closed multichain queueing networks", *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol.27, No.2 (1980), pp.313-322.
- [30] Schmidt, R., "An approximate MVA algorithm for exponential, class-dependent multiple servers", *Performance Evaluation*, Vol.29 (1997), pp.245-254.
- [31] Suri, R. and R.R. Hildebrant, "Modeling Flexible Manufacturing Systems Using Mean-Value Analysis", *Journal of Manufacturing Systems*, Vol.3, No.1 (1984), pp.27-38.
- [32] Visual Thinking International Ltd., *Simul8-Manual and Simulation Guide*, Glasgow, 1993.
- [33] Viswanadham, N. and Y. Narahari, *Performance modeling of automated manufacturing systems*, Prentice Hall, New Jersey, 1992.
- [34] Zhuang, L. and K.S. Hindi, "Mean value analysis for multiclass closed queueing network models of flexible manufacturing systems with limited buffers", *European Journal of Operational Research*, Vol.46 (1990), pp.366-379.