

좌굴 하중을 고려한 프레임 구조물의 최적 설계

한석영*, 진경욱**

Optimal Design of Frame Structure Considering Buckling Load

Seog-Young Han*, Kyoung-Wook Jin**

Abstract

In this paper, the comparison of the first order approximation schemes such as SLP (sequential linear programming), CONLIN (convex linearization), MMA(method of moving asymptotes) and the second order approximation scheme, SQP(sequential quadratic programming) was accomplished for optimization of nonlinear structures. It was found that MMA and SQP are the most efficient methods for optimization. But the number of function call of SQP is much more than that of MMA. Therefore, when it is considered with the expense of computation, MMA is more efficient than SQP. In order to examine the efficiency of MMA for complex optimization problem, it was applied to the helicopter tail boom considering column buckling and local wall buckling constraints. It is concluded that MMA can be a very efficient approximation scheme from simple problems to complex problems.

Key Words : MMA(이동점근법), Optimal Design(최적설계), Frame Structure(프레임 구조물), Dual Function(이원 함수), Move Limits(이동 한계), Buckling(좌굴)

1. 서 론

1960년 Schmit⁽¹⁾가 구조물 최적설계에 수치 최적화 기법(numerical optimization techniques)을 도입한 이래, 지난 20여년 동안 최적설계 분야의 연구는 새로운 알고리즘 개발, 컴퓨터 계산 성능 향상 및 유한 요소법의 발전으로 놀라운 발전을 거듭하여 왔다.⁽²⁻⁶⁾

구조물의 수치 최적화는 구조물의 재료, 단면적 등을 설

계 변수로 하여 응력, 변위 등의 구속조건을 만족하면서 구조물을 경량화한다. 구속조건은 일반적으로 음함수(implicit function)이므로 유한 요소 프로그램으로 얻은 정보를 사용하여 연속적인 양함수(explicit function)로 만든다.⁽⁷⁾ 이 과정에서 설계자는 계산 비용과 시간을 절약하기 위해 테일러 전개 (Taylor series expansion)의 1차 또는 2차 식을 사용하여 근사 (approximation) 한다.

이러한 원리로 개발된 1차 근사 기법에는 연속 선형 근

* 한양대학교 철강공정 및 용융연구소
** 한양대학원 자동차공학과

사 계획법(SLP)⁽⁶⁾, 블록 선형 근사법(CONLIN)⁽⁹⁾ 및 이동점근법(MMA)⁽¹⁰⁾ 등이 있다. SLP는 테일러 전개 of 1차식을 사용하여 비선형 목적 함수와 구속조건 함수를 근사시킨 일련의 선형 문제를 생성한다. CONLIN은 1차 미분값이 양수인 경우에는 변수를 그대로, 음수인 경우에는 변수의 역수를 사용하는 기법으로 단면적이 설계 변수인 구조물에 효과적으로 사용될 수 있다. MMA는 이동점근선의 개념을 도입하여 원 함수(primal function) 변수와 라그랑지 변수(Lagrange multiplier)와의 관계를 양함수로 명확히 표현하여 이원 함수(dual function)를 적용하여 최적화한다.

2차 근사 기법으로는 테일러 전개 of 2차식을 이용하여 2차 미분까지의 정보를 사용하여 근사하는 연속 이차 근사 계획법(SQP)⁽¹¹⁾이 있다.

본 연구에서는 이러한 1차 및 2차 근사 기법을 기어 갑속기와 용접부의 설계에 적용하여 가장 효율적인 기법을 조사하였으며, 그 기법을 상대적으로 설계변수가 많은 다수 하중을 받는 프레임 구조물인 헬리콥터 꼬리날개^(12,13)에 적용하여 그 기법의 효율성을 검증하였다.

2. 1차 및 2차 근사기법

2.1 연속 선형 근사 계획법(SLP)

1차 근사 기법 중 가장 먼저 제안된 SLP는 비선형인 원 함수를 각 반복 과정마다 테일러 1차 전개를 사용하여 선형화한다.

$$\tilde{f}^{(k)} = f_0^{(k)} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x - x_i^{(k)}) \quad (1)$$

비선형 목적 함수와 구속조건 함수는, 식 (1)과 같은 근사 식을 사용하여 각각의 선형화 문제(LP)를 생성한다. 근사된 선형화 문제는 심플렉스 방법(simplex method)을 적용, 최적화 한 뒤 수렴 여부를 결정한다. 즉, 수렴조건이 만족되지 않으면 새로 찾은 설계점을 사용하여 위의 식을 이용하여 다시 연속적인 선형 근사를 수행한다.

SLP를 블록 함수인 문제에 적용하면, 선형화 된 구속조건은 항상 유용 영역(feasible region)의 바깥쪽에 위치하는 특징을 갖는다.

2.2 블록 선형 근사법(CONLIN)

SLP와 함께 1차 근사 기법의 하나인 CONLIN은 설계 변수의 역수가 사용되는 최적화 문제에 적용이 용이하며,

근사에 필요한 정보로 SLP와 동일하게 현 설계점에서의 원 함수 값 및 1차 도함수 값을 요구한다.

CONLIN은 1차 도함수 값의 부호에 따라 혼합된 변수(direct, reciprocal variable)들의 조합으로 블록이고, 변수 분리된 식 (2)와 같은 함수를 도출해 낸다.

$$\tilde{f}^{(k)} = f_0^{(k)} + \sum_+ \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - x_i^{(k)}) - \sum_- (x_i^{(k)})^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^{(k)}} \right) \quad (2)$$

여기서, 기호 \sum_+ , \sum_- 의 의미는 1차 도함수의 값이 각각 양수 또는 음수인 설계변수 부분의 합을 의미한다. 식 (2)와 같이 근사된 목적 함수와 구속조건 함수는 2.3절에서 설명할 이원 함수를 적용하여 최적화 과정을 수행한다.

2.3 이동점근법(MMA)

MMA는 각 단계에서 엄격한 블록 함수를 생성하며 수렴 속도를 높이기 위해 이동점근선(moving asymptotes)을 도입한다. 이동점근선 $L_j^{(k)}$, $U_j^{(k)}$ 에 대한 규정은 아직 정립되지 않았지만 일반적으로 다음과 같다.

(a) 반복 횟수가 $K = 0$ 또는 1인 경우

$$\begin{cases} L_i^{(k)} = x_i^{(k)} - (\bar{x}_i - \underline{x}_i) \\ U_i^{(k)} = x_i^{(k)} + (\bar{x}_i - \underline{x}_i) \end{cases} \quad (3)$$

(b) $k \geq 2$ 인 경우

① $\frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}} < 0$ 인 경우

$$\begin{cases} L_j^k = x_j^k - s(x_j^{k-1} - L_j^{k-1}) \\ U_j^k = x_j^k + s(U_j^{k-1} - x_j^{k-1}) \end{cases} \quad (4)$$

② $\frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}} \geq 0$ 인 경우

$$\begin{cases} L_j^k = x_j^k - (x_j^{k-1} - L_j^{k-1})/s \\ U_j^k = x_j^k + (U_j^{k-1} - x_j^{k-1})/s \end{cases} \quad (5)$$

MMA에 의해 근사하면 다음과 같다.

$$\tilde{f}^{(k)} = f_i^0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{0j}}{U_i^{(k)} - x_i} + \frac{q_{0j}}{x_i - L_i^{(k)}} \right) \quad (6)$$

$$p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} (U_i^{(k)} - x_i^{(k)})^2 \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} & , \text{if } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} > 0 \\ 0 & , \text{if } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0 & , \text{if } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \geq 0 \\ -(x_i^{(k)} - L_i^{(k)})^2 \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} & , \text{if } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$r_i^{(k)} = f(x_i) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_i^{(k)} - x_i^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_i^{(k)} - L_i^{(k)}} \right) \quad (9)$$

이동점근선이 $L_j^{(k)} = -\infty, U_j^{(k)} = +\infty$ 이면 SLP가 되고, $L_j^{(k)} = 0, U_j^{(k)} = +\infty$ 이면 CONLIN이 되므로, 앞의 두 방법은 MMA의 특별한 경우가 된다.

MMA로 근사한 식은 볼록 함수이므로 최적화를 위해 이원 함수를 적용한다.

$$\begin{aligned} L &= \left(\tilde{f}_0 + \sum_i \tilde{f}_i \right) + \sum_j \lambda_j \left(\tilde{g}_{0j} + \sum_i \tilde{g}_{ij} \right) \\ &= r_o - \lambda^T b + \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{0i} + \lambda^T p_i}{U_i - x_i} + \frac{q_{0i} + \lambda^T q_i}{x_i - L_i} \right) \quad (10) \\ &= r_o - \lambda^T b + \sum_{i=1}^n l_i(x_i, \lambda) \end{aligned}$$

여기서, λ_j 는 라그랑지 변수이며, MMA에 이원 함수를 적용할 경우 x_i 를 λ_j 의 양함수로 표현할 수 있다.

$$x_i(\lambda_j) = \frac{(p_{0i} + \lambda^T p_i)^{1/2} L_i + (q_{0i} + \lambda^T q_i)^{1/2} U_i}{(p_{0i} + \lambda^T p_i)^{1/2} + (q_{0i} + \lambda^T q_i)^{1/2}} \quad (11)$$

따라서, L_i 는 λ_j 만의 함수가 된다.

$$\begin{aligned} L_i(\lambda) &= r_o - \lambda^T b \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{0i} + \lambda^T p_i}{U_i - x_i(\lambda_j)} + \frac{q_{0i} + \lambda^T q_i}{x_i(\lambda_j) - L_i} \right) \quad (12) \end{aligned}$$

식 (12)를 λ_j 로 미분하여, $\partial L_i / \partial \lambda_j = 0$ 의 해를 구하면, 식 (11)을 통해 x_i 를 계산할 수 있다.

2.4 연속 이차 근사 계획법(SQP)

1차 근사 방법과는 달리 테일러 2차 전개까지 사용하여

근사하는 방법으로, 연속 선형 근사의 확장 형태로 볼 수 있다. SQP를 행렬의 형태로 정의하면 다음과 같다.

$$f(x) = C^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \quad (13)$$

여기서, C 는 계수 벡터이고, Q 는 대칭 행렬이다. SQP를 적용한 최적화 문제의 경우 Kuhn-Tucker 조건⁽¹¹⁾은 최적해를 구하는 필요조건이 된다. 더욱이 행렬 Q 가 양수로 정의(positive definite) 되면 Kuhn-Tucker 조건은 최적해의 충분조건이 되며 광역 최적해를 얻을 수 있다. Q 가 양으로 정의되지 않으면, 국부 최적해를 갖는다.

3. 비선형 구조물의 최적설계 예

다음의 예제들을 계산하기 위해 각 방법들은 FORTRAN90으로 작성하였고, 유한 요소법 코드의 경우 Logan⁽¹⁶⁾의 것을 인용하였다.

3.1 기어 감속기

Fig. 1과 같은 기어 감속기⁽⁶⁾의 설계변수로는 기어 폭 (x_1), 기어 모듈 (x_2), 피니언 기어 잇수 (x_3), 베어링 사이의 축 1, 2의 길이 (x_4, x_5), 축 1, 2의 직경 (x_6, x_7) 등을 고려하고, 구속조건으로는 기어 잇면의 굽힘응력 (g_1), 표면응력 (g_2), 전달력에 의한 축 1, 2의 횡변형률 (g_3, g_4), 축 1, 2의 굽힘응력 (g_5, g_6) 및 각 계수들에 대한 비 ($g_7 \sim g_{11}$) 등을 고려하였다.

이 문제를 정식화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= 0.7854x_1 x_2^2 (3.3333x_3^2 + 14.9334x_3 - 43.0934) \\ &- 1.508x_1 (x_6^2 + x_7^2) + 7.477(x_6^3 + x_7^3) \\ &+ 0.7854(x_4 x_6^2 + x_5 x_7^2) \end{aligned}$$

구속조건:

$$g_1 = 27 x_1^{-1} x_2^{-2} x_3^{-1} \leq 1,$$

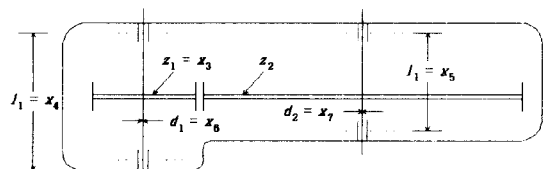


Fig. 1 Schematic of speed reducer(Gear pair)

$$\begin{aligned}
 g_2 &= 397.5x_1^{-1}x_2^{-2}x_3^{-2} \leq 1, \\
 g_3 &= 1.93x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^3x_6^{-4} \leq 1, \\
 g_4 &= 1.93x_2^{-1}x_3^{-1}x_5^3x_7^{-1} \leq 1, \\
 g_5 &= \left[\left(\frac{745x_4}{x_2x_3} \right)^2 + 16.9 \times 10^6 \right]^{0.5} / 0.1x_6^3 \leq 1100, \\
 g_6 &= \left[\left(\frac{745x_5}{x_2x_3} \right)^2 + 157.5 \times 10^6 \right]^{0.5} / 0.1x_7^3 \leq 850, \\
 g_7 &= x_2x_3 \leq 40, \\
 g_8 &= 5x_2 - x_1 \leq 0, \\
 g_9 &= x_1 - 12x_2 \leq 0, \\
 g_{10} &= (1.5x_6 + 1.9) \cdot x_4^{-1} \leq 1, \\
 g_{11} &= (1.1x_7 + 1.9) \cdot x_5^{-1} \leq 1, \\
 2.6 &\leq x_1 \leq 3.6, \quad 0.7 \leq x_2 \leq 0.8, \\
 17 &\leq x_3 \leq 28, \quad 7.3 \leq x_4 \leq 8.3, \\
 7.3 &\leq x_5 \leq 8.3, \quad 2.9 \leq x_6 \leq 3.9, \\
 50 &\leq x_7 \leq 5.5
 \end{aligned}$$

본 연구에서 사용된 1차 근사기법 중 MMA의 이동점 근선은 다음과 같이 규정하였다.

- (a) $k = 0, k = 1$ 인 경우,
 $L_j^{(k)} = 0$ and $U_j^{(k)} = 5 \cdot x_i^{(k)}$
- (b) $k \geq 2$ 인 경우, 식 (4)~(5)를 적용한다.

이 문제를 전술한 1차 및 2차 근사 기법을 적용하여 최적화를 수행한 결과를 Fig. 2와 3에 나타내었다.

Fig. 2는 반복 횟수에 따른 목적 함수 값의 변화를 보이며, Fig. 3은 구속조건의 위반 정도를 나타낸다. 이 결과로부터 SQP와 MMA의 결과가 동일하게 3번만에 수렴하였

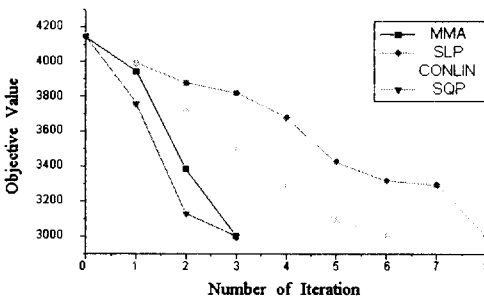


Fig. 2 Objective value vs. number of iteration in speed reducer

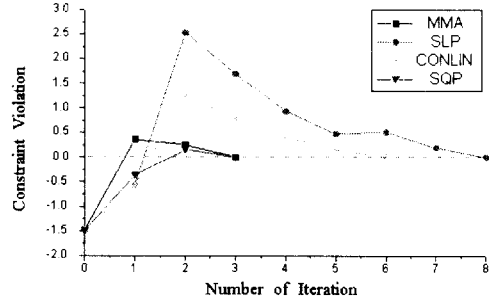


Fig. 3 Constraint violation vs. number of iteration in speed reducer

으며, CONLIN이 6번, SLP가 8번만에 수렴하였음을 알 수 있다.

따라서, 1차 근사 기법 중에서는 MMA가 가장 효율적이었으며, 2차 근사법인 SQP와 비슷한 결과를 얻었다. 그러나 최적화 수행 중 함수값을 이용한 횡수는 MMA가 적으므로 MMA가 더 효율적이라 할 수 있다.

3.2 용접보

Fig. 4에 도시된 용접보 설계 문제¹⁶⁾는, 구속조건으로는 용접 부분의 전단응력 (g_1), 굽힘응력 (g_2), 보에 대한 좌굴 하중 (g_3), 보 끝 부분에 대한 변형량 (g_4), 용접 부분의 높이와 용접보의 폭의 제한(g_5) 등을 고려하였으며, 목적 함수는 설치비용, 인건비 및 재료비용을 합한 총비용으로 하여 총비용을 최소화하는 문제이다.

설계 변수로는 용접 부분의 폭과 높이(x_1), 길이(x_2), 용접보의 높이(x_3), 용접보의 폭(x_4)을 고려하였으며, 다음과 같이 정식화된다.

목적 함수:

$$f(\vec{x}) = 1.10474x_1^2x_2 + 0.0481x_3x_4(14 + x_2)$$

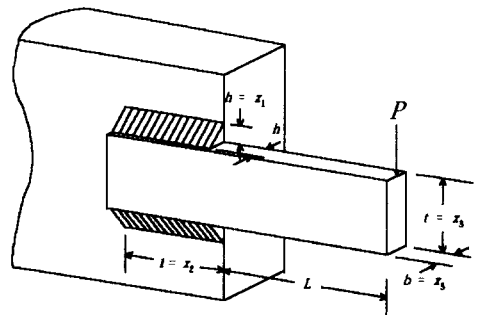


Fig. 4 Welded beam

구속조건:

$$g_1 = \left\{ \frac{1}{2b_1 b_2^2} + \frac{3(28+x_2)}{x_1^2 x_2 [x_2^2 + 3(x_1+x_3)^2]} + \frac{4.5(28+x_2)^2 [x_2^2 + (x_1+x_3)^2]^{1/2}}{x_1^2 x_2^2 [x_1 - 2^2 + 3(x_1+x_3)^2]^2} \right\} - \frac{13/6}{6} \leq 0$$

$$g_2 = \frac{1}{x_4 x_3^3} - 0.05952 \leq 0,$$

$$g_3 = 0.09267 - x_3 x_4^3 - 0.02823 x_3 \leq 0,$$

$$g_4 = 8.7808 - x_3^2 x_4 \leq 0,$$

$$g_5 = x_1 - x_4 \leq 0,$$

$$0.125 \leq x_1 \leq 10, \quad 0.1 \leq x_2 \leq 10,$$

$$0.1 \leq x_3 \leq 10, \quad 0.1 \leq x_4 \leq 10$$

이 문제를 1차 및 2차 근사 기법을 적용하여 최적화를 수행한 결과, Fig. 5, 6과 같은 결과를 얻었다.

Fig. 5는 반복 횟수에 따른 목적 함수 값의 변화를 보이

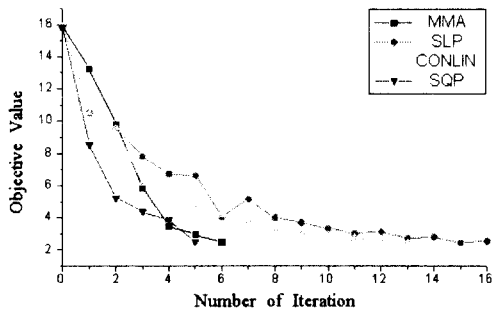


Fig. 5 Objective value vs. number of iteration in welded beam

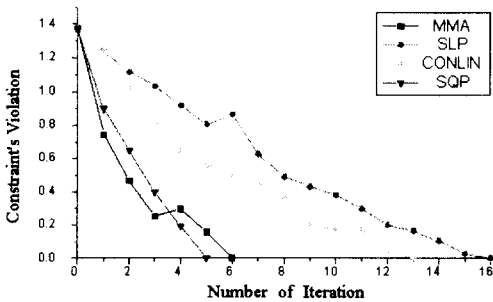


Fig. 6 Constraint violation vs. number of iteration in welded beam

며, Fig. 6은 구속조건 위반 정도를 나타낸다. 이 결과로부터 SQP가 가장 효율적으로 5번만에 수렴하였으며, 다음으로 MMA가 6번만에 수렴하였으며, CONLIN이 13번, SLP가 16번만에 수렴하였음을 알 수 있다.

따라서, 1차 근사 기법 중에서는 MMA가 가장 효율적 이었으며, 2차 근사법인 SQP 보다는 비효율적이라는 결과를 얻었다. 그러나 최적화 수행 중 함수값을 이용한 횟 수는 MMA가 적었다.

3.3 헬리콥터 꼬리날개(Helicopter tail boom)

헬리콥터 꼬리날개^[12-3]에 대한 이상화된 프레임 구조물을 Fig. 7, 8에 나타내었다. 재료에 관한 계수값은 Table 1에 표시하였다.

구조물은 절점 5~28에 y, z 방향으로의 변위 구속조건(displacement constraints)과 각 요소의 경계 구속조건(side constraints)을 만족하면서 경량화하는 것으로 설계 되어졌다. 변위(u) 구속조건 허용량과 모든 부재에 대해 경계 구속조건은 다음과 같다.

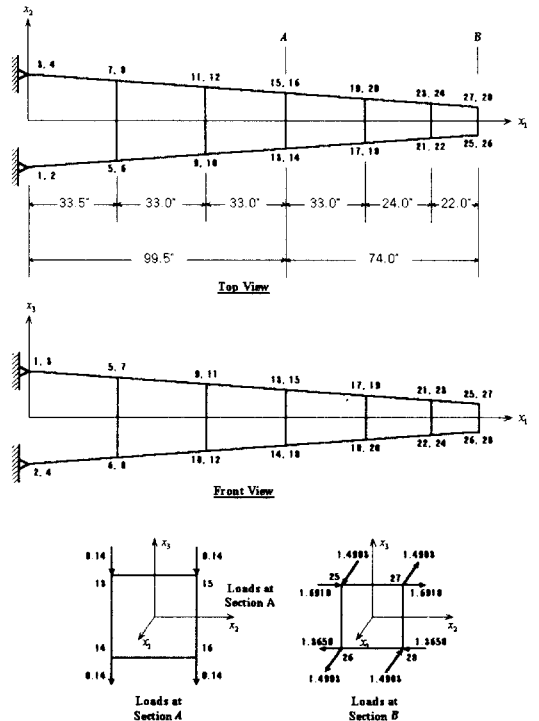


Fig. 7 Helicopter tail boom

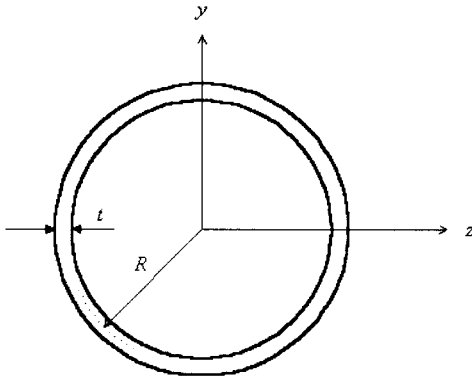


Fig. 8 Element cross-sectional type

Table 1 Design data for helicopter tail boom

Young's Modulus	$E=10.5 \times 10^6$ psi
Shear Modulus	$G=4.04 \times 10^6$ psi
Poisson's Ratio	$\nu=0.3$
Material Density	$\rho=0.1$ lb/in. ³
Allowable Stress	$\sigma_a=4.2 \times 10^4$ psi

Table 2 Iteration history data for helicopter tail boom⁽¹²⁾

Analysis No.	Weight, lb					
	1	2	3	4	5	MMA
0	69.1	69.11	69.11	69.11	69.11	69.11
1	95.86	102.73	99.10	97.87	105.44	103.04
2	107.94	107.32	109.46	108.65	112.34	104.91
3	110.69	109.44	110.00	109.62	110.20	106.13
4	109.51	109.51	110.04	108.74	109.15	107.51
5	110.13	109.97	109.44	108.34	108.90	108.71
6	109.33	109.55	108.96	108.74	108.79	
7	109.25	109.60	108.79	108.66		
8	108.83	108.89	108.77	108.48		
9	108.71	108.89	108.73	108.52		
10	108.80	108.82		108.35		
Final	108.80	108.82	108.73	108.35	108.79	108.71

$$-0.5 \leq u \leq 0.5.$$

$$0.25 \leq R \leq 25.0$$

$$0.001 \leq t \leq 5.0$$

구속조건은 장주 좌굴과 국부적인 좌굴을 따라 각 부재 양단에서의 응력으로 설정된다. 모든 부재의 초기값을 $R=2.0$ in., $t=0.051$ in.로 설정한 뒤 최적화 과정을 수행하였다.

위의 두 예제로부터 MMA가 가장 효율적인 기법이라는 것을 확인하였으므로, 위와 같은 결과를 토대로 이 문제에서는 MMA만을 적용하여 최적화를 수행하였다. 최적화를 수행한 후 참고문헌 (12)에 있는 복합 1차 근사 기법(hybrid linear approximation)과 비교하였다. 이 결과를 Table 2에 나타내었다.

MMA를 적용한 결과, Table 2와 같이 참고문헌 (12)에서 제안한 다른 1차 근사 기법에 비해서도 좋은 결과와 빠른 수렴을 보여주고 있다.

4. 결론

본 연구의 결론은 다음과 같다.

- (1) 1차 및 2차 근사 기법을 비선형 구조물인 기어 갑속기와 용접보 설계의 최적화에 적용한 결과 SQP가 가장 빠르게 수렴하였다.
- (2) 1차 근사 기법 중에서는 MMA가 가장 효율적이었다.
- (3) 최적화 수행시 함수 계산 횟수는 MMA가 훨씬 적으므로 계산 비용면에서 MMA가 더욱 효율적이었으며, 보다 복잡한 헬리콥터 꼬리날개에 적용한 결과 매우 만족한 결과를 얻었다.

따라서, MMA 기법은 간단한 구조물에서 복잡한 구조물까지 적용될 수 있는 효율적인 1차 근사 기법임을 확인하였다.

참고 문헌

- (1) L. A. Schmit, "Structural Design by Systematic Synthesis", Proceedings of the 2nd Conference on Electric Computation, ASCE, New York, pp. 105-122, 19601
- (2) Y. L. Hsu, "A Review of Structural Shape Optimization", Computers in Industry, Vol. 26, pp. 3-13, 1994
- (3) 한석영, 이경래, 배현우, "응력 제어를 통한 형상 최적설계 시스템 개발", 한국자동차공학회 97 추계 학술대회 논문집, pp. 601-606, 1997

- (4) 한석영, 이경래, "체적 제어를 통한 형상 최적화 시스템 개발", 한국공작기계학회 논문집, pp. 27-34, 1999
- (5) D. N. Chu, Y. M. Xie, A. Hira, G. P. Steven, "Evolutionary Structural Optimization for Problems with Stiffness Constraints", Finite Element in Analysis and Design, Vol. 21, pp. 239-251, 1996
- (6) 한석영, 배현우, "위상 최적화를 위한 양방향 요소 제거법의 개발", 대한기계학회 논문집, 제 23권, 제 5호, pp. 814-819, 1999
- (7) J. F. Bathelemy, R. T. Haftka, "Approximation Concepts for Optimum Structural Design - A Review", Structural Optimization, Vol. 5, pp. 129-144, 1993
- (8) J. E. Kelly, "The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs", Journal of SIAM, Vol. 8, No. 4, pp. 703-712, 1960
- (9) V. Braibant, C. Fleury, "An Approximation Concept Approach to Shape Optimal Design", Com. Methods in Applied Mech. and Eng. , Vol. 53, pp. 119-148, 1985
- (10) K. Svanberg, "The Method of Moving Asymptotes - A New Method for Structural Optimization", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 24, pp. 359-373, 1987
- (11) S. S. Rao, Engineering Optimization, 3rd Ed., Wiley-Interscience, 1996
- (12) R. V. Lust, L. A. Schmit, "Alternative Approximation Concepts for Space Frame Synthesis", AIAA, Vol. 24, No. 10, pp. 1676-1684, 1985
- (13) E. J. Haug, J. S. Arora, Applied Optimal Design, John Wiley & Sons, 1979
- (14) 한석영, 배현우, "응력제어를 통한 형상 최적화 시스템 개발", 한국공작기계학회 논문집, 제 8권, 제 3호, pp. 52-58, 1999
- (15) 한석영, 배현우, "일반적인 2차원 구조물의 형상 최적화", 대한기계학회 논문집, 제 23권, 제 9호, pp. 1622-1627, 1999
- (16) D. L. Logan, A First Course in the Finite Element Method, 2nd Ed., PWS Publishing Company, 1993