韓國經營科學會誌
第25卷 第2號
2000年 6月

M/G/c 대기행렬시스템의 대기고객수 분석에 대한 근사법

허 선* · 이호현*

An Approximation for the System Size of M/G/c Queueing Systems

Sun Hur* · Ho-Hyun Lee*

■ Abstract ■

In this paper, we propose an approximation analysis for the system size distribution of the M/G/c system which is transform-free. At first, we borrow the system size distribution from the Markovian service models and then introduce a newly defined parameter in place of traffic intensity. In this step, we find the distribution of the number of customers up to c. Next, we concentrate on each waiting space of the queue separately, rather than consider the entire queue as a whole. Then, according to the system state of the arrival epoch, we induce the probability distribution of the system size recursively.

We discuss the effectiveness of this approximation method by comparing with simulation for the mean system size.

1. 서 론

M/G/1 모형에 대한 해법은 여러 형태의 근사법, 내재점 마코프체인을 이용한 방법, 부가변수법 등 여러 가지 방법이 제시되어 있으나 서버가 여러 명일 경우는 상대적으로 연구가 많이 이루어지지 않았으며, 정확한 해를 내는 해법 또한 알려지지 않고 있다[2]. 이론적으로는 다차원 확률과정을 정의하여 각 서버의 상태를 추적하거나 부가변수법을 이용하는 것이 있는데 이는 서버의 수가 많아지면 차원의 수가 늘어나므로 분석이 쉽지 않다. 이러한 이유로 M/G/c 시스템에 대해서는 주로 근사해법이 연구되어 왔다. 본 연구에서는 복수서버를 갖는 M/G/c 대기행렬시스템의 안정상태에서의 대기고

* 한양대학교 산업공학과

객수에 대한 근사해를 구함에 있어서 변환 과정을 거치지 않고 수행하는 방법을 제시하고자 한다. 즉, 간단하면서도 신빙성이 있는 해를 얻고자 마코비안 서비스를 따르는 모형을 통한 접근법과 도착시점에서 부하유형에 따른 관계식의 축차적 계산을 통하여 복수서버시스템에 대한 분석을 실시하고자 한다.

윤봉규 등[1]은 M/G/1/K 대기행렬시스템에서 대기장소를 고객이 점유하고 있는 각각의 위치로서 하나씩의 공간으로 나누고 그 위치에 얼마만큼 부하가 주어지는 가에 따라 변환을 취하지 않고 대기고객수를 분석하였는데 여기서는 단수서버의 경우로 그 범위가 제한되어 있다. Boots and Tijms [3]는 일정한 시간을 두고 그 시간이 지날 때까지 서비스를 받지 못하면 시스템을 떠나는 impatient customers 문제를 다루었다. 성능척도는 고객을 잃을 확률이고 고객수분포는 구하지 않았다. Kimura [5]는 M/M/c 시스템의 해를 이용한 M/G/c 모형의 근사법을 제시하였는데, 여분의 대기장소가 없는 loss 시스템의 경우에는 매우 양호한 해를 얻고 있으나 대기공간이 커질수록 근사의 정확도가 떨어진다. Boxma 등[4]은 서비스시간이 확정적인 분포와 Erlang 분포의 경우에 대하여 적정한 평균 대기고객수를 제시했다. Ma and Mark[6]는 기존의 다른 연구들이 서버의 수가 많고 서비스시간의 변동계수가 클 경우 바람직하지 못한 해를 내는 점을 착안하여 이를 보정하여 줄 수 있는 임의의 파라미터를 도입하고 기존의 연구 결과들을 개선하였다. 그러나 고객수 확률분포는 변환의 형태로 제시되고 있어 계산의 어려움이 따른다. 위에서 열거한 연구에서는 서버의 수와 대기공간의 범위가 제한되는 등의 단점을 가지고 있다. Boxma 등[4]에서도 평균 대기고객수 값은 좋은 편이지만 서버의 수와 서비스시간의 변동계수가 크고 light traffic의 경우에는 정확도가 현저히 떨어진다.

본 연구에서는 비교적 최근의 연구로서 단일서버시스템을 연구한 윤봉규 등[1]과 복수서버시스템을 다룬 Kimura[5]의 접근 방법을 이용하여 복수서버를 갖는 M/G/c 시스템의 근사해법을 제시한다. 즉, 변환을 취하지 않고 M/G/c 시스템의 고객수분포를 구하는 방법으로 2단계 분석을 실시한다. 1단계에서는 마코비안 서비스를 따르는 모형에서의 고객수분포로부터 출발하여 여기에 새로이 정의된 모수를 도입하고 moment matching 방법과 Little의 식을 이용하여 모수를 구해 낸 후, 근사하여 고객수가 c명일 때까지의 분포를 구한다. 2단계에서는 선수 작업으로 하나의 대기행렬을 각각의 고객의 대기공간으로 구별하여 나눈 후에 현재 시스템 내의 고객수에 따라 고객의 도착시점에서 바라 본 대기공간의 부하 유형별로 나누고 해당 대기공간에 부하를 주는 정도에 따라 정리된 식과 잔여서비스시간의 적절한 계산식으로부터 축차적으로 고객수분포를 유도한다. 구해진 고객수분포를 가지고 평균대기고객수와 평균대기시간 등을 구한다.

2. 고객수분포

고객의 도착은 도착률 λ를 갖는 포아송과정으로 이루어지며, 각 서버의 서비스시간 S는 평균서비스시간 $E[S]=1/\mu$의 일반분포 G를 따른다. 서버의 수는 c명으로 각 서버는 동일하고 상호 독립이며, 대기공간은 무한하고 안정상태조건 ($\lambda < c\mu$)을 만족하는 시스템이라고 하자. 대기하는 고객이 있으면 서버는 유휴해지지 않으며 임의의 서비스가 끝나면 즉시 다음 고객을 받는다. 서비스 정책은 FCFS (First-Come-First-Served)이다.

본 장에서는 시스템 내의 고객수가 c명 이하(2.1절)일 경우와 c명을 초과하는 경우(2.2절)로 나누어 변환을 취하지 않는 형태의 근사를 취한다.

2.1 시스템 내의 고객수가 c명 이하

M/M/c에서 안정상태에 시스템 내 고객수를 N이라 하고 $\Pr(N=n)=P_n(M)$으로 표기하면 이는 다음 식 (2.1)과 같다.

$$P_n(M) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0(M), & (0 \le n \le c-1) \\ C(c, c\rho)(1-\rho)\rho^{n-c}, & (n \ge c) \end{cases} \quad (2.1)$$

여기서 $\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$ 이고 $C(c, c\rho) = \dfrac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \dfrac{1}{1-\rho}$ $P_0(M)$이며 이는 임의의 시점에 모든 서버가 바쁠 확률 (또는 도착하는 고객이 대기하여야 할 확률)이다. 또한 $P_0(M) = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \dfrac{(\lambda/\mu)^c}{c!(1-\rho)} \right)^{-1}$ 이다.

Kimura[5]는 시스템 내의 고객수가 c명 미만인 경우에는 M/M/c 시스템의 해를 그대로 사용하여 M/G/c 모형의 해로 제시하였는데, 여분의 대기장소가 없는 loss 시스템의 경우에는 근사의 정도가 매우 양호함을 보이고 있다. 즉, c명의 서버가 모두 바쁘지는 않은 경우는 M/M/c 시스템과 유사한 성질을 갖고 있기 때문에 근사의 원형으로 M/M/c 시스템을 도입하고 있는 것이다. 한편 고객수가 c 명 이상인 경우는 M/M/c 시스템의 고객수 분포에서 ρ 대신에 새로운 모수 ν를 도입하여 근사화하고 있다. 본 연구에서는 시스템내 고객수가 c명 미만인 경우는 Kimura의 방법을 그대로 원용하였고 고객수가 c명인 경우는 Kimura가 제시한 것과 다른 방법으로 모수 ν를 계산하였다. 그리고 고객수가 c+1명 이상의경우는 2절에서 다룬다.

식 (2.1)로부터 서비스시간이 일반분포를 따르는 M/G/c 시스템의 분포를 근사시키기 위하여 임의의 모수 ν $(0<\nu<1)$를 도입하고 식(2.1)의 ρ와 대치하여 M/G/c 시스템의 고객수분포를 생성한다[7]. 즉, $P_n(G)$를 M/G/c 에서 시스템 내에 n명 있을 확률이라고 하면 다음과 같이 변형한다.

$$P_n(G) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0(M), & (0 \le n \le c-1) \\ C(c, c\rho)(1-\nu)\nu^{n-c}, & (n = c) \end{cases} \quad (2.2)$$

식 (2.2)와 유사한 방식의 근사는 여러 곳에서 볼 수 있는데 대부분의 경우 복수서버시스템에서 부하의 척도로 전체 시간 중에서 모든 서버가 바쁠 때의 시간 비율로 모수 ν를 표현하고 있다[8].

모수 ν를 구하기 위하여 Little의 식과 moment matching법을 적용한다. Little의 식은 서버의 수, 서비스 정책, 서비스 순서 등에 상관없이 쓰일 수 있으며 본 시스템은 고객이 도착하여 반드시 서버에게 실행로드(carried load)를 제공하는 시스템이므로 사용 가능하다. M은 M/M/c 모형, G는 M/G/c 모형을 의미한다고 하면 $L_{q,M/M/c} = \lambda W_{q,M/M/c}$, $L_{q,M/G/c} = \lambda W_{q,M/G/c}$ 등이 성립하고, 이를 λ에 관하여 정리하고 moment matching을 하면 다음과 같다[5].

$$\frac{\rho}{1-\rho} W_{q,M/G/c} \simeq \frac{\nu}{1-\nu} W_{q,M/M/c} \quad (2.3)$$

R을 다음과 같이 정의한다.

$$R \equiv \frac{W_{q,M/G/c}}{W_{q,M/M/c}} \quad (2.3)$$

그러면 식 (2.2)에서 사용한 모수 ν은 식 (2.3)과 (2.4)를 이용하여 다음과 같이 정리한다.

$$\nu = \frac{\rho R}{1-\rho+\rho R} \quad (2.5)$$

Kimura[5]는 R을 다음과 같이 근사하였다.

$$\lim_{\rho \to 0} R = c \cdot E[T^+] \cdot \frac{1}{E[S]} \quad (2.6)$$

여기서 $E[T^+]$는 임의시점에서 최소 잔여서비스 시간의 평균으로서

$$E[T^+] = E[\min\{S_1^+, S_2^+, \cdots, S_c^+\}] = \int_0^\infty (1-G_+(t))^c dt$$

로 표현된다. 단, S_k^+는 서버 k의 잔여서비스시간,

G_+는 잔여서비스시간의 분포함수를 나타낸다. Kimura는 식 (2.6)의 $E[T^+]$를 구하는 방법을 명시하지 않았으나 Wang and Wolff[9]에서는 경험적으로 이를 다음과 같이 근사하는 것이 좋음을 보였다.

$$E[T^+] \fallingdotseq \frac{E[S]+3E[S^+]}{4c} \tag{2.7}$$

따라서 R은 아래와 같이 근사한다.

$$\lim_{\rho \to 0} R = \frac{1}{4}\left\{1+\frac{3E[S^2]}{2E^2[S]}\right\} \tag{2.8}$$

근사된 R을 이용하여 식 (2.5)에 의해 모수 ν를 구하고 이를 식 (2.2)에 대입하면 $P_c(G)$는 다음과 같이 된다.

$$P_c(G) = \frac{(\lambda/\mu)^c}{n!} \cdot \frac{1-\nu}{1-\rho} \cdot P_0(M) \tag{2.9}$$

여기서 $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$, $P_0(M) = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!(1-\rho)} \right)$이다. 여기서 $P_c(G) \equiv P_c$라고 하자. 이 P_c를 이용하여 2.2절에서 고객수 $c+1$명 이상일 확률을 구하게 된다.

2.2 시스템 내의 고객수가 c명 초과

고객수가 서버수 이상일 때에 도착하는 고객들은 대기공간에 대기하게 된다. 여기서는 대기행렬을 "전체"로 보는 것이 아니라, 각각의 고객들이 점유하고 있는 "개별" 대기장소로 본다. 각 고객은 해당 대기공간에 현재 서비스 중인 고객들의 최소 잔여서비스시간 동안 머물게 되며 서비스가 종료될 때마다 한 칸씩 앞으로 전진(shift forward)하는 모습을 갖는다. 분석의 기본이 되는 점은 임의의 개별 대기공간에 현재 시스템 내의 고객수에 따라 고객의 도착시점에서 바라보았을 때 부과되는 부하 유형(types of offered load)별로 나눈다는 것이다.

r번째 대기공간을 R_{c+r}이라고 하자. R_{c+r}이 "busy하다"는 것은 고객이 이 r번째 대기공간을 점유하고 있다는 의미이다. 임의의 시점에서 r번째 대기공간이 busy할 확률은 안정상태에서 시스템 내에 적어도 $c+r$명이 존재할 확률과 동일하며, 이는 r번째 대기공간의 점유율(utilization)을 뜻한다. 또한 이는 r번째 대기공간에 대한 단위시간 동안의 제공로드(offered load)이다. Q_{c+r}을 r번째 대기공간 R_{c+r}의 점유율이라고 하자.

2.2.1 시험고객의 도착시점에서의 부하 유형

현재 시스템 내에 있는 고객수에 따라 r번째 대기공간 R_{c+r}에 부과되는 부하의 정도가 달라지는데 이를 알아보기 위하여 시험고객의 도착시점에서의 고객수에 따른 부하 유형을 구분한다.

(i) 시험고객의 도착 시 시스템 내 고객수가 $c+r-2$명 이하인 경우 :
R_{c+r}에 부하를 주지 못한다.

(ii) 시험고객의 도착 시 시스템 내 고객수가 $c+r-1$명인 경우 :
현재 진행중인 서비스 가운데 최소 잔여서비스시간 만큼 R_{c+r}에 부하를 준다. 즉, 시험고객은 r번째 대기공간을 최소잔여서비스시간 동안 점유한다.

(iii) 시험고객의 도착 시 시스템 내 고객수가 $c+r$명 이상인 경우 :
현재 서비스를 받고 있는 고객의 잔여서비스시간과 새로 서비스를 시작하는 서버의 서비스시간 중에서 가장 적은 시간 동안 R_{c+r}에 부하를 준다. (시험고객은 r번째 대기공간을 새로운 서비스시간과 최소잔여서비스시간 동안 점유한다)

위의 유형들로부터 단위시간당 도착하는 고객들이 대기공간 R_{c+r}에 주는 평균부하량을 다음과 같이 구한다.

$$\lambda(P_0+P_1+\cdots+P_{c+r-2})\cdot 0+\lambda P_{c+r-1}E[T_1^+]$$
$$+\lambda(P_{c+r}+P_{c+r+1}+\cdots)E[T_2^+] \qquad (2.10)$$

여기서 $T_1^+=\min\{S_1^+, S_2^+, \cdots, S_c^+\}$는 서비스 중인 서버의 잔여서비스시간 중에서 최소인 것을 나타내고 $T_2^+=\min\{S, S_1^+, S_2^+, \cdots, S_{c-1}^+\}$는 새로 서비스를 시작하는 서버(이를 서버 c라 하자)의 서비스시간 S와, 나머지 서버(서버1 ~ 서버 $c-1$)의 잔여서비스시간 $S_1^+, S_2^+, \cdots, S_{c-1}^+$중에서 최소인 것을 의미한다.

2.2.2 고객수 분포

앞에서 언급한 대로 대기공간 R_{c+r} $(r=1, 2, 3\cdots)$에 가해지는 평균부하량을 이용하여 r번째 대기공간이 점유될 확률 Q_{c+r}을 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} Q_{c+r} &= P_{c+r}+P_{c+r-1}+P_{c+r+2}+\cdots \\ &= \lambda(P_0+P_1+\cdots+P_{c+r-2})\cdot \\ &\quad 0+\lambda P_{c+r-1}E[T_1^+] \\ &\quad +\lambda(P_{c+r}+P_{c+r+1}+\cdots)E[T_2^+] \end{aligned}$$

$$\therefore Q_{c+r}=\frac{\lambda}{1-\lambda E[T_2^+]}E[T_1^+]P_{c+r-1} \qquad (2.11)$$

$P_{c+r}=Q_{c+r}-Q_{c+r+1}$가 되므로 위의 관계식 Q_{c+r} $(r\geq 1)$을 정리하여 축차적으로 풀어서 다음과 같이 $E[T_1^+]$와 $E[T_2^+]$, 그리고 P_c의 항들로 구성된 M/G/c 대기행렬시스템의 고객수분포 P_{c+r} $(r\geq 1)$를 얻는다.

$$\begin{aligned} P_{c+r} &= Q_{c+r}-Q_{c+r+1} \\ &= \frac{\lambda E[T_1^+]}{1-\lambda E[T_2^+]+\lambda E[T_1^+]}P_{c+r-1} \\ &= \left(\frac{\lambda E[T_1^+]}{1-\lambda E[T_2^+]+\lambda E[T_1^+]}\right)^r\cdot P_c \end{aligned} \qquad (2.12)$$

각 상태의 확률들은 두 가지 유형의 서비스시간 평균 $E[T_1^+]$와 $E[T_2^+]$를 포함하고 있는데 다음에서 $E[T_1^+]$와 $E[T_2^+]$를 구하기로 한다.

$T_1^+=\min(S_1^+, S_2^+, \cdots, S_c^+)$는 2.1절에서 사용한 T^+와 동일하다. 따라서 여기서의 $E[T_1^+]$는 다음 식 (2.13)와 같다.

$$E[T_1^+]\fallingdotseq\frac{E[S]+3E[S^+]}{4c} \qquad (2.13)$$

어떤 확률변수 X에 대하여 $X^+=\max(X,0)$이라고 정의하면 $(A-B)^+=A-\min(A,B)$임은 쉽게 알 수 있다.

[정리 2.1]

$1\leq n\leq c$에 대하여 다음이 성립한다.

$$E[(S-n^{th} smallest of(S_1^+, S_2^+, \cdots, S_c^+))^+]$$
$$=E[S]\frac{c+1-n}{c+1}. \qquad (2.14)$$

(증명)

식 (2.14)의 좌변은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E[(S-n^{th} smallest of(S_1^+, S_2^+, \cdots, S_c^+))^+]$$
$$=E[S]-E[\min\{S,\ n^{th}\ smallest\ of\ (S_1^+, S_2^+, \cdots, S_c^+)\}]$$

위 식의 두 번째 항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &E[\min\{S,\ n^{th}\ smallest\ of\ (S_1^+, S_2^+, \cdots, S_c^+)\}] \\ &=\int_0^\infty \Pr(S>t)\cdot\Pr\{\ n^{th}\ smallest\ of\ (S_1^+, S_2^+, \cdots, S_c^+)>t\ \}dt \\ &=\int_0^\infty (1-G(t))\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\binom{c}{i}G_+^i(t)(1-G_+(t))^{c-i}\,dt \\ &=\int_0^\infty E[S]\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\binom{c}{i}G_+^i(t)(1-G_+(t))^{c-i}g_+(t)\,dt \\ &=E[S]\sum_{i=0}^{n-1}\binom{c}{i}\int_0^1 z^i(1-z)^{c-i}\,dz \\ &=E[S]\sum_{i=0}^{n-1}\binom{c}{i}\frac{i!(c-i)!}{(c+1)!} \\ &=E[S]\frac{n}{c+1}. \end{aligned}$$

위 식의 전개과정에서 세 번째 등식은 $E[S]G_+(t)=\int_0^t(1-G(x))dx$이므로 양변을 t에 관해 미분하면 $E[S]g_+(t)=(1-G(t))$임을 이용한 것이다. 네 번째 등식은 $G_+(t)=z$로 치환함으로서 적분구간이 $0<t<\infty$에서 $0<G_+(t)=z<1$로 되고 따라서 피적분함수는 베타 확률밀도함수가 되는 사실을 이용한 것이다. □

정리 2.1에서 $n=1$로 놓으면 다음과 같다.

$$E[T_2^+]=\frac{1}{c}E[S] \qquad (2.15)$$

3. 수치분석을 통한 정밀도 검증

본 연구에서 제시한 모형에 대한 타당성 검증을 위하여 여러 가지 서비스분포에 대하여 서버수, traffic intensity를 변화시켜 가며 시스템내 평균고객수에 대한 수치분석을 실시하였다. 도착률은 1로 고정하였고 서비스분포로는 지수분포, Erlang-3, Erlang-8, 그리고 Deterministic 등 4가지로 하였으며, 서버수는 3,5,10명일 때로 하였고 각각의 경우에 대하여 $\rho=0.1,0.3,0.5,0.7,0.9,0.95$ 등으로 바꾸어 가면서 실험하였다. 특히 서비스분포가 지수분포인 경우에는 시뮬레이션 결과와 비교하지 않고 알려진 정확한 해와 비교하였다. 시뮬레이션은 Arena 3.5로 수행하였다. 근사의 정확도를 보기 위해서 상대오차를 백분율로 나타내었다.

아래 <표 3.1>은 본 연구의 근사법과 정확한 해를 비교한 것인데 서버수가 10명이고 high traffic일 때를 제외하고는 본 근사법이 정확한 해를 제공함을 나타내고 있다.

〈표 3-1〉 M/M/c 시스템의 평균고객수와의 비교

c	rho	Exact	Approx.	상대오차
3	0.1	0.30	0.30	0.00
	0.3	0.93	0.93	0.00
	0.5	1.74	1.74	0.00
	0.7	3.25	3.25	0.00
	0.9	10.05	10.05	0.00
	0.95	20.08	20.08	0.00
5	0.1	0.50	0.50	0.00
	0.3	1.51	1.51	0.00
	0.5	2.63	2.63	0.00
	0.7	4.38	4.38	0.00
	0.9	11.36	11.36	0.00
	0.95	21.43	21.43	0.00
10	0.1	1.00	1.00	0.00
	0.3	3.07	3.00	2.15
	0.5	5.94	5.04	15.26
	0.7	9.39	7.52	19.93
	0.9	18.08	15.02	16.91
	0.95	28.58	25.19	11.87

주: $상대오차=\frac{|\text{Exact}-\text{Approx.}|}{\text{Exact}}\times 100(\%)$

〈표 3-2〉 M/ E_3 /c 시스템의 평균 고객수 실험결과

c	rho	Simulation	Approx.	상대오차
3	0.1	0.30	0.30	0.00
	0.3	0.92	0.92	0.26
	0.5	1.65	1.68	1.55
	0.7	2.86	2.96	4.69
	0.9	7.33	8.21	12.05
	0.95	12.52	15.77	25.98
5	0.1	0.50	0.50	0.00
	0.3	1.50	1.51	0.18
	0.5	2.58	2.60	0.53
	0.7	4.07	4.16	2.26
	0.9	9.12	9.65	5.83
	0.95	13.27	17.26	30.07
10	0.1	1.00	1.00	0.00
	0.3	3.00	3.05	1.65
	0.5	5.03	5.71	13.56
	0.7	7.33	8.79	19.97
	0.9	12.68	15.80	24.61
	0.95	21.59	23.80	10.27

주: $상대오차=\frac{|\text{시뮬레이션 값}-\text{근사값}|}{\text{시뮬레이션 값}}\times 100(\%)$.

<표 3-2>, <표 3-4>, <표 3-5>에서는 Erlang

및 Deterministic service일 때의 근사값을 시뮬레이션 결과와 비교하여 상대오차를 제시하였다. 표에서 보는 바와 같이 서버수가 3명, 5명일 때에는 traffic intensity 0.7이하까지는 6% 이내의 좋은 근사정도를 보이고 있다. 서버수가 10명으로 많아지면 ρ가 0.1, 0.3 등 낮은 traffic에서는 2% 이내의 매우 좋은 근사정도를 보이고 있으나 그 이상의 traffic에서는 근사정도가 급격히 나빠지고 있다. 본 연구에서는 시스템내 고객수가 서버수보다 작은 경우, 즉 식 (2.1)의 $0 \le n \le c-1$인 경우는 M/M/c 시스템의 해를 그대로 사용하고 있기 때문에, 서버수가 많아짐에 따라 근사해의 정확도가 그만큼 더 떨어지기 때문인 것으로 보인다.

〈표 3-3〉 타 연구의 실험결과 ([5],[7]에서 M/ E_3 /c 시스템의 경우)

c	rho	상대오차(%)	
		Kimura[5]	Miyazawa[7]
3	0.3	0.41	9.13
	0.6	0.86	3.97
	0.9	0.54	0.64

〈표 3-4〉 M/ E_8/c 시스템의 평균 고객수 실험결과

c	rho	Simulation	Approx.	상대오차
3	0.1	0.30	0.30	0.00
	0.3	0.92	0.92	0.15
	0.5	1.64	1.66	1.28
	0.7	2.73	2.87	5.09
	0.9	6.73	7.64	13.46
	0.95	13.45	14.43	7.25
5	0.1	0.50	0.50	0.00
	0.3	1.51	1.51	0.03
	0.5	2.58	2.59	0.45
	0.7	4.02	4.09	1.74
	0.9	8.29	9.11	9.84
	0.95	13.42	15.96	18.92
10	0.1	1.00	1.00	0.00
	0.3	3.00	3.04	1.47
	0.5	5.02	5.63	12.17
	0.7	7.30	8.60	17.77
	0.9	12.17	15.09	23.95
	0.95	16.40	22.31	36.05

〈표 3-5〉 M/D/c 시스템의 평균 고객수 실험결과〉

c	rho	Simulation	Approx.	상대오차
3	0.1	0.30	0.30	0.00
	0.3	0.92	0.92	0.25
	0.5	1.62	1.65	1.72
	0.7	2.66	2.82	5.89
	0.9	6.20	7.30	17.63
	0.95	11.20	13.62	21.67
5	0.1	0.50	0.50	0.00
	0.3	1.51	1.51	0.02
	0.5	2.57	2.58	0.42
	0.7	3.94	4.05	2.72
	0.9	7.79	8.79	12.86
	0.95	12.84	15.17	18.16
10	0.1	1.00	1.00	0.00
	0.3	3.00	3.04	1.37
	0.5	5.02	5.59	11.31
	0.7	7.27	8.49	16.70
	0.9	11.91	14.66	24.08
	0.95	17.15	21.41	24.84

한편, <표 3-3>은 [5]와 [7]에서 제시된 방법에 의한 근사값의 상대오차를 나타낸다. light traffic 에서는 본 연구의 방법이 다른 두 방법보다 우월하고 중간 traffic에서는 비슷하나 heavy traffic에서는 열등함을 알 수 있다.

위의 수치분석에 의해서 본 연구의 근사법은 서버수가 그다지 많지 않은 경우에는 light 및 medium traffic에서, 그리고 서버수가 많을 경우에는 light traffic에서 좋은 근사정도를 보이고 있음을 알 수 있다. 따라서 본 연구에서 제시하는 계산절차에 의해서 위와 같은 경우의 M/G/c 모형의 각종 성능치들을 매우 손쉽게 높은 근사정도를 가지고 얻을 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 변환 과정을 취하지 않고 근사법을 통하여 M/G/c 대기행렬시스템을 분석하였다. 고객수 c명 이하일 경우의 고객수 분포는 M/M/c 모형에서 출발하여 M/G/c 와 M/M/c의 비율과 ρ

로 표현되는 모수를 갖는 시스템으로 분석하였고, 고객수 c명 이상의 고객수 분포에 대해서는 대기 공간을 개별적인 고객이 점유하는 장소로 나누고 여기에 도착시점에서의 부하 유형별로 분석하였다.

수치분석의 결과 서버수가 그다지 많지 않은 경우에는 light 및 medium traffic에서, 그리고 서버수가 많을 경우에는 light traffic에서 좋은 근사정도를 보이고 있음을 알 수 있다. 본 근사법은 변환 과정을 거치지 않은, 즉 역변환의 과정이 필요없는 모형이므로 계산 과정이 쉽고 간단하며 특히, 서비스시간의 1, 2차 모멘트만으로도 고객수분포를 구해 낼 수 있다는 것이 장점이다. 본 연구의 결과를 통하여 다중접속을 하는 통신네트워크시스템의 성능분석, 재고시스템에 적용되어 그 효과를 발휘할 수 있으리라 기대한다.

참 고 문 헌

[1] 윤봉규, 김남기, 채경철, "Little's 법칙의 미시적 활용 사례", 「대한산업공학회지」, 제25권, 1호(1999), pp.125-129.

[2] 이호우, 「대기행렬이론」, 시그마프레스, 1998.

[3] Boots, N.K. and H.C. Tijms, "A Multiserver Queueing System with Impatient Customers", *Mgmt. Sci.*, Vol.45(1999), pp.444-448.

[4] Boxma, O.J., J.W. Cohen, and N. Huffels, "Approximations of the Mean Waiting Time in an M/G/s Queueing System", *Oper. Res.*, Vol.27(1979), pp.1115-1127.

[5] Kimura, T., "A Transform-free Approximation for the Finite Capacity M/G/s Queue", *Oper. Res.*, Vol.44(1996), pp.984-988.

[6] Ma, N.W., and J.W. Mark, "Approximation of the Mean Queue Length of An M/G/c Queueing System", *Oper. Res.*, Vol.43(1995), pp.158-165.

[7] Miyazawa, M., "Approximations of the Queue-Length Distribution of an M/GI/s Queue by the Basic Equations", *J. Appl. Prob.*, Vol.23 (1986), pp.443-458.

[8] Tijms, H.C., *Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, John Wiley & Sons, Chichester, 1994.

[9] Wang, C. and R. W. Wolff, "The M/G/c queue in light traffic", *Queueing Systems*, Vol.29 (1998), pp.17-34.