

예견 및 H_∞ 제어기법에 의한 연속 냉간 압연시스템의 두께 제어

Thickness Control of Tandem Cold Mills Using Preview and H_∞ Control Techniques

김 승 수, 김 종 식
(Sung-Su Kim and Jong Shik Kim)

Abstract : A robust controller to attenuate the various disturbances of tandem cold mills (TCM) is synthesized by measurement-feedback H_∞ control techniques, which can reflect the input direction of disturbances and the knowledge of disturbance spectrum in the frequency domain. And a digital preview controller utilizing the future terrain information of entry thickness variation (disturbance) is synthesized by discrete-time measurement-feedback H_∞ control theory. It is demonstrated that the H_∞ preview control gain can be easily obtained by the separation principle of the control and estimation problems in H_∞ control. Finally, the effectiveness of the proposed control method for TCM is evaluated by the computer simulation, and compared to the other control methods, which have been previously studied.

Keywords : H_∞ preview control, thickness control, tandem cold mills, roll eccentricity

I. 서론

연속 냉간 압연 제어시스템의 설계목적은 여러 가지 외란에 대하여 압연스탠드간 판 장력을 적정수준으로 유지하면서 출측 판두께의 정밀도를 개선하고자 하는 것이다. 판 장력과 판 두께를 교란시키는 주된 외란입력은 압연 모재 또는/그리고 전방 스탠드에서 야기되는 입측 판두께 변동, 그리고 제어대상 압연 롤 자체에서 야기되는 롤 편심이다. 우선, 입측 판두께 변동신호는 연속 냉간 압연시스템의 특성상 현재는 물론 미래의 신호들도 측정가능하다. 한편, 제어대상 압연스탠드 자체에서 야기되는 롤 편심은 주요 제어대상인 출측 판두께 변동에 대해 직달 외란입력으로 작용한다. 그리고 출측 판두께 센서는 롤 바이트에서 일정거리 떨어진 위치에 설치되기 때문에 이를 측정할 때 출측두께 신호의 공정 수송 지연(process transport delay)을 피할 수 없다. 이는 상태 피드백 제어는 물론 본질적인 출력 피드백 제어문제를 매우 어렵게 하는 요인이 되고 있다. 이 문제와 관련하여서는 롤 편심 신호의 주기성을 이용하여 롤 편심 및 출측두께의 실시간 신호를 온-라인(on line)에서 추정하는 방법[1][2]이 이미 제안된 바 있으며, 이는 출력 피드백 제어를 위한 효과적인 방법이 될 수 있음을 입증하였다.

H_∞ 제어기 설계는 우선 전-정보 (Full Information; FI) 또는 상태 피드백 제어문제에 대한 해를 얻은 후, 이들 제어를 위한 H_∞ 추정기를 찾는 단계적인 방법으로 수행될 수 있다. 이와 함께 예견제어(preview control)[3][4]의 분리도출은 설계 및 제어 알고리즘 상의 연산시간을 줄이는데 기여할 것이다.

본 논문에서는 외란제거 성능 및 강인성을 고려하여 주파수 가중함수를 포함한 H_∞ 예견 및 피드백 제어기의 설계방법을 제안한다. 그리고 실공정 데이터를 근거로 한 냉간 압연 모델에 대해 제안한 설계방법을 적용하여 그 유용성을 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 확인 및 고찰한다.

II. 다변수 냉간 압연 모델

압연 판두께 제어공정은 그림 1에 표시된 바와 같이 압연스탠드 사이를 통과하는 판재의 두께를 축소시키는 생산공정으로서, 이는 출측 판두께가 미리 정해진 기준 값에 대해 가능한 한 오차가 작도록 롤갭 (S_p)과 롤속도 (V_p) 등의 제어입력을 적절히 조절하는 것이다.

압연공정에 대한 선형모델을 얻기 위해서는 압연공정에 관한 비선형식들(압연하중 및 선진을 계산식)에서 관련된

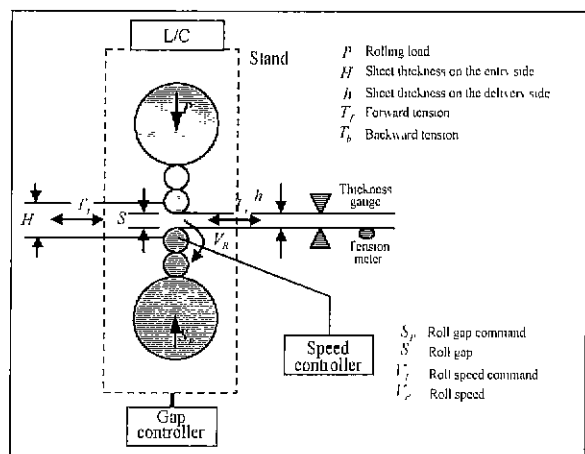


그림 1 하나의 압연 스탠드에 대한 압연과정.
Fig. 1. Rolling process of a mill stand.

자들의 미소변동에 의한 영향계수 연산이 요구된다. 그리고 이와 함께 압연이론에 관한 기본식들을 종합하면 각 압연스탠드에 대한 압연공정은 4차 압연 모델식으로 표현될 수 있다[2]. 다음의 상태공간 모델식은 디지털 제어를 위해, 이를 이산시간 상태공간 모델로 표현한 것이다.

$$x_o(k+1) = \Phi_o x_o(k) + \Gamma_{o1} w(k) + \Gamma_{o2} u(k) + \Gamma_{o3} v(k) \quad (1)$$

$$z_o(k) = C_o x_o(k) + F_{o1} w(k) + F_{o2} v(k) \quad (2)$$

여기서, 상태벡터 x_o , 제어 입력벡터 u , 그리고 외란입력 w 및 v , 그리고 주요 제어대상 변수인 출력벡터 z_o 는 각각 다음과 같다. 여기서, 일반적으로 측정할 수 없는 외란요소 w (플랜트 e)와 앞서 측정가능한 외란요소 v (입측두께변동 ΔH)를 이론 전개상 분리하였다. 여기서 $\Delta(\cdot)$ 는 set-up 연산에 의한 (\cdot) 의 작동점에 대한 섭동량(perturbation)을 의미한다.

$$x_o = [\Delta S \ \Delta P \ \Delta V_R \ \Delta T_b]^T, \quad u = [\Delta S_p \ \Delta V_p]^T, \\ z_o = [\Delta h \ \Delta T_b]^T, \quad w = e, \quad v = \Delta H$$

III. FI H_∞ 예견제어

디지털 예견 H_∞ 제어문제[5]를 위해 우선 가중함수 (weighting functions)를 포함한 일반화 플랜트 모델 (generalized plant model)의 이산시간 상태방정식을 고려한다.

$$x_p(k+1) = \Phi_p x_p(k) + \Gamma_{p1} w(k) + \Gamma_{p2} u(k) + \Gamma_{p3} v(k) \quad (3)$$

특히, v 는 앞서 정의한 예견가능한 외란신호로서, 즉 현재시간 k 에서 미래의 신호들인 $v(k), v(k+1), \dots, v(k+N)$ 들이 앞서 측정되거나 알 수 있다. 예견가능한 미래의 각 외란신호들을 확장된 상태변수들로 고려하기 위해 이들을 다음과 같이 표현한다.

$$x_d(k) = [x_{d1}(k) \ x_{d2}(k) \ \dots \ x_{dN}(k)]^T \\ = [v(k) \ v(k+1) \ \dots \ v(k+N-1)]^T \quad (4)$$

이때,

$$x_d(k+1) = \Phi_d x_d(k) + E_d v(k+N) \quad (5)$$

여기서,

$$\Phi_d = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad E_d = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ I]^T$$

(3)과 (5)를 조합하면 다음과 같은 확장된 상태방정식을 얻

을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} x_p(k+1) \\ x_d(k+1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_p & \Gamma_{pd} \\ 0 & \Phi_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_p(k) \\ x_d(k) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_{p1} \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \\ + \begin{bmatrix} \Gamma_{p2} \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ E_d \end{bmatrix} v(k+N) \quad (6)$$

여기서, $\Gamma_{pd} = [\Gamma_{p3} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$

(6)에서 $v(k+N)$ 은 가장 먼 미래의 외란 신호로서 시스템에 미치는 영향이 상대적으로 아주 작기 때문에 이를 무시하고, 확장된 상태방정식을 다음과 같이 간략히 표현한다.

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma_1 w(k) + \Gamma_2 u(k) \quad (7)$$

그리고 적당히 고려되는 제어 대상변수 z 및 측정변수 y 를 포함한 일반화 플랜트 G 를 다음과 같은 선형 차분방정식으로 정의한다.

$$G: \begin{Bmatrix} x(k+1) \\ z(k) \\ y(k) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(k) \\ w(k) \\ u(k) \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서, u, y, w, z 의 차원(dimension)은 각각 m, g, l, p 라고 가정한다.

이제 앞선 정보를 알 수 있는 외란신호 v 를 이용한 예견제어와 함께, 나아가 측정 피드백 H_∞ 제어법칙을 얻기 위한 첫 번째 단계로서, 우선 다음 식을 만족하는 FI(Full Information) H_∞ 제어문제[6]를 고려하기로 한다.

$$\|z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 \leq -\varepsilon \|w\|_2^2 \\ (\text{또는 } \|F_l(G, K)\| < \gamma) \quad (9)$$

우선, 일반화 플랜트 모델 (8)에서 다음과 같은 적당한 시스템 방정식을 고려한다 여기서 제어대상 $z(k)$ 와 관계하는 행렬 C_1, D_{11}, D_{12} 는 미리 압연 제어시스템의 특성에 대응하여 표현하였다.

$$\begin{Bmatrix} x(k+1) \\ z(k) \\ w(k) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ [C_{p1}] & [D_{p11}] & [0 \\ 0 & I_l & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(k) \\ w(k) \\ u(k) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

그리고 전개의 편의상, 위 시스템 행렬을 다음과 같이 간략화하여 정의한다.

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & [\Gamma_1 \ \Gamma_2] \\ [C_{p1}] & [D_{p11} \ 0 \\ 0 & I_l \ 0 \end{bmatrix}$$

정리 1: [6] (11)로 표현되는 제어대수 Riccati 방정식이 조건(12), (13)을 만족시키면서 페루프 시스템행렬 ($\bar{A} - \bar{B}R^{-1}L$)을 점근적으로 안정시키는 하나의 해를 가지기만 하면, (9)를 만족시키는 시불변, 안정화 FI 제어기가 존재한다.

$$X_\infty = \bar{C}^T J \bar{C} + \bar{A}^T X_\infty \bar{A} - L^T R^{-1} L \quad (11)$$

$$X_\infty \geq 0 \quad (12)$$

$$R_1 - R_2^T R_3^{-1} R_2 \equiv \nabla < 0 \quad (13)$$

여기서,

$$R \equiv \begin{bmatrix} R_1 & R_2^T \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} = \bar{D}^T J \bar{D} + \bar{B}^T X_\infty \bar{B} \quad (14)$$

$$L \equiv \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \bar{D} J \bar{C} + \bar{B}^T X_\infty \bar{A} \quad (15)$$

$$J = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_l \end{bmatrix} \quad (16)$$

이때, 안정화 FI 제어기는 다음과 같다.

$$u(k) = -R_3^{-1} [L_2 \ R_2] \begin{Bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{Bmatrix} \quad (17)$$

일반적으로 $w(k)$ 를 측정할 수 없는 경우, FI 제어기를 대신하여 상태 피드백 제어법칙이 요구된다. 이때 (13)은 $R_1 < 0$ 으로 대체되고, 중심 상태피드백 제어기는 다음과 같다.

$$u(k) = K x(k) = R_I^{-1} (L_2 - R_2 R_1^{-1} L_1) x(k) \quad (18)$$

여기서, $R_I = -(R_3 - R_2 R_1^{-1} R_2^T)$

증명: 생략[4]

예견 제어게인의 분리도출

이제 (10)의 확장된 상태벡터 x 에 포함된 x_p 및 x_d 에 각각 대응되는 제어게인들을 분리 표현하기로 한다. 즉, $u = Kx(k) = [K_x \ K_d] \begin{bmatrix} x_p(k) \\ x_d(k) \end{bmatrix}$ 에서 피드포워드 제어를 위한 예견 제어게인 K_d 와 상태피드백게인 K_x 를 분리한다. 우선 (14), (15)의 R 및 L 에 (10)의 행렬들을 대응시키면 다음과 같다.

$$R = \begin{bmatrix} -\gamma^2 I_l + D_{\rho 1}^T D_{\rho 1} + \Gamma_1^T X_\infty \Gamma_1 & \Gamma_1^T X_\infty \Gamma_2 \\ \Gamma_2^T X_\infty \Gamma_1 & D_{\rho 2}^T D_{\rho 2} + \Gamma_2^T X_\infty \Gamma_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$L = \begin{bmatrix} \Gamma_1^T X_\infty \Phi \\ \Gamma_2^T X_\infty \Phi \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\bar{C}^T J \bar{C} = C_{\rho 1}^T C_{\rho 1} \quad (21)$$

이때 대수 Riccati 방정식(11)에 위 결과들을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X_\infty &= C_{\rho 1}^T C_{\rho 1} + \Phi^T X_\infty \Phi - \Phi^T X_\infty^T \bar{B} R^{-1} \bar{B}^T X_\infty \Phi \\ &= \Phi^T [X_\infty - X_\infty^T \bar{B} R^{-1} \bar{B}^T X_\infty] \Phi + C_{\rho 1}^T C_{\rho 1} \\ &= \Phi^T M_\infty \Phi + C_{\rho 1}^T C_{\rho 1} \end{aligned} \quad (22)$$

여기서, $M_\infty = X_\infty - X_\infty^T \bar{B} R^{-1} \bar{B}^T X_\infty$

행렬 X_∞ 와 M_∞ 를 x_p 및 x_d 에 대응되게 분해하고, 상태공간 방정식(6)와 조합하여 다시 표현하면 다음과 같다. 이때 $C_{\rho 1}$ 도 x_p 및 x_d 에 대응되게 $C_{\rho 1} \equiv [C_{\rho 11} \ C_{\rho 12}] = [C_{\rho 11} \ 0]$ 로 분리한다.

$$\begin{aligned} X_\infty &\equiv \begin{bmatrix} X_{pp} & X_{pd} \\ X_{pd}^T & X_{dd} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_p^T & 0 \\ \Gamma_{pd}^T & \Phi_d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{pp} & M_{pd} \\ M_{pd}^T & M_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_p & \Gamma_{pd} \\ 0 & \Phi_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{\rho 11}^T C_{\rho 11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_p^T M_{pp} \Phi_p + C_{\rho 11}^T C_{\rho 11} & \Phi_p^T M_{pp} \Gamma_{pd} + \Phi_p^T M_{pd} \Phi_d \\ (\Phi_p^T M_{pp} \Gamma_{pd} + \Phi_p^T M_{pd} \Phi_d)^T & X_{dd} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

여기서,

$$X_{dd} = \Gamma_{pd}^T + \Phi_d^T M_{pd} + (\Gamma_{pd}^T M_{pd} + \Phi_d^T M_{dd}) \Phi_d$$

위와 같은 방법으로 M_∞ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_\infty &\equiv \begin{bmatrix} M_{pp} & M_{pd} \\ M_{pd}^T & M_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{pp} & X_{pd} \\ X_{pd}^T & X_{dd} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_{pp} & X_{pd} \\ X_{pd}^T & X_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{p1} & \Gamma_{p2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma_{p1}^T & 0 \\ \Gamma_{p2}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{pp} & X_{pd} \\ X_{pd}^T & X_{dd} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_{pp} & X_{pd} \\ X_{pd}^T & X_{dd} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{pp} \Gamma_{p1} & X_{pp} \Gamma_{p2} \\ X_{pd}^T \Gamma_{p1} & X_{pd}^T \Gamma_{p2} \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma_{p1}^T X_{pp} & \Gamma_{p1}^T X_{pd} \\ \Gamma_{p2}^T X_{pp} & \Gamma_{p2}^T X_{pd} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

그리고 전체 페루프 시스템행렬 Φ_{cl} 로부터 상태벡터 x_p 에만 대응하는 페루프 시스템행렬 Φ_{cp} 는 다음과 같다.

$$\Phi_{cp} = (I - [\Gamma_{p1} \ \Gamma_{p2}] R^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma_{p1}^T \\ \Gamma_{p2}^T \end{bmatrix}) X_{pp} \Phi_p \quad (25)$$

한편, (23)의 X_{pp} 및 X_{pd} 를 (24)의 M_{pp} , M_{pd} 와 조합하면 다음과 같은 대수 Riccati 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} X_{pp} &= \Phi_p^T M_{pp} \Phi_p + C_{\rho 11}^T C_{\rho 11} \\ &= \Phi_p^T X_{pp} \Phi_p - \Phi_p^T X_{pp} [\Gamma_{p1} \ \Gamma_{p2}] R^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma_{p1}^T \\ \Gamma_{p2}^T \end{bmatrix} X_{pp} \Phi_p \\ &\quad + C_{\rho 11}^T C_{\rho 11} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
 X_{pd} &= \Phi_p^T M_{pp} \Gamma_{pd} + \Phi_p^T M_{pd} \Phi_d \\
 &= \Phi_p^T (I - X_{pp} [\Gamma_{p1} \ \Gamma_{p2}]) R^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma_{p1}^T \\ \Gamma_{p2}^T \end{bmatrix} X_{pp} \Gamma_{pd} \\
 &+ \Phi_p^T (I - X_{pp} [\Gamma_{p1} \ \Gamma_{p2}]) R^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma_{p1}^T \\ \Gamma_{p2}^T \end{bmatrix} X_{pd} \Phi_d \quad (27)
 \end{aligned}$$

이때 X_∞ 의 부분행렬 X_{pp} 및 X_{pd} 는 Φ_{cp} 를 이용하면 다음과 같이 간단하게 표현된다.

$$X_{pp} = \Phi_{cp}^T X_{pp} \Phi_d + C_{p11}^T C_{p11} \quad (28)$$

$$X_{pd}(0) = \Phi_{cp}^T X_{pp} \Gamma_d \quad (29a)$$

$$X_{pd}(1) = \Phi_{cp}^T X_{pd}(0) = (\Phi_{cp})^2 X_{pp} \Gamma_d \quad (29b)$$

⋮

$$X_{pd}(N-1) = (\Phi_{cp})^N X_{pp} \Gamma_d \quad (29c)$$

여기서, $X_{pd} = [X_{pd}(0) \ X_{pd}(1) \ \dots \ X_{pd}(N-1)]$

X_{pd} 가 (29)와 같이 분해구조로 간단하게 표현될 수 있는 것은 Φ_d 가 동반행렬(companion matrix)의 형식을 가지고, Γ_{pd} 또한 간단한 구조이기 때문이다. 이 결과는 X_{pd} 가 피드백 상태변수 x_p 에 대응되는 페루프시스템 행렬 Φ_{cp} 및 이를 얻기 위한 대수 Riccati 방정식의 부분해 X_{pp} 에서 완전히 결정됨을 알 수 있다.

이제 정리 1 및 (28), (29)의 결과를 이용하여 H_∞ 상태 피드백 제어게인 및 예견 제어게인이 다음의 G_p 에서 얻어질 수 있음을 알 수 있다. 여기서 G_p 는 (8)에서 v 의 미래신호 즉, x_d 를 근본적으로 배제한 FI 일반화 플랜트 모델이다.

$$G_p \begin{bmatrix} x_p(k+1) \\ z(k) \\ y_{FI}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_p & \Gamma_{p1} & \Gamma_{p2} \\ \left[\begin{array}{c} C_{p11} \\ 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} D_{p11} \\ 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 0 \\ D_{p12} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} I \\ 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 0 \\ I \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(k) \\ w(k) \\ z(k) \end{bmatrix} \quad (30)$$

정리 2[5]: 우선 일반화 플랜트 G_p 에서 다음과 같은 전제조건이 만족된다고 가정한다.

a) $[\Phi_p \ \Gamma_{p2}]$ 는 안정가능하다.

b) $\text{rank} \begin{bmatrix} \Phi_p - e^{j\theta} I & \Gamma_{p2} \\ \left[\begin{array}{c} C_{p11} \\ 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 0 \\ D_{p12} \end{array} \right] \end{bmatrix} = n + m$
 $\theta \in (-\pi, \pi)$

이때, $\|F_I(G_p, K)\|_\infty < \gamma$ 를 만족하는 상태 피드백게인 K_x 및 예견 제어게인 K_d 는 다음과 같다.

$$K_x = R_I^{-1} \Omega X_{pp} \Phi_p \quad (31)$$

$$K_{d0} = R_I^{-1} \Omega X_{pp} \Gamma_d \quad (32a)$$

$$K_{d1} = R_I^{-1} \Omega (\Phi_{cp}^T) X_{pp} \Gamma_d \quad (32b)$$

$$\begin{aligned}
 &\vdots \\
 K_{dN} &= R_I^{-1} \Omega (\Phi_{cp}^T)^N X_{pp} \Gamma_d \quad (32c)
 \end{aligned}$$

여기서, $K_d = [K_{d0} \ K_{d1} \ \dots \ K_{dN}]^T$ 이며, Ω 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \Omega &\equiv \Gamma_{p2}^T (I - X_{pp} \Gamma_{p1} (-\gamma^2 I_I + D_{p11}^T D_{p11} \\
 &+ \Gamma_{p1}^T X_{pp} \Gamma_{p1})^{-1} \Gamma_{p1}^T) \quad (33)
 \end{aligned}$$

위와 같이 피드백 제어게인 K_x 뿐만 아니라 예견 제어게인 K_d 도 Riccati 방정식의 해 X_{pp} 에서 완전히 얻어질 수 있음을 알 수 있다. X_{pd} 는 v 의 미래신호가 상태변수로 확장되기 전의 상태변수만과 관계된 부분해이다. 즉, X_{pp} 는 확장된 플랜트 모델 (8)이 아닌 원래의 일반화 플랜트 모델 G_p 로부터 도출될 수 있으므로, FI 또는 상태 피드백 H_∞ 문제와 관련된 Riccati 방정식의 해 X_{pp} 만 알 수 있다면, 예견 제어게인은 자동적으로 결정됨을 의미한다.

IV. 출력 피드백 H_∞ 문제의 제어 및 추정의 분리

1 필터링(filtering) 문제

앞 절에서는 전 상태변수를 측정가능한 것으로 가정하여 상태 피드백게인 및 예견 제어게인을 분리 도출하였다. 그러나 본 논문의 제어대상 플랜트인 링강 압연모델은 일부 측정할 수 없는 상태변수 때문에 측정변수 피드백 제어 시스템이 바람직하다. 그리고 전-상태 피드백에 근거하여 얻어진 예견 제어게인을 손상시키지 않기 위해서는, 측정변수 피드백 문제에서 수반되는 추정문제를 제어문제와 분리할 필요가 있다.

우선, 필터링 문제를 다음과 같은 식으로 표현하기로 한다.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_p(k+1) \\ \hat{z}(k) - z(k) \\ y(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_p & \Gamma_1 & 0 \\ C_1 & D_{11} & I \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(k) \\ w(k) \\ \hat{z}(k) \end{bmatrix}, \quad x_0 = 0 \\
 \hat{z} &= Fy \quad (34)
 \end{aligned}$$

이때 필터링 문제는 다음 식을 만족하는 z 의 추정신호 \hat{z} 을 찾는 것이다.

$$\|\hat{z} - z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 \leq -\epsilon \|w\|_2^2, \quad \epsilon > 0 \quad (35)$$

그리고 (34)로 표현되는 시스템의 어조인트(adjoint) 시스템[8]은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} p(k-1) \\ \hat{z}(k) \\ \tilde{w}(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A^T & C_1^T & C_2^T \\ \Gamma_1^T & D_{11}^T & D_{21}^T \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(k) \\ \tilde{w}(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix}, \quad p_\infty = 0 \\
 \tilde{u} &= \tilde{F} \tilde{w} \quad (36)
 \end{aligned}$$

이는 외형상 제어가 상태 p 가 아니라 외부신호 \tilde{w} 를 이용하는 제어문제이다. 그러나 필터링 문제는 상태 p

자체가 아니라 상태의 복사(\hat{p})를 이용하기 때문에, 이는 제어가 존재하기 위한 조건에 아무런 영향을 주지 않는다. 이제 (36)의 형태로부터 FI 제어문제의 정리를 이용하면, 즉시 다음과 같은 정리의 유도가 가능하다.

정리 3 [6]: 필터 대수 Riccati 방정식 (37)이 조건(38), (39)를 만족시키면서 페루프 시스템 행렬 $(A - MS^{-1}C)$ 를 지수적으로 안정하게 하는 하나의 해가 존재하지만 하면, (35)를 만족하는 적절한 필터 F 가 존재한다.

$$Y_{\infty} = \tilde{B} \tilde{J} \tilde{B}^T + A Y_{\infty} A^T - M S^{-1} M^T \quad (37)$$

$$Y_{\infty} \geq 0 \quad (38)$$

$$(S_1 - S_2 S_3^{-1} S_2^T) < 0 \quad (39)$$

위 식에서, 행렬 S 와 M 은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$S \equiv \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{bmatrix} = \tilde{D} \tilde{J} \tilde{D}^T + C Y_{\infty} C^T \quad (40)$$

$$M = \tilde{B} \tilde{J} \tilde{D}^T + A Y_{\infty} C^T \quad (41)$$

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_p \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\text{그리고, } \begin{bmatrix} A & \tilde{B} \\ C & \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_p & \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ D_{11} & I_p \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{21} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (43)$$

이때 (35)를 만족하는 중심 필터(central filter)는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_p(k+1) &= A \hat{x}_p(k) + M_2 S_3^{-1} (y(k) - C_2 \hat{x}_p(k)) \\ \hat{z}(k) &= -C_1 \hat{x}_p(k) - S_2 S_3^{-1} (y(k) - C_2 \hat{x}_p(k)) \end{aligned} \quad (44)$$

증명: FI 제어문제(정리 1)와 듀얼(dual)관계이므로 생략한다.

위 H_{∞} 필터는 이노베이션(innovation) $y - C_2 \hat{x}$ 에 의해 구동되는 관측기(observer) 구조를 갖는다. 그러나 Kalman 필터와는 달리, 필터 게인행렬 $M_2 S_3^{-1}$ 을 정의하는 Riccati 방정식이 C_1 에 의존하기 때문에 \hat{x} 가 C_1 에 의존한다. 즉, H_{∞} 필터에서는 상태추정이 추정하고자 하는 상태들의 선형결합에 의존한다. 이것이 Kalman 필터와 H_{∞} 필터와의 중요한 차이점이며, LQG와 달리 제어와 추정문제의 완전한 분리를 어렵게 한다. 그림 2는 H_{∞} 필

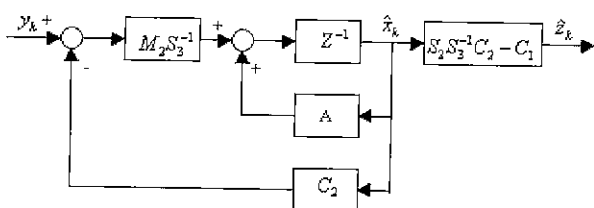


그림 2. H_{∞} 필터.
Fig. 2. An H_{∞} filter.

터의 구조를 나타내는 블록선도이다.

2 측정변수 피드백 문제

이제 (8)과 같이 주어진 플랜트 $G(D_{22} = 0)$. 엄밀하게는 G_p 에 대한 H_{∞} 일반화된 레귤레이터 문제를 해결하기 위하여, 필터링 문제와 FI 제어문제를 분리하기로 한다. 우선 FI 제어문제의 해를 얻는 과정[7][8]에서 유도되는 $u^*(k)$ 와 $w^*(k)$ 는 다음과 같다. 여기서, u^* 는 외란입력 w 가 고정된 상태에서 주어진 가격함수를 최소화하는 제어입력이고, w^* 는 제어입력 u 가 고정된 상태에서 가격함수를 최대화 하는 최악의 외란이다.

$$\begin{bmatrix} w^*(k) \\ u^*(k) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla^{-1} L_{\nabla} & 0 \\ R_3^{-1} L_2 & R_3^{-1} R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \quad (45)$$

여기서, $L_{\nabla} = L_1 - R_2^T R_3^{-1} L_2$

그리고, 편의상 새로운 변수 $s(k)$, $r(k)$ 를 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$\begin{bmatrix} s(k) \\ r(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{21} & 0 \\ 0 & V_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(k) - w^*(k) \\ u(k) - u^*(k) \end{bmatrix} \quad (46)$$

여기서, V_{12} 와 V_{21} 은 다음 식을 만족시키는 $(m \times m)$ 행렬 및 $(l \times l)$ 행렬이다.

$$V_{12}^T V_{12} = R_3, \quad V_{21}^T V_{21} = -\gamma^2 \nabla \quad (47)$$

이때, 다음 식이 성립한다.

$$\|z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 = \|r\|_2^2 - \gamma^2 \|s\|_2^2 \quad (48)$$

이제 (9)를 만족시키는 측정변수 피드백 제어기 $u = Ky$ 를 가정하기로 한다. 이때 다음 식이 만족되어야 한다.

$$\|r\|_2^2 - \gamma^2 \|s\|_2^2 \leq -\epsilon \|s\|_2^2, \quad \epsilon > 0 \quad (49)$$

한편, (45), (46)에서 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$w(k) = V_{21}^{-1} s(k) - \nabla^{-1} L_{\nabla} x(k) \quad (50)$$

여기서, 플랜트모델 (8)과 관련하여 외부 입력변수 $s(k)$ 에서 제어대상 변수 $r(k)$ 로 변환시킨 LFT는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ r(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \Gamma_1 \nabla^{-1} L_{\nabla} & \Gamma_1 V_{21}^{-1} & \Gamma_2 \\ V_{12} R_3^{-1} (L_2 - R_2 \nabla^{-1} L_{\nabla}) & V_{12} R_3 V_{21}^{-1} & V_{12} \\ C_2 - D_{21} \nabla^{-1} L_{\nabla} & D_{21} V_{21}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ s(k) \\ u(k) \end{bmatrix}$$

$$u = Ky \quad (51)$$

$r = V_{12}(u - u^*)$ 이므로 이 신호는 $(u - u^*)$ 를 스케일(scale)한 것이다. (49)는 s 에서 r 로의 페루프 시스템이 γ 보다 작은 유도 놈(induced norm)을 가질 것을 요구

한다. 그러므로 제어입력 u 를 이용하려고 하는 u^* 에서 너무 멀리 떨어지지 않도록 필터 K 를 선정할 필요가 있다. 이는 r 이 충분히 작도록 필터 K 를 찾는 추정문제이다.

이제 앞서 기술된 H_∞ 필터링 결과를 이용하여 이 수정된 (49)를 해결하려고 한다. 그러나 (51)로 표현된 이 추정 문제는 (34)의 순수 필터링 문제와 두 가지 차이점을 가지고 있다. 첫째는 필터 K 의 출력 u 가 동역학에 영향을 준다는 것이다. 이는 해를 위한 조건에는 아무런 차이를 주지 않지만, 단지 $B_2 u$ 가 더해짐으로써 $\hat{x}(k+1)$ 에 대한 추정방정식을 수정시킨다. 또 다른 차이점은 필터의 출력 u 와 추정오차 r 간의 사상(map) V_{12} 이다. 그러나 V_{12} 는 정칙(nonsingular) 행렬이기 때문에 해를 위한 조건들에는 아무런 차이를 주지 않으며, 단지 요구되는 것은 $K = V_{12}^{-1} [V_{12} K]$ 이므로, 필터출력을 V_{12}^{-1} 로 스케일하는 것이다.

이때 이 결과적인 H_∞ 추정문제를 풀기 위하여, 앞서 일반적인 필터링 문제에서 주어진 (34) 또는 (43)에 대응되는 시스템 행렬 및 필터대수 Riccati 방정식은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} A_m & \hat{B}_m \\ C_m & \hat{D}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \Gamma_1 \nabla^{-1} L_\nabla & [\Gamma_1 V_{21}^{-1} & 0] \\ V_{12} R_3^{-1} (L_2 - R_2 \nabla^{-1} L_\nabla) & [V_{12} R_3^{-1} R_2 V_{21}^{-1} & I] \\ C_2 - D_{21} \nabla^{-1} L_\nabla & [D_{21} V_{21}^{-1} & 0] \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$Z_\infty = \hat{B}_m \hat{J} \hat{B}_m^T + A_m Z_\infty A_m^T - M_m S_m^{-1} M_m^T \quad (53)$$

여기서,

$$S_m \equiv \begin{bmatrix} S_{m1} & S_{m2} \\ S_{m2}^T & S_{m3} \end{bmatrix} = \hat{D}_m \hat{J} \hat{D}_m^T + C_m Z_\infty C_m^T \quad (54)$$

$$M_m \equiv \begin{bmatrix} M_{m1} \\ M_{m2} \end{bmatrix} = \hat{B}_m \hat{J} \hat{D}_m^T + A_m Z_\infty C_m^T \quad (55)$$

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_m \end{bmatrix} \quad (56)$$

그리고 (49) 즉, (9)를 만족하는 제어가 존재하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$Z_\infty \geq 0 \quad (57)$$

$$(S_{m1} - S_{m2} S_{m3}^{-1} S_{m2}^T) < 0 \quad (58)$$

이때, 제어목적을 만족시키는 중심 제어기(central controller)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A_m \hat{x}(k) + \Gamma_2 u(k) \\ &\quad + M_{m3} S_{m3}^{-1} (y(k) - C_{m2} \hat{x}(k)) \\ V_{12} u(k) &= -C_{m1} \hat{x}(k) - S_{m2} S_{m3}^{-1} (y(k) \\ &\quad - C_{m2} \hat{x}(k)) \end{aligned} \quad (59)$$

V. 냉간 압연 제어시스템 설계 및 시뮬레이션
본 논문의 냉간 압연 제어시스템에서 고려된 외란은 일

측 두께변동과 롤편심이다. 입측 두께변동은 당 압연스탠드의 관점에서는 압연소재의 두께 불균일 또는 용접이음부 등을 포함하며, 앞서 측정가능한 신호이다. 이는 롤속도가 상대적으로 아주 느린 열간 또는/그리고 냉간 압연시스템의 전방 스탠드를 통과하면서 기인된 것으로 저주파신호의 특성을 가진다. 반면 롤편심의 주파수 특성은 제어대상 압연기의 정상 롤속도 (ω_0)와 직접 관계하는 것으로, 입측 두께변동에 비해 고주파 신호이다.

따라서 H_∞ 피드백 제어시스템 설계시 롤편심 외란을 주요하게 제거할 목적으로 다음과 같이 허수축상의 극점 ($\pm j\omega_0$)을 갖는 무게함수 W_w 를 외란입력 채널에 포함하였다.

$$W_w(s) = \frac{s^2 + 2\xi \omega_0 s + \omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} I_2 \quad (60)$$

그리고 압연 제어시스템의 저감도화를 고려하여 출력 채널에 포함된 W_s 는 저주파역에서 게인이 크고, 고주파역에서 게인이 작도록 (61)과 같은 무게함수 형태로 선정하였다. 그리고 제어입력 채널에 연결된 W_u 는 (62)와 같이 제어시스템의 과도한 차수를 피하기 위해 LQ 최적제어시 [1]의 제어입력 가중행렬과 동일한 상수 행렬로 선정하였다.

$$W_s(s) = \frac{a}{s + 0.001} I_2 \quad (61)$$

$$W_u = \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (62)$$

여기서, a 및 ρ 는 설계 파라미터이다.

우선, 압연공정 모델에 대하여 위의 연속시간 무게함수들을 고려한 일반화 플랜트 모델을 구축하였다. 그리고 이산시간 모델로 변환한 후, 앞서 기술한 설계절차에 따라 제어가 설계를 수행하였다 이 때 무게함수의 파라미터 ξ 와 a, ρ 는 안정한 해가 존재하고, 적절한 성능을 갖는 제어시스템이 설계되도록 시행착오를 통해 선정하였다

본 시뮬레이션에 이용된 외란입력 신호들(그림 3)은 가능한 한 실제적인 외란의 특성을 반영하기 위하여 입측 두께변동 (v)는 용접이음부 및 압연모재(전방 스탠드에서의 출측 두께)의 불균일성 등을 고려하여 각각 스텝 및 1 Hz (이하)의 정현파신호, 그리고 롤편심 (w)는 본 압연모델의 백업을 정상 회전주기에 대응한 4 Hz 와 이의 3차 조화 성분으로 가정하였다.

그림 4와 그림 5는 참고문헌[1][2]에서 제안한 피드포워드 롤편심 제어 및 LQ 제어 그리고 H_∞ 제어와 본 논문이 제안한 H_∞ 피드백 및 예견 제어의 외란 제거성능을 비교한 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 본 논문에서 제안한 H_∞ 피드백 및 예견 제어는 기존의 제어기법들에 비해 보다 강력한 외란제거 성능을 보여준다. 즉, H_∞ 피드백 제어에 의한 성능도 유지되면서, 예견 제어에 의해 입측 두께변동 외란성분이 거의 제거됨을 보여주고 있다. 이는 예견제어가 일종의 피드포워드 제어기로서 피드백 제어시

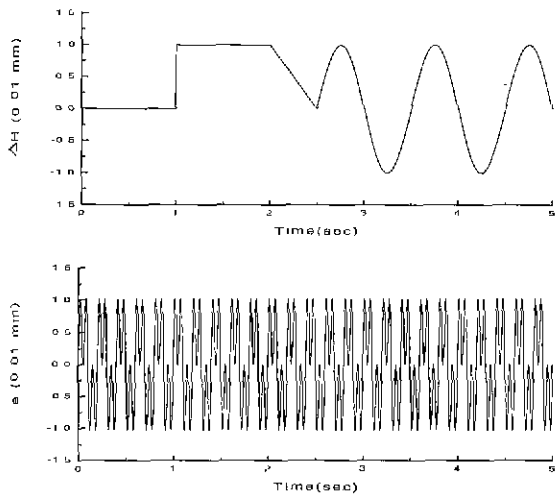


그림 3. 입측 두께 변동 및 롤편심 (외란 신호들).
Fig. 3. Entry thickness variation and roll eccentricity (disturbance signal).

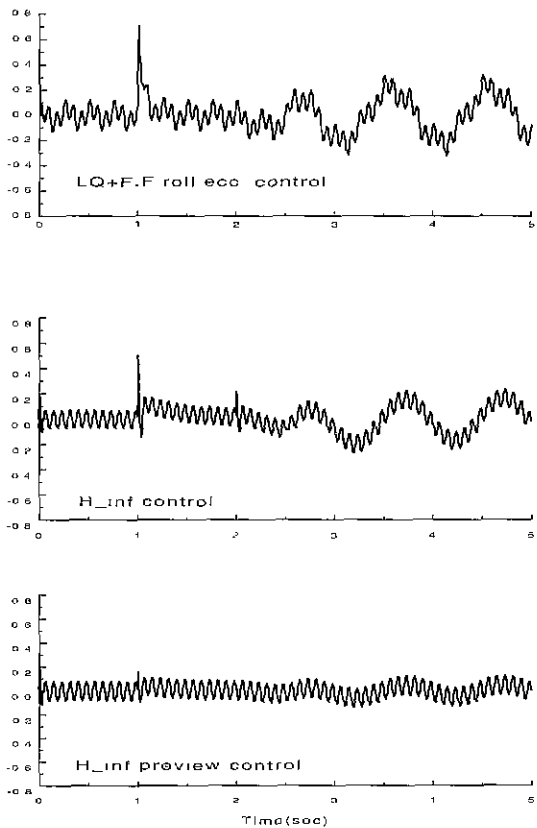


그림 4. 제어시스템들에 대한 출측두께 변동의 시간 응답.
Fig. 4. Time responses of delivery thickness variation for mill control systems.

스텝의 성능에 거의 영향을 주지 않기 때문이다.

VI. 결론

본 논문에서는 다변수 냉간 압연시스템의 실제적인 입출력 특성에 대응하여 강력한 외란 제거성능을 얻기 위한

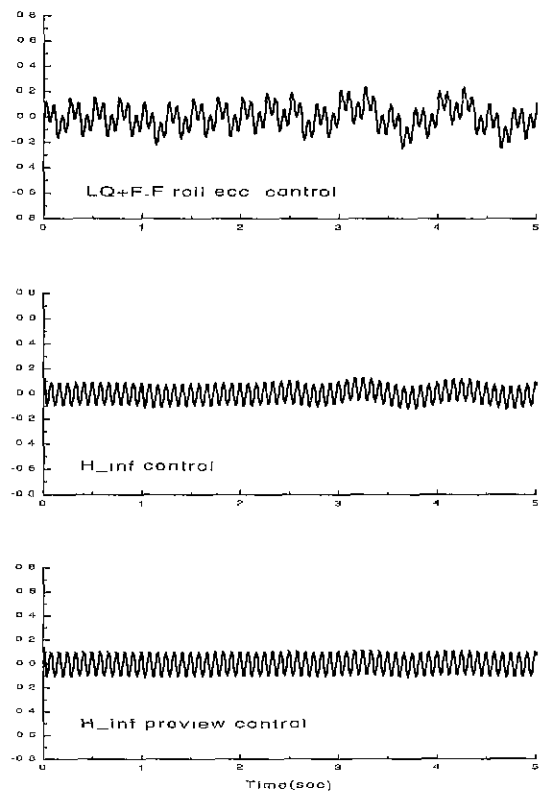


그림 5. 제어시스템들에 대한 후방장력 변동의 시간응답.
Fig. 5. Time responses of backward tension variation for mill control systems.

이산시간 H_{∞} 출력 피드백 및 예견 제어기법을 제안하였다. 이때, 필터는 예견가능한 외란 입력요소에 대한 예견 제어게인을 얻기 위한 상태 피드백 제어와 분리 설계하였다. 이로 인해 H_{∞} 예견 제어게인도 결과적으로는 미래의 신호를 상태변수로 포함하기 전의 설계 플랜트모델에 근거한 상태 피드백 제어의 결과에서 결정됨을 보였다. 이는 실시간 제어시 연산시간을 줄이는 데도 기여할 수 있을 것으로 사료된다. 마지막으로 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 냉간 압연시스템에 대한 본 제어기법을 적용은 기대한 바대로, H_{∞} 예견 제어에 의한 입측 두께변동 외란요소의 거의 완전한 제거는 물론 H_{∞} 피드백 제어에 의한 롤편심 외란제거 성능도 개선할 수 있음을 확인하였다.

참고문헌

[1] 김종식, 김승수, "롤편심을 포함한 냉간압연 시스템의 다변수제어", 대한기계학회 논문집, 제21권, 제3호, pp. 502~510, 1997.
[2] 김종식, 김승수, " H_{∞} 제어기법에 의한 연속 냉간 압연시스템의 두께제어" 한국정밀공학회 논문집, 제15권, 제8호, pp. 145~155, 1998.
[3] Tomizuka, M., "The optimal finite preview problem and its application to man-machine systems," Ph. D. Thesis, Dept. of Mecanical

Engineering, M.I.T., 1974.

- [4] Tomizuka, M. and Rosenthal, D. E., "On the optimal digital state vector feedback controller with integral and preview actions", *ASME J. of Dynamic systems, Measurement and Control*, vol. 101, pp. 172~178, 1979.
- [5] 최진태, "예측가능한 외란과 미지의 외란에 대한 H_∞ 예견제어", 부산대학교 박사학위 논문, 1997.
- [6] Green, M. and Limebeer, D. J. N., " H_∞ Optimal Full Information Control for Discrete-time

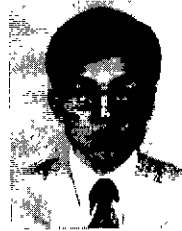
Systems", *Proc. of The IEEE Conference on Decision and Control*, Honolulu, pp. 1769~1774, 1990.

- [7] D. J. N. Limebeer and M. Green, *Linear Robust Control*, Prentice Hall, 1995.
- [8] Stroorvogel, A. A., "The discrete-time H_∞ control problem with measurement feedback", *SIAM J. of Control and Optimization*, vol. 20, no. 1, pp. 180~ 202, 1992.



김 승 수

1961년 10월 2일생. 1987년 부산대 기계공학과 졸업. 동대학원 공학석사(1991), 동대학원 공학박사(1999). 관심분야는 선형강인제어, 공정시스템 제어, 시스템 모델링 및 해석.



김 종 식

1954년 3월 30일생. 1977년 서울대 기계설계공학과 졸업. 1979년 한국과학기술원 기계공학과 공학석사. 1987년 M.I.T 기계공학과 공학박사. 관심분야는 다변수 비선형 강인제어, 차량 및 생산시스템 동역학 및 제어.