

선형/비선형 슬라이딩 패치 및 스택현상과 그 응용

Linear/Nonlinear Sliding Patch and Stuck Phenomena and Applications of Linear/Nonlinear Sliding Patch and Stuck

김진환, 함운철
(Jin-Wan Kim and Woon-Chul Ham)

Abstract : In this short note, the characteristics of a nonlinear system of which the state trajectories are oscillating in the phase plane are overviewed. The physical concept of stuck and sliding patch phenomena are also introduced by adding some switching functions and their stability on the sliding patches are analyzed by using the Lyapunov stability theory and Frobenius theorem.

Keywords : stuck, sliding patch, switching function, nonlinear, Lyapunov, Frobenius

I. 서론

V. I. Utkin에 의하여 1970년대 초 가변구조제어이론[1]이 소개된 이후 현재까지도 이 분야의 연구는 꾸준히 발전되어 오고 있다. 초기의 가변구조제어이론들은 선형시스템에 불확실한 항들이 있는 경우에 견실성을 갖도록 하는 연구방향으로 많이 진행되어 왔으며, 현재에 이르러서는 많은 연구자들에 의하여 채털링문제[2][3], 비선형 시스템의 적용문제[4], 비선형 스위칭함수의 도입문제[5][6], 퍼지 제어 및 신경망제어와의 결합문제[7]등 여러 분야의 연구가 활발히 진행되고 있는 실정이다. 이 가운데 채털링문제를 간과 할 수 없는 이유 중에 한 예를 든다면 DC 모터 위치제어를 들 수 있다. 만일 채털링문제를 고려하지 않고 순수하게 가변구조제어이론에 의거하여 제어를 구성할 경우, 대부분의 경우에 DC모터가 원하는 위치에 도달되어 정지된 이후에도 계속적으로 on-off 아마추어 전압(평균적으로는 0)이 걸리게 되어 DC모터에서 열이 계속적으로 발생됨으로써 시스템의 불량요인으로 작용될 수 있다. 따라서 제어이론을 실 공정에 적용할 때는 이러한 채털링 이외에도 고장을 개선을 위하여 여러 가지 대책 또한 고려하여야 한다. 본 논문에서는 본 연구자에 의하여 기존에 연구되었던 비선형 시스템에 적용 가능한 가변구조제어이론[5][6] 가운데서도 비선형 스위칭 함수를 활용하기 위한 방법들을 모색하고 정리하여 보았다. 본 논문을 통하여 스택(stuck)현상이라 명명한 새로운 개념을 소개하고 아울러 기존 연구자들에 의하여 소개되었던 슬라이딩 패치현상을 비선형 시스템에 확대 적용하여 정리하였다. 아울러 제안된 안정된 슬라이딩 패치 현상을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 확인하였다 또한 본 연구에서 소개된 슬라이딩 패치

현상의 구체적인 활용 방안의 한 사례로써 G. Bartolini [2][3]등에 의하여 최근 활발히 연구되고 있는 확대 플랜트 슬라이딩 모드 제어기의 설계 및 안정도 분석에 활용될 수 있음을 본 논문 제4장에서 살펴보았다.

II. 스택 및 슬라이딩 패치

본 장에서는 기하학적인 개념을 이용하여 2차 비선형 상태방정식에 관한 특성에 대해서 다루기로 한다. 특별히 주기적인 현상을 나타내는 비선형 상태방정식을 정리하고, 이 비선형 상태방정식에 스위칭함수를 도입함으로써 발생할 수 있는 슬라이딩 패치와 슬라이딩 패치 상에서의 안정도를 분석한다.

1. 진동하는 비선형계

주기적인 진동현상을 나타내는 2차 비선형 상태방정식에 대하여 고찰하여 보기로 한다. 먼저 다음과 같은 일반적인 2차 비선형 상태방정식을 고려한다.

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2) \quad (2)$$

Type I. (시계방향으로 진동하는 계)

상태공간에서의 기하학적 특성을 유심히 고찰하여 보면 비선형 함수 $f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)$ 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 상태궤적이 주기적으로 진동함을 알 수 있다.

조건 A.1

$$f_1(x_1, x_2) = -f_1(x_1, -x_2) \quad (3)$$

조건 A.2

$$f_2(x_1, x_2) = f_2(x_1, -x_2) \quad (4)$$

조건 A.3

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= \begin{cases} + & \text{모든 } (x_1, x_2) \in \mathcal{R}_I \\ + & \text{모든 } (x_1, x_2) \in \mathcal{R}_II \end{cases} \\ f_2(x_1, x_2) &= \begin{cases} - & \text{모든 } (x_1, x_2) \in \mathcal{R}_I \\ + & \text{모든 } (x_1, x_2) \in \mathcal{R}_II \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

접수일자 : 1999 9 15., 수정완료 : 2000. 2. 29.

김진환, 함운철 : 전북대학교 전자정보공학부

※ 이 논문은 과학기술부·한국과학재단 지정·전라북도 지원 우수 지역협력연구센터인 전북대학교 메카트로닉스연구센터의 연구비 지원에 의해 연구되었음.

조건 A.4

$$f_1(0, x_2) \neq 0 \text{ 모든 } (0, x_2) \neq (0, 0),$$

$$f_2(x_1, 0) \neq 0 \text{ 모든 } (x_1, 0) \neq (0, 0) \quad (6)$$

Type II. (반시계 방향으로 진동하는 계)

반 시계방향으로 진동하는 비선형계는 시계방향으로 진동하는 계를 다음의 (7)과 같이 선형변환 할 경우에 선형 변환된 상태공간상에서 발생될 수 있으므로 근본적으로는 시계방향으로 진동하는 계와 비선형 함수의 특성이 같음을 알 수 있으므로 이에 대한 언급은 생략하도록 한다.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

위에 서술된 네 가지의 조건을 만족하는 비선형 시스템의 상태공간상의 대표적인 벡터 필드(Vector Field)를 표시하면 그림 1과 같다. 이 경우 x_2 축에 대하여 비대칭적인 진동이 발생됨을 예측할 수 있다.

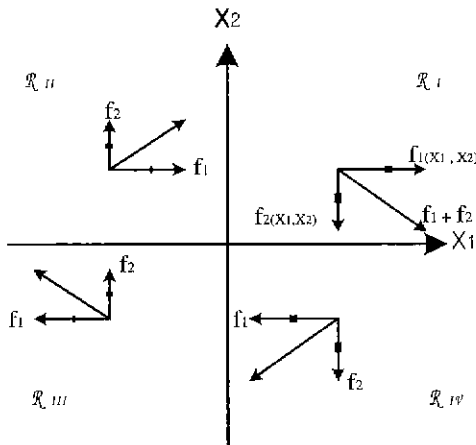


그림 1. 상태공간상의 벡터 필드.

Fig 1. Vector fields on the state space.

다음의 예제 1은 위의 네 가지 조건을 모두 만족하는 2차 비선형 시스템으로 이에 대한 상태궤적이 그림 2에 나타나 있다.

예제 1:

$$\dot{x}_1 = (x_1^2 - 2x_1 + 7)x_2 \quad (8-a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1(x_2^2 + 1), \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 20 \quad (8-b)$$

선형시스템은 비선형 시스템의 특수한 경우이므로 위에서 언급한 사실이 선형시스템에도 적용될 수 있다. 즉 위의 네 가지 조건을 모두 만족하는 2차 선형시스템의 상태궤적이 진동함을 알 수 있으며, 다음 예는 이러한 사실을 나타낸다. 참고로 이 선형시스템은 $+j, -j$ 의 고유치를 갖는다.

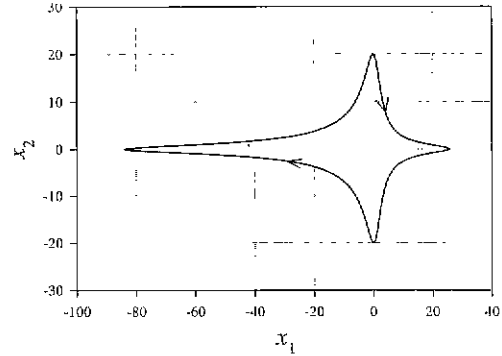


그림 2. 예제 1에 대한 상태궤적.

Fig 2. State trajectory of example 1.

예제 2:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (9-a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 \quad (9-b)$$

2. 스틱 또는 슬라이딩 패치를 갖는 비선형계

앞에서는 진동현상을 나타내는 비선형 시스템의 특성에 대하여 살펴보았으며 여기서는 스위칭함수를 추가함으로써 발생하는 스틱(stuck)현상 및 슬라이딩 패치(슬라이딩 모션과 같은 의미임)현상에 대하여 고찰하기로 한다. 스틱 현상은 상태궤적이 진행되다가 설계된 스위칭곡선상의 임의의 한 점에 도달되고는 더 이상 진행하지 않는 현상으로 정의하는 반면에, 슬라이딩 패치 현상은 상태궤적이 설계된 스위칭곡선상의 임의의 한 점에 도달된 이후에는 스위칭 곡선을 따라 상태궤적이 진행되는 현상으로 정의한다. 먼저 선형 및 비선형 스틱 또는 슬라이딩 패치 종류를 열거하면 다음과 같다.

2.1 선형 스틱 또는 슬라이딩 패치

Type SL-I

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) - k_1 \text{sgn}(x_1) \quad (10-a)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2) \quad (10-b)$$

Type SL-II

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) \quad (11-a)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2) - k_2 \text{sgn}(x_2) \quad (11-b)$$

Type SL-III

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) - k_1 \text{sgn}(ax_1 + \beta x_2) \quad (12-a)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2) - k_1 \text{sgn}(ax_1 + \beta x_2) \quad (12-b)$$

Type SL-IV

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) - k_1 \text{sgn}(ax_1 + \beta x_2) - k_2 \text{sgn}(\beta x_1 - ax_2) \quad (13-a)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2) - k_1 \text{sgn}(ax_1 + \beta x_2) - k_2 \text{sgn}(\beta x_1 - ax_2) \quad (13-b)$$

2.2 비선형 스틱 또는 슬라이딩 패치

Type SN-I

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) - k_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \operatorname{sgn}(f(x_1, x_2)) \quad (14-a)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2), \quad k_1 = -\frac{k_3}{\frac{\partial f}{\partial x_1}^2} \quad (14-b)$$

Type SN-II

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) \quad (15-a)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2) - k_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} \operatorname{sgn}(f(x_1, x_2)),$$

$$k_1 = \frac{k_3}{\frac{\partial f}{\partial x_2}^2} \quad (15-b)$$

Type SN-III

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) - k_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \operatorname{sgn}(f(x_1, x_2)) \quad (16-a)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2) - k_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} \operatorname{sgn}(f(x_1, x_2)) \quad (16-b)$$

Type SN-IV

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) - k_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \operatorname{sgn}(f(x_1, x_2))$$

$$- k_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \operatorname{sgn}(f^+(x_1, x_2)) \quad (17-a)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2) - k_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} \operatorname{sgn}(f(x_1, x_2))$$

$$- k_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \operatorname{sgn}(f^+(x_1, x_2)) \quad (17-b)$$

여기서

$$k_1 = \frac{k_3}{\frac{\partial f}{\partial x_1}^2 + \frac{\partial f}{\partial x_2}^2}, \quad k_2 = \frac{k_4}{\frac{\partial f^+}{\partial x_1}^2 + \frac{\partial f^+}{\partial x_2}^2}$$

단, 위의 식들에서 $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ 은 모두 임의의 양의 상수이며, 비선형계의 경우 $f(0, 0) = 0, f^+(0, 0) = 0$ 이어야 하며 $f(x_1, x_2)$ 와 $f^+(x_1, x_2)$ 는 아래의 조건 1 또는 완화조건 2를 만족하여야 한다.

조건 1: 임의의 c_1 과 c_2 에 대하여 $f(x_1, x_2) = c_1$ 을 만족하는 모든 그래프와 $f^+(x_1, x_2) = c_2$ 를 만족하는 모든 그래프는 교집에서 서로 수직한다.

조건 1을 만족하는 서로 수직인 두 함수 $f(x_1, x_2)$ 와 $f^+(x_1, x_2)$ 를 찾는 것은 대단히 어려운 일이므로 다소 조건을 완화하여 다음과 같은 완화 조건을 설정한다.

조건 II: $x_1 - x_2$ 평면 위의 국부적인 부분 (다루고자 하는 상태공간 영역 내부)에서 임의의 c_1 과 c_2 에 대하여 $f(x_1, x_2) = c_1$ 을 만족하는 모든 그래프와 $f^+(x_1, x_2) = c_2$ 를 만족하는 모든 그래프는 한 점에서 교차하며, 이 점에서 두 그래프는 수직에 가깝다.

다음 예제는 비선형 슬라이딩 패치의 경우를 예를 들어 보았으며, 여기서 완화조건 2를 만족하도록 $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^3, f^+(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2$ 로 설정하였다.

예제 3.

$$\dot{x}_1 = (x_1^2 - 2x_1 + 7)x_2 - \frac{30}{1 + 9x_1^4} \operatorname{sgn}(x_1 + x_2^3)$$

$$- \frac{30x_1^2}{1 + 9x_1^4} \operatorname{sgn}(x_1^3 - x_2) \quad (18-a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1(x_2^2 + 1) - \frac{90x_2^2}{1 + 9x_2^4} \operatorname{sgn}(x_1 + x_2^3)$$

$$+ \frac{10}{1 + 9x_1^4} \operatorname{sgn}(x_1^3 - x_2)$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 10 \quad (18-b)$$

그림 3에서 보듯이 진동이 있으나 그 진폭이 점차 감소되다가 이 경우에는 $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^3 = 0$ 되는 곡선 상에서 슬라이딩 패치 현상을 보이며 원점으로 수렴됨을 알 수 있다.

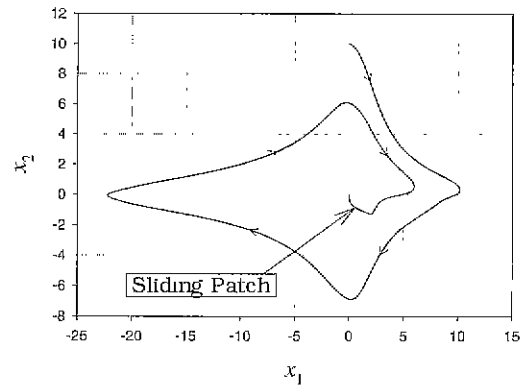


그림 3. 비선형 슬라이딩 패치에 대한 상태궤적.

Fig. 3. State-trajectory on the nonlinear sliding patch.

3. 슬라이딩 패치에서의 안정도 해석

여기서는 슬라이딩 패치에서의 안정도를 해석하여 본다. 일반적으로 상태궤적이 스위칭 곡선에 부딪히고 난 후에는 스위칭 곡선을 따라 발산하는 불안정한 특성을 나타내거나, 스위칭 곡선을 따라 원점으로 수렴되는 안정적인 특성을 나타내며, 스위칭 함수의 이득을 크게 하는 경우는 대체적으로 안정한 특성을 나타낸다. 논문의 지면상 비선형 슬라이딩 패치의 Type SN-I의 경우에 대해서만 고찰하여 본다.

먼저 다음과 같이 스칼라함수 $f(x_1, x_2)$ 을 이용하여 Lyapunov 후보함수 $V(x_1, x_2)$ 를 정의한다.

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} f^2(x_1, x_2) \quad (19)$$

이 경우 다음의 식이 성립하며

$$\frac{dV}{dt} = f(x_1, x_2) \left\{ -\frac{\partial f}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial f}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) - k_3 \operatorname{sgn}(f(x_1, x_2)) \right\} \quad (20)$$

만일 주어진 상태공간 영역 R_s 에 대하여 다음 조건이 만족하도록 k_3 를 설정하면

$$SUP_{x \in R_c} | -\frac{\partial f}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial f}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) | + \eta < k_1 \tag{21}$$

$\frac{dV}{dt} < -\eta |f(x_1, x_2)| < 0$ 을 만족하여 유한 시간 내에 스위칭곡선 $f(x_1, x_2) = 0$ 에 도달된다. 따라서 슬라이딩 패치에서의 상태제적은 다음과 같은 식을 만족한다.

$$f(x_1, x_2) = 0 \tag{22-a}$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2)|_{f(x_1, x_2)=0} = g(x_2) \tag{22-b}$$

따라서 만일 비선형 방정식 (22-b)가 안정하다면, 즉 $g(x_2)$ 가 $x_2 - g(x_2)$ 평면의 1, 3 상한을 통과하는 비선형 함수라면, 슬라이딩 패치는 안정하게 된다.

참고로 비선형 슬라이딩 패치의 Type SN-I, SN-II, SN-III 경우, 적은 크기의 스위칭 이득을 가지고 안정화된 슬라이딩 패치를 얻기 위해서는 다음과 같은 과정을 통하여 $f(x_1, x_2)$ 를 선정하면 된다. 자세한 유도과정은 참고문헌[8]의 Frobenius정리를 참조하기 바란다. 그러나 일반적인 경우, 이러한 함수를 구하는 것은 상당히 어려운 작업이며 또한 일반적으로 비선형 시스템에 불확실한 항이 내포되어 있는 관계로 정확한 $f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)$ 를 사전에 아는 것도 불가능하므로 보통의 경우 앞에서 다룬 조건 1 또는 완화조건 2를 만족하도록 설정한다.

먼저 다음과 같은 벡터함수를 정의한다.

$$x = [x_1 \ x_2]^T, \quad a(x) = [f_1(x_1, x_2) \ f_2(x_1, x_2)]^T, \quad \beta(x_1, x_2) = [1 \ 0]^T \tag{23}$$

이 경우 다음과 같은 식을 만족하는 행렬함수 $\Phi_i^a(x), \Phi_i^b(x)$ 를 정의한다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_i^a(x) = a(\Phi_i^a(x)), \quad \Phi_0^a = x \tag{24-a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_i^b(x) = \beta(\Phi_i^b(x)), \quad \Phi_0^b = x \tag{24-b}$$

또한 임의의 x_0 에 대하여 다음과 같은 함수 F 를 정의한다.

$$F : [z_1 \ z_2]^T \rightarrow [x_1 \ x_2]^T = \Phi_{z_1}^a \bullet \Phi_{z_2}^b(x_0) \tag{25}$$

여기서 \bullet 은 합성함수 연산자를 의미한다. 즉,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = F(z_1, z_2), \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = F^{-1}(x_1, x_2) \tag{26}$$

이며 여기서 z_2 를 $f(x_1, x_2)$ 로 설정하면 된다.

따라서 $x_0 = (0, 0)$ 으로 설정하면, 이 경우의 벡터함수

$$f(x_1, x_2) \text{는 다음과 같은 성질을 만족하며,} \tag{27-a}$$

$$F^{-1}(0, 0) = (z_1, 0), \text{ 즉, } f(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) = 0 \tag{27-b}$$

이러한 성질을 (20)에 적용할 경우, 미소한 스위칭 이득을 사용하여도 슬라이딩 패치에 유한 시간 내에 도달되며, (22-b)가 안정할 경우에 안정한 슬라이딩 패치를 얻을 수 있는 것이다.

IV. 슬라이딩 패치의 응용

1. 확장 플랜트 제어의 개요

본 장에서는 G. Bartolini[2][3]에서의 연구를 응용하여 시스템의 상태 n 개를 $n+1$ 개의 상태로 확장하고 이러한 확장 시스템에 대해 슬라이딩 모드 제어 입력을 가함으로써 실제 시스템의 입력은 채털링으로부터 자유로운 입력이 가해지도록 설계하며 제어기 설계부분에서 본 논문 3장에서 제시된 슬라이딩 패치의 활용됨을 고찰하여 본다. 그림 4는 본 절에서 전개하게 될 전체 블록도 (Block diagram)이다.

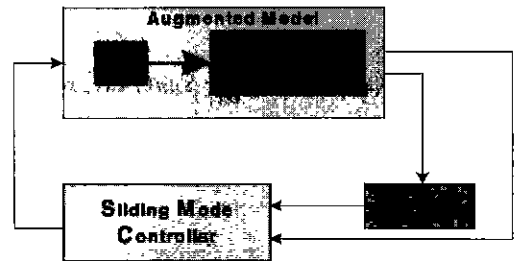


그림 4. 확장 플랜트 슬라이딩 모드 제어 블록도.

Fig 4. Block diagram of Augmented Plant Sliding Mode Control

2. 슬라이딩 모드 제어

다음과 같이 정의되는 비선형 불확실 플랜트를 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} \quad i=1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= g(x, u) \end{aligned} \tag{28}$$

여기서 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 로서 관측 가능하다.

$g(x, u)$ 는 편미분과 경계오차의 범위를 알고 있다고 가정한다. u 는 입력이다.

(28)과 관련하여 다음과 같은 선형 모델을 선택하자.

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= y_{i+1} \quad i=1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{y}_n &= \sum_{j=1}^n a_j y_j + b u_M \end{aligned} \tag{29}$$

여기서 $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ 이고, $a_j (j=1, 2, \dots, n), b$ 는 설계 값이다. u_M 은 모델 입력이다.

추종오차를 $e_i = y_i - x_i$ 라 하면 $e = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$

이고, 추종오차를 수렴하도록 하는 입력 u 를 설계하기 위하여 슬라이딩 면을 다음과 같이 설정한다.

$$s_c(e) = \bar{c}e = 0 \tag{30}$$

(30)에서 $\bar{c} = [\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_{n-1}, 1]$ 이고, 모든 \bar{c}_i 는 다음의 다항식이 Hurwitz 다항식을 만족하도록 설계한다.

$$\bar{C}(q) = q^n + \bar{c}_n q^{n-1} + \bar{c}_{n-1} q^{n-2} + \dots + \bar{c}_1$$

추종오차 벡터 e 를 슬라이딩 면에 이르게 하고 슬라이딩 모드가 일어나도록 하는 입력 u 는 일반적으로 Lyapunov 방법에 의하여 스위칭 함수로 결정된다. 이렇게

결정된 입력은 (28)을 안정하게 하고 유한 시간 내에 수렴하도록 하지만 슬라이딩 모드 내에서 스위칭 함수에 의한 채터링 현상을 유발한다. 따라서 다음의 절에서 채터링을 제거하는 슬라이딩 모드 제어 방법을 기술한다.

3. 확장 플랜트 슬라이딩 모드 제어

(28)에 대하여 다음과 같은 확장 플랜트를 고려하자.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g(x, u) \\ \dot{x}_i &= x_{i+1} \quad i=1, 2, \dots, n \\ \dot{x}_{n+1} &= \frac{\partial g}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial g}{\partial x_n} g + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} x_{i+1} \end{aligned} \quad (31)$$

그리고 (29)에 대하여 확장 모델도 다음과 같이 설계한다.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \sum_{j=1}^n a_j y_j + b u_M \\ \dot{y}_i &= y_{i+1} \quad i=1, 2, \dots, n \\ y_{n+1} &= \sum_{j=1}^n a_j y_{j+1} + b \dot{u}_M \end{aligned} \quad (32)$$

슬라이딩 면은 (33)과 같이 설계한다.

$$s(e, e_{n+1}) = e_{n+1} + \sum_{i=1}^n c_i e_i \quad (33)$$

여기서 $c_i (i=1, 2, \dots, n)$ 는 (34)의 다항식이 Hurwitz 다항식이 되도록 선택한다.

$$C(q) = q^n + c_n q^{n-1} + c_{n-1} q^{n-2} + \dots + c_1 \quad (34)$$

(33)에서 $e_{n+1} = y_{n+1} - x_{n+1}$ 은 직접 얻을 수 있는 정보가 아니므로 $x_{n+1} = g(x, u)$ 에 대한 일차 추정기 (first-order observer) z 를 설계한다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -c_n z + p \hat{s} + w \\ &= -(c_n + p)z + p \left[y_{n+1} + \sum_{i=1}^n c_i e_i \right] + w \end{aligned} \quad (35)$$

여기서 $p > 0$ 이고 w 는 설계값이다.

(35)의 z 를 이용하여 다음의 식으로 슬라이딩 면을 설계한다.

$$\hat{s}(e, z, y_{n+1}) = y_{n+1} - z + \sum_{i=1}^n c_i e_i = 0 \quad (36)$$

(31), (32), (35), (36)으로부터 다음을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{s}} &= \dot{y}_{n+1} - \dot{z} + \sum_{i=1}^n c_i \dot{e}_i \\ &= \phi - c_n E - p \hat{s} - w \end{aligned} \quad (37)$$

여기서 아래의 (38), (39)는 플랜트와 모델로부터 얻을 수 있는 함수이다.

$$E = x_{n+1} - z \quad (38)$$

$$\phi = \sum_{j=1}^n a_j y_{j+1} + b \dot{u}_M + \sum_{i=1}^n c_i e_{i+1} + c_n y_{n+1} \quad (39)$$

(35)에서 $w = \phi$ 로 설정하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\hat{s}} = -c_n E - p \hat{s} \quad (40)$$

또한 추정오차 E 에 관하여 (31), (35), (38), (39)를 통하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\dot{E} = -c_n E - p \hat{s} + \left[\frac{dg}{dt} + c_n g - \phi \right] \quad (41)$$

(40), (41)로부터 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{s}} \\ \dot{E} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p & c_n \\ p & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{s} \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu \quad (42)$$

여기서 μ 는 (41)로부터 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{dg}{dt} + c_n g - \phi \\ &= \frac{\partial g}{\partial u} \dot{u} + \Phi(x, y, u_M, \dot{u}_M, u) \end{aligned} \quad (43)$$

(42)에서 \hat{s} 만을 이용하여 안정화시키는 문제를 그림 5와 같은 기하학적인 고찰을 통하여 설계해 보자.

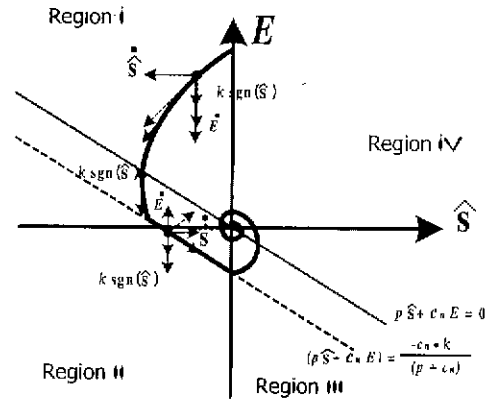


그림 5. 기하학적 해석.

Fig 5. Geometrical analysis.

그림 5에서 합성 벡터가 선분을 추정하도록 하는 μ 의 결정은 (44)와 같이 설계하면 된다

$$\mu = k \operatorname{sgn}(\hat{s}) \quad (44)$$

(43), (44)로부터 가상 입력 \dot{u} 은 아래의 식으로 결정되어진다.

$$\dot{u} = \left[\left| \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\min} \right]^{-1} [|\Phi|_{\max} + k] \operatorname{sgn}(\hat{s}) \quad (45)$$

(45)는 확장 플랜트에 대하여 추종오차를 수렴하도록 하는 입력으로 사용한다. (45)에서와 같이 스위칭 함수를 사용하면 채터링문제가 발생한다. 그렇지만 실제 플랜트에 가해지는 입력은 (45)에 대한 적분의 형태를 취함으로써 채터링 현상을 제거할 수 있다. (42)를 안정화 할 수 있는 μ 의 설계로 앞에서 언급된 기하학적 해석을 통하여서 구현하였지만 본 논문의 3장에서 다른 (11)이나 (15)의 특수한 경우에 해당됨을 알 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 진동하는 비선형 2차계에 대하여 그 특성을 살펴보았으며, 이 비선형 2차계에 비선형 및 선형 스위칭 함수를 도입하여 전체적인 안정도 및 슬라이딩 패치 현상을 나타낼 수 있는 방법론과 스위칭 곡선 상에서 안정도를 분석하는 방식에 대하여 고찰하였다. 또한 이러한 슬라이딩 패치현상을 응용할 수 있는 사례를 보이고 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 이를 입증하여 보았다. 본 논문에서 살펴본 슬라이딩 패치 및 스택현상은 실 공정의 제어알고리

등 유도에도 크게 활용될 수 있으리라 기대되며, 가변구조 제어를 연구하는 연구자들에게 큰 도움이 되리라 기대한다. 현재까지는 기하학적인 특성을 통하여 스틱현상 및 슬라이딩 패치현상에 관한 이론을 도출하였기 때문에 2차계에만 적용가능하나, 가까운 장래에 2차계 이상으로 적용이 가능한 일반적 이론이 나오기를 기대한다.

참고문헌

- [1] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-22, no. 2, pp. 212 - 222, April, 1977.
- [2] G. Bartolini and P. Pydynowski, "An improved, chattering free, V.S.C. scheme for uncertain dynamical systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 8, pp. 1220-1226, 1996
- [3] G. Bartolini, A. Ferrara, and E. Usai, "Chattering avoidance by second-order sliding mode control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, no. 2, pp. 241-246, 1998.
- [4] J. J. E. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking Control of nonlinear systems using sliding surfaces, with application to hobot manipulators," *International Journal of Control*, vol. 38, pp. 465-492, 1983.
- [5] K. Y. Im and W. Ham, "Nonlinear Observer for flexible joint robots," *1993 Korea-Japan Joint Seminar on Advanced Mechatronics*, pp. 77-89, 1993.
- [6] 소일영, 임규만, 함운철, "슬라이딩 모드를 갖는 Bang-Bang 제어," 제어계측, 자동화, 로보틱스연구회 합동학술발표대회, pp. 98-102, 1996.
- [7] B. K. Yoo and W. Ham, "Adaptive fuzzy sliding mode control of nonlinear system," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 315-321, May, 1998.
- [8] A. Isidori, "Nonlinear control systems: An introduction," Springer-Verlag, 1989.



김진환

1985년 전북대 전자공학과 졸업. 동대학원 석사(1991), 동대학 박사수료(1997). 1993년 ~ 현재 중소기업청 시험·연구지원팀 공업연구사. 관심분야는 로봇제어, 적응제어, 가변구조제어



함운철

1979년 서울대 전자공학과 졸업. 동대학원 석사(1982), 동대학 박사(1988). 1984년 ~ 현재 전북대학교 전자정보공학부 교수. 관심분야는 로봇제어, 적응제어, 가변구조제어, 비선형 제어.