

국부수평 스트랩다운 관성항법 속도 및 자세의 3 샘플 알고리즘

A Three-Sample Algorithm for Velocity and Attitude in Local Level Strapdown Inertial Navigation

송기원, 이상정
(Ki Won Song and Sang Jeong Lee)

Abstract · This paper presents an attitude determination algorithm for the local level strapdown inertial navigation where the body, the earth, and the transport rate can be calculated separately using a DCM computation scheme. Also presented is a velocity determination algorithm taking into account the attitude variation caused by the change of the navigation frame. The proposed algorithms are implemented using three samples of the velocity and the angle within the integration interval.

Keywords · strapdown inertial navigation, quaternion, direction cosine matrix, rotation vector

I. 서론

스트랩다운 관성항법장치(SDINS strapdown inertial navigation system)의 항법계산 알고리즘은 속도 미분방정식과 자세 미분방정식의 수치해이며, 이 밖에 지리적 위치와 고도를 속도로부터 계산하는 해법이다. 속도 미분방정식과 자세 미분방정식은 각각 동체 가속도와 동체 각속도를 포함하고 있다. 이러한 동체 가속도와 동체 각속도는 SDINS의 동체좌표계와 일치하는 3축으로 배열된 자이로와 가속도계로 감지되는데, 자이로와 가속도계 출력은 아날로그 적분회로를 통과하여 속도 변화량과 각 변화량의 디지털 데이터로 변환되어 항법계산을 수행하는 항법컴퓨터에 입력된다 따라서 샘플된 속도 변화량과 각 변화량을 입력으로 속도 미분방정식과 자세 미분방정식의 수치해가 필요하다.

속도 미분방정식과 자세 미분방정식의 해법은 SDINS 개념이 제시된 이래로 꾸준히 연구되었는데, 특히 SDINS에서 자세 미분방정식의 해법은 김블형 관성항법장치의 안정대(stable platform) 역할과 비교되어 주요한 연구대상이었다. 자세 미분방정식의 해법은 Bortz가 회전벡터를 이용한 자세계산 기법을 제시한 이후로 자세 교환오차(commutative error)를 크게 하는 코닝운동(coning motion)에 대한 계산오차를 최소화하기 위해 Miller를 비롯한 여러 학자들에 의해 연구되었다[1~7] 그러나 속도 미분방정식 해법 연구는 자세 미분방정식과 비교하여 주로 Savage에 의해 이루어졌는데, 각운동에 따른 속도 변화량을 계산하고 속도 교환오차를 크게 하는 스컬링운동(sculling motion)에 대한 계산오차를 최소화 하였다[8].

이제까지 연구된 결과를 살펴보면 자세 미분방정식의 해법은 관성좌표계에 대한 동체 각운동만을 고려하여 국부수평 스트랩다운 관성항법(local level inertial navigation)

을 위한 지구자전 각속도와 이동 각속도(transport rate)의 보상은 분명하게 제시되지 않았다[2~6] 그런데 10^{-4} 정도의 작은 계산오차를 다루는 자세계산에서 지구자전 각속도와 이동 각속도의 부정확한 보상은 코닝운동에 의한 자세 교환오차 못지 않은 계산오차를 유발시킬 수 있다. 그리고 Savage는 속도 미분방정식 해법에서 동체 가속도를 항법좌표계로 변환하는 좌표변환 행렬의 항법좌표계 변위를 적분구간에서 시불변으로 가정하였는데[8], 이 경우 지구자전 각속도의 중력이 결합된 속도가 계산오차로 유발된다.

본 논문은 과거에 이루어졌던 속도 교환오차와 자세 교환오차를 최소화한 항법계산 알고리즘의 연구결과인 [5~8]에 국부수평 스트랩다운 관성항법의 자세계산에서 위치변화에 의해 발생하는 항법좌표계 변위에 의한 자세변화와 지구자전 각속도의 정교한 보상을 고려한 해법으로서 좌표변환 행렬이 동체 각속도, 이동 각속도, 그리고 지구자전 각속도 등에 의한 자세변화로 분리할 수 있음을 보인다. 이러한 접근방법은 속도 미분방정식의 풀이로 현재 위치가 계산되면, 자세 미분방정식 해법에서 지구자전 각속도와 이동 각속도의 보상이 좌표변환 행렬의 곱 형태로 가능하게 된다. 또 본 논문에서는 Savage 연구결과에서 시불변으로 가정한 항법좌표계 변위를 일반적인 시변으로 다루어 적분구간에서 이동 각속도와 지구자전 각속도에 의한 자세변화가 속도변화량을 추가로 발생시킴을 보이고, 이를 보상하는 속도 미분방정식의 해법을 제시한다.

한편 본 논문의 속도계산 알고리즘의 유도방법과 실현 방법에서 Savage의 연구결과와 구체적인 차이점을 살펴보면 본 논문은 속도 미분방정식 해법을 위해 단순히 양변을 적분하는 방법으로 접근한 Savage와 다르게 속도 미분방정식을 시스템 행렬과 시변 입력이 있는 상태방정식의 해법으로 접근하여 교환오차 계산이 가능하도록 한다. 그리고 Savage는 동체 각속도와 동체 가속도를 적분구간을 소구분한 부적분구간(sub-integration cycle)에서 1차 시변으로 가정하여 샘플된 속도 변화량과 각 변화량으로부터

스컬링 속도를 반복 계산하도록 하였는데, 본 논문은 부적분구간 없이 동체 각속도와 동체 가속도를 적분구간에서 2차 시변으로 가정하여 3 샘플된 속도 변화량과 각 변화량으로부터 스컬링 속도를 반복계산 없이 한 묶음에 계산하는 해법을 유도한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II 절에서 자세 미분방정식의 해법으로 동체 각속도에 의한 자세변화는 자이로 출력인 각 변화량만을 이용한 3 샘플 알고리즘으로 계산하고, 이동 각속도와 지구자전 각속도는 좌표변환 행렬의 형태로 보상하는 해법을 제시한다. 그리고 III 절에서 속도 미분방정식은 상태방정식의 해법으로 접근하여 풀이하고, 항법좌표계의 변위를 시변으로 고려한 해법을 역시 3 샘플 알고리즘으로 제시한다. IV 절에서는 II 절과 III 절에서 제시된 항법계산 알고리즘을 계산순서에 맞추어 정리하였으며, 아울러 전산 시뮬레이션을 통해 제시된 항법계산 알고리즘의 성능을 분석하여 향상된 계산 정확도를 살펴보았다. 그리고 V 절에서 본 논문의 결론을 기술하였다.

<주요기호>

- i : 관성좌표계 n : 항법좌표계
- b : 동체좌표계 e : 지구좌표계
- Q_A^B : A좌표계로부터 B좌표계로의 쿼터니언 변수 ($Q_{A(n)}^{B(i)} \equiv Q_A^B(t)$)
- C_A^B : A좌표계로부터 B좌표계로의 좌표변환 행렬 ($C_{A(n)}^{B(i)} \equiv C_A^B(t)$)
- ω_{ij}^k : j좌표계의 i좌표계에 대한 각속도를 k좌표계에서 측정한 값
- f^k : 가속도를 k좌표계에서 측정한 값
- * : 쿼터니언 곱 연산자

II. 자세계산 알고리즘 유도

쿼터니언 또는 좌표변환 행렬인 방향 코사인 행렬 (DCM - Direction Cosine Matrix)은 자세계산의 매개변수로 사용되는데, 쿼터니언 계산해법을 살펴보면 이전시점의 쿼터니언과 적분구간 $(t-AT) \sim t$ 의 쿼터니언 변화량의 곱으로서 (1)과 같다. 적분구간에서 쿼터니언 변화량 ΔQ 는 적분구간의 회전벡터 변화량을 $\Delta\phi = [\Delta\phi_x, \Delta\phi_y, \Delta\phi_z]^T$ 로 표현하면 (2)와 같은데, 회전벡터 변화량 $\Delta\phi$ 는 (3)의 회전벡터 미분방정식에 의해 지배된다.

$$Q_{A(n)}^{B(i)} = Q_{A(n)}^{B(i)}(t-AT) * \Delta Q \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_0 \\ \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\Delta\phi_0}{2} \\ \frac{\Delta\phi_x}{\Delta\phi_0} \sin \frac{\Delta\phi_0}{2} \\ \frac{\Delta\phi_y}{\Delta\phi_0} \sin \frac{\Delta\phi_0}{2} \\ \frac{\Delta\phi_z}{\Delta\phi_0} \sin \frac{\Delta\phi_0}{2} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\dot{\phi} = \left[I + \frac{1}{2} \Phi + \left(1 - \phi_o \frac{\sin \phi_o}{2(1 - \cos \phi_o)} \right) \Phi^2 \right] \omega_{nb}^b \tag{3}$$

여기서 $\Delta\phi_0 = (\Delta\phi_x^2 + \Delta\phi_y^2 + \Delta\phi_z^2)^{1/2}$, $\phi_o = (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)^{1/2}$ 이다 그리고 Φ 는 회전벡터 $\phi = [\phi_x, \phi_y, \phi_z]^T$ 의 왜대칭(skew symmetric) 행렬이다. 회전벡터 변화량 $\Delta\phi$ 는 (3)의 미분방정식의 해법으로 알려진 3 샘플 알고리즘 (4)와 같이 계산 할 수 있다[2]. 여기서 $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3$ 는 각각 적분구간 $t-AT \sim t-2AT/3$, $t-2AT/3 \sim t-AT/3$, $t-AT/3 \sim t$ 에서 항법좌표계에 대한 동체 각속도인 ω_{nb}^b 를 적분한 값이다. ω_{nb}^b 의 적분은 (5)와 같은데 관성좌표계에 대한 동체 각속도인 ω_{nb}^b 의 적분한 값은 자이로 출력인 각 변화량의 샘플로서 직접 얻을 수 있으나, 지구자전 각속도와 이동 각속도의 적분한 값은 적분구간에서 시불변으로 가정하지 않으면 손쉽게 얻을 수 없다.

$$\Delta\phi = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + 0.4125\Delta\theta_1 \times \Delta\theta_3 + 0.7125\Delta\theta_2 \times (\Delta\theta_3 - \Delta\theta_1) \tag{4}$$

$$\Delta\theta_k = \int_{t-\frac{(k-1)T}{3}}^{t-\frac{kT}{3}} \omega_{nb}^b(\tau) - C_n^b(\tau) [C_e^n(\tau) \omega_{ne}^e + \omega_{en}^n(\tau)] d\tau, \quad k=1,2,3 \tag{5}$$

각속도 측면에서 지구자전 각속도와 이동 각속도를 적분구간에서 시변으로 다루는 것은 복잡할뿐더러 어려운 측면이 많다. 그런데 지구자전 각속도와 이동 각속도에 의한 자세변화를 DCM으로 표현하면 적분구간에서 시변 또는 시불변일 경우를 구별할 필요가 없다. 즉 지구자전 각속도에 의한 자세변화는 항법시작 후 경과 시간에만 의존하며, 이동 각속도에 의한 자세변화는 항법초기위치와 현재위치의 차이로부터 결정된다. 따라서 항법시작 후 t 시점에서의 항법좌표계에 대한 동체좌표계의 DCM은 (6)과 같이 표현할 수 있어 지구자전 각속도에 의한 자세변화는 DCM C_{ln}^{nl} , 그리고 이동 각속도에 의한 자세변화는 DCM C_{ln}^{nl} 의 형태로 고려할 수 있다.

$$C_{ln}^{nl} = C_{ln}^{nl} C_{ln}^{nl} C_{ln}^{nl} C_{ln}^{nl} \tag{6}$$

여기서 나타난 좌표계들은 다음과 같은 의미로 정의된다. lni 는 관성좌표계에 대해 회전이 없는 초기 항법좌표계, lbi 는 관성좌표계에 대해 회전이 없는 초기 동체좌표계, $ni(t)$ 는 관성좌표계에 대해서 지구자전 각속도의 회전이 있고 지구좌표계에 대해서는 회전이 없는 초기 항법좌표계, $n(t)$ 는 항법시작 후 t 시점의 위치에서 항법좌표계, $b(t)$ 는 항법시작 후 t 시점의 동체좌표계이다.

(6)에서 나타난 DCM들을 설명하면 C_{ln}^{nl} 는 초기위치와 현재위치 사이의 DCM이며, C_{ln}^{nl} 는 초기위치의 항법좌표계가 지구자전으로 회전된 DCM을 의미한다. 그리고 C_{ln}^{nl} 는 항법시작 시점에서의 항법좌표계와 동체좌표계의 DCM인데 초기자세를 결정하는 초기정렬의 결과로 볼 수

있다 $C_{b(t)}^{b(t)}$ 는 항법시작 시점의 동체좌표계와 현재시점 t 의 동체좌표계 사이의 DCM인데, 관성좌표계를 기준으로 보면 총 회전된 동체좌표계의 변화로 볼 수 있다. 따라서 (6)을 이용한 자세계산은 항법시작 시점에서 $C_{b(t)}^{b(t)}$ 가 주어지면 $C_{m(t)}^{m(t)}$ 는 (7)과 같이 초기위치와 항법시작 후 경과시간 t 에 의해 결정되며, $C_{m(t)}^{m(t)}$ 는 초기위치와 현재위치에 의해 (8)과 같다[9].

$$C_{b(t)}^{m(t)} = \begin{bmatrix} \sin^2 L_o \cos(\Omega_o t - l_o) + \cos^2 L_o & -\sin L_o \sin(\Omega_o t - l_o) & \sin L_o \cos L_o \cos(\Omega_o t - l_o) \\ \sin L_o \sin(\Omega_o t - l_o) & \cos(\Omega_o t - l_o) & \cos L_o \sin(\Omega_o t - l_o) \\ \cos L_o \sin L_o \cos(\Omega_o t - l_o) - \sin L_o \cos L_o & -\cos L_o \sin(\Omega_o t - l_o) & \cos^2 L_o \cos(\Omega_o t - l_o) + \sin^2 L_o \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$C_{m(t)}^{m(t)} = \begin{bmatrix} \sin L_t \sin L_o \cos(l_t - l_o) + \cos L_t \cos L_o & -\sin L_t \sin(l_t - l_o) & \sin L_t \cos L_o \cos(l_t - l_o) \\ \sin L_t \sin(l_t - l_o) & \cos(l_t - l_o) & \cos L_t \sin(l_t - l_o) \\ \cos L_t \sin L_o \cos(l_t - l_o) - \sin L_t \cos L_o & -\cos L_t \sin(l_t - l_o) & \cos L_t \cos L_o \cos(l_t - l_o) + \sin L_t \sin L_o \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서 L_o, l_o 는 초기위도 및 경도이며, L_t, l_t 는 현재시점의 위도 및 경도이다. 그리고 Ω_o 는 지구자전 각속도이다 (6)에서 $C_{b(t)}^{b(t)}$ 는 자이로 출력인 ω_m^b 로만 계산할 수 있는데, (1)을 (9)와 같이 수정하면 (2)의 회전벡터 변화량 $\Delta\phi$ 는 ω_{ib}^b 에 대한 (10)의 미분방정식에 의해 지배된다. 이때 (4)의 $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3$ 는 ω_{ib}^b 의 적분한 값이 아닌 자이로 출력인 각 변화량의 샘플로서 직접 얻을 수 있는 ω_{ib}^b 을 적분한 값으로 (11)이 된다 이와 같이 계산된 쿼터니언을 $Q_{b(t)}^{b(t)} = [Q_0 \ Q_1 \ Q_2 \ Q_3]^T$ 로 정의하면 $C_{b(t)}^{b(t)}$ 는 (12)와 같이 된다.

$$Q_{b(t)}^{b(t)} = Q_{b(t-\Delta T)}^{b(t-\Delta T)} * \Delta Q \quad (9)$$

$$\dot{\phi} = \left[I + \frac{1}{2} \Phi + (1 - \phi_o \frac{\sin \phi_o}{2(1 - \cos \phi_o)}) \Phi^2 \right] \omega_{ib}^b \quad (10)$$

$$\Delta\theta_k = \int_{t-\frac{(4-k)\Delta T}{3}}^{t-\frac{(3-k)\Delta T}{3}} \omega_{ib}^b(\tau) d\tau, \quad k=1,2,3 \quad (11)$$

$$C_{b(t)}^{b(t)} = \begin{bmatrix} Q_0^2 + Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2 & 2(Q_1 Q_2 - Q_0 Q_3) & 2(Q_1 Q_3 + Q_0 Q_2) \\ 2(Q_1 Q_2 + Q_0 Q_3) & Q_0^2 - Q_1^2 + Q_2^2 - Q_3^2 & 2(Q_2 Q_3 - Q_0 Q_1) \\ 2(Q_1 Q_3 - Q_0 Q_2) & 2(Q_2 Q_3 + Q_0 Q_1) & Q_0^2 - Q_1^2 - Q_2^2 + Q_3^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

III. 속도계산 알고리즘 유도

속도계산 알고리즘 유도는 속도 미분방정식의 수치해법을 구하는 것인데, Savage는 (13)의 속도 미분방정식을 단

순히 양변을 적분하는 방법으로 접근하였다 그런데 (13)의 속도 미분방정식을 행렬 형태의 상태방정식 관점에서 살펴보면 $-(2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n)$ 는 시스템 행렬에 해당하며, $C_b^n f^b + g^n$ 는 입력으로 작용하고 있다. 이때 적분구간에서 $-(2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n)$ 와 g^n 을 시불변으로 가정하면 속도 미분방정식의 해법은 (14)와 같다. (14)의 해법에서 우선 $-(2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) = A_\Omega$ 에 관한 지수함수의 근사해는 (15)와 같다.

$$\dot{v}^n = -(2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n)v^n + C_b^n f^b + g^n \quad (13)$$

$$v^n(t) = e^{-(2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n)\Delta T} v^n(t-\Delta T) + \int_{t-\Delta T}^t e^{-(2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n)(t-\tau)} [C_b^n(\tau)f^b(\tau) + g^n] d\tau \quad (14)$$

$$e^{-i(2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n)\Delta T} \approx (I + A_\Omega \Delta T + A_\Omega^2 \Delta T^2 / 2 \dots) \quad (15)$$

(15)의 1차 해를 (14)의 우변항의 적분항에 대입하고 적분구간을 $0 \sim \Delta T$ 로 수정하여 정리하면 (16)과 같은데, 중력 g^n 에 관해 정리하면 (17)과 같다. 그리고 비힘(specific force) $C_b^n(\tau)f^b(\tau)$ 에 관해서 정리하면 (18)과 같다. (18)에서 두 번째 적분항은 첫 번째 항의 고차항으로 $C_b^n(\tau)f^b(\tau)$ 의 평균으로 근사화 하면 $C_b^n(\tau)f^b(\tau)$ 를 시불변으로 볼 수 있으므로 (19)와 같이 된다.

$$\int_0^{\Delta T} [I - A_\Omega \tau] [C_b^n(\tau)f^b(\tau) + g^n] d\tau \quad (16)$$

$$\int_0^{\Delta T} [I - A_\Omega \tau] g^n d\tau = g^n \Delta T - A_\Omega g^n \Delta T^2 / 2 \quad (17)$$

$$\int_0^{\Delta T} [I - A_\Omega \tau] C_b^n(\tau)f^b(\tau) d\tau = \int_0^{\Delta T} C_b^n(\tau)f^b(\tau) d\tau - A_\Omega \int_0^{\Delta T} \tau C_b^n(\tau)f^b(\tau) d\tau \quad (18)$$

$$A_\Omega \int_0^{\Delta T} \tau C_b^n(\tau)f^b(\tau) d\tau \approx A_\Omega C_b^n(t-\Delta T)f^b(t-\Delta T)\Delta T^2 / 2 \quad (19)$$

그리고 속도 미분방정식 해법의 초점이 되는 (18)의 첫 번째 항은 DCM 분리기법에 따라 (6)과 유사하게 나타낼 수 있는데, 현재시점의 DCM $C_{b(t)}^{b(t)}$ 을 이전시점의 DCM $C_{b(t-\Delta T)}^{b(t-\Delta T)}$ 과 적분구간의 변화량으로 표시하면 (20)이 된다. 여기서 $C_{m(t-\Delta T)}^{m(t-\Delta T)}$ 는 Savage의 속도계산 해법에서 무시했었다.

$$C_{b(t)}^{b(t)} = C_{m(t-\Delta T)}^{m(t-\Delta T)} C_{b(t-\Delta T)}^{b(t-\Delta T)} C_{b(t)}^{b(t-\Delta T)} \quad (20)$$

$C_{b(t)}^{b(t-\Delta T)}$ 는 (2)의 회전벡터 $\Delta\phi$ 의 왜대칭 행렬 $\Delta\Phi$ 로 (21)과 같이 근사화 할 수 있다. 또한 $C_{m(t-\Delta T)}^{m(t-\Delta T)}$ 도 회전벡터 $\Delta\psi$ 의 왜대칭 행렬 $\Delta\Psi$ 로 (22)와 같이 근사화 할 수 있다. 따라서 (21)과 (22)를 (20)에 대입하여 $\Delta\Psi$ 와 $\Delta\Phi$ 의 곱을 무시하고 전개하면 (18)의 첫째 항은 (23)과 같이 된다. 여

기서 $\Delta\Phi$ 는 (10)의 회전벡터 미분방정식에 지배되므로 적분구간에서 $\Phi(\tau)$ 의 함수가 된다 마찬가지로 $\Delta\Psi$ 는 적분구간에서 $\Psi(\tau)$ 의 함수가 된다.

$$C_{b(0)}^{b(t-\Delta T)} \approx I + \Delta\Phi \tag{21}$$

$$C_{n(t-\Delta T)}^{n(0)} \approx I + \Delta\Psi \tag{22}$$

$$\int_0^{\Delta T} C_v^n(\tau) f^b(\tau) d\tau = C_b^n(t-\Delta T) \int_0^{\Delta T} [I + \Phi(\tau)] f^b(\tau) d\tau + \int_0^{\Delta T} \Psi(\tau) C_v^n(t-\Delta T) f^b(\tau) d\tau \tag{23}$$

(23)의 첫째 항의 적분항은 ω_w^b, f^b 를 각각 시불변과 시변항으로 분리하여 정리하면 Savage가 제시한 것과 같은 (24)가 된다[8]

$$\int_0^{\Delta T} [I + \Phi(\tau)] f^o(\tau) d\tau = \Delta v + \frac{1}{2} \Delta\phi \times \Delta v + \frac{1}{2} \int_0^{\Delta T} [\phi(\tau) \times f^b(\tau) + v(\tau) \times \omega_w^b(\tau)] d\tau \tag{24}$$

여기서 $\phi(\tau), \Delta\phi, v(\tau), \Delta v$ 는 각각 다음과 같이 정의된다. $\phi(\tau) = \int_0^\tau \dot{\phi}(s) ds$ 일 때 $\phi(\Delta T) = \Delta\phi, \phi(0) = 0$ 인 데. $\dot{\phi}(\tau)$ 는 (10)과 같다. 그리고 $v(\tau) = \int_0^\tau f^b(s) ds$ 일 때 $v(\Delta T) = \Delta v, v(0) = 0$ 이다.

정의된 바와 같이 $\Delta\phi$ 는 자이로 출력인 각 변화량의 3 샘플 $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3$ 로 (4)와 같이 계산하고, Δv 는 적분구간의 가속도계 출력의 속도 변화량으로부터 직접 얻어 (24)의 첫째 항과 둘째 항은 계산할 수 있다. 그리고 스칼라링 속도 변화량으로 알려진 (24)의 세 번째 적분항의 해법은 ω_w^b 와 f^b 를 각각 (25), (26)으로 가정하여 풀이한다. 이러한 해법은 Savage가 제시한 동체 각속도와 동체 가속도를 부적분구간(sub-integration cycle)에서 1차 시변으로 가정하여 샘플된 속도 변화량과 각 변화량으로부터 스칼라링 속도 변화량을 반복 계산하는 방법과는 다르게 적분구간에서 샘플된 속도 변화량과 각 변화량을 한 묶음으로 처리하는 방식이다 기정된 (25), (26)으로부터 (24)의 세 번째 적분항의 해법은 (27)과 같은데, 상세한 유도는 부록 I에서 보였다.

$$f^b(\tau) = A + B\tau - C\tau^2 \tag{25}$$

$$\omega_w^b(\tau) = D + E\tau + F\tau^2 \tag{26}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\Delta T} [\phi(\tau) \times f^b(\tau) + v(\tau) \times \omega_w^b(\tau)] d\tau = 0.7125 [(\Delta\theta_1 - \Delta\theta_3) \times \Delta v_2 + (\Delta v_1 - \Delta v_3) \times \Delta\theta_2] + 0.4125 [\Delta\theta_1 \times \Delta v_3 + \Delta v_1 \times \Delta\theta_3] \tag{27}$$

여기서

$$\Delta v_k = \int_{t-\frac{14-\delta}{3}\Delta T}^{t-\frac{13-\delta}{3}\Delta T} f^b(\tau) d\tau, \quad k=1,2,3 \tag{28}$$

이다. 그리고 회전벡터의 3 샘플 $\Delta\phi_1, \Delta\phi_2, \Delta\phi_3$ 은 계산할 수 없으므로 근사화하여 (11)의 $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3$ 를 이용한다.

속도 미분방정식 해법의 마지막 항목으로 (23)의 두 번째 적분항은 Savage가 제시한 해법에서는 무시된 것인데, 이 항은 해석적으로 볼 때 지구자전 각속도와 이동 각속도에 따른 속도 변화량으로 볼 수 있다. 우선 적분구간에서 지구자전 각속도와 이동 각속도의 회전벡터로 $\Delta\phi$ 를 정의하고 $\phi(\tau)$ 가 시간에 비례한다고 가정하면 $\phi(\tau) = \Delta\phi \tau / \Delta T$ 이므로 (23)의 두 번째 적분항은 $f^b(\tau)$ 를 평균으로 근사화하여 (29)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta T} \Psi(\tau) C_v^n(t-\Delta T) f^b(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Delta T} \Delta\Psi C_v^n(t-\Delta T) \int_0^{\Delta T} \tau f^b(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \Delta\Psi C_v^n(t-\Delta T) \Delta v \end{aligned} \tag{29}$$

여기서 $\Delta\phi$ 는 적분구간에서 지구자전 각속도와 이동 각속도를 시불변으로 보면 근사적으로 $-(\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \Delta T$ 가 되는데, 등가성의 증명은 부록 II에서 보였다

IV. 항법계산 알고리즘 성능분석

본 절은 II, III 절에서 유도된 자세계산 및 속도계산 알고리즘을 결합하여 정리한 후 전산 시뮬레이션을 통해 성능을 분석한다. 본 절에서 제시하는 자세계산 및 속도계산 알고리즘은 속도, 위치, 자세의 순서로 계산되는데, 위도, 경도, 고도의 위치는 계산된 속도로부터 단순하게 사다리꼴(trapezoid) 적분을 통해 계산되었다고 가정한다.

속도계산에 앞서 적분구간에서 (28)의 속도 변화량 $(\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)$ 과 각 변화량 $(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3)$ 이 자이로와 가속도계 출력으로부터 3 샘플 된다. (15), (17), (19), (24), (27), (29)를 정리하여 속도계산 알고리즘을 1개의 수식으로 표현하면 (30)과 같다. 여기서 Δv 는 3 샘플된 속도변화량의 합이며, $\Delta\phi$ 는 (11)로부터 (4)를 계산한 것이다. 그리고 $\Omega_{in}^n(t-\Delta T), \Omega_{on}^n(t-\Delta T)$ 와 $g^n(t-\Delta T)$ 는 $t-\Delta T$ 시점의 위치와 속도로 계산할 수 있다.

자세계산에 앞서 적분구간 $t-\Delta T \sim t$ 에서 (11)로 정의된 각 변화량 $(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3)$ 이 자이로 출력으로부터 3 샘플 된다. 각 변화량 $(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3)$ 으로부터 (4)의 회전벡터를 계산하고, (2)를 계산하여 적분구간에서 쿼터니언 변화량 ΔQ 를 계산한다. 그리고 (9)를 이용하면 현재시점의 쿼터니언 $Q_{b(n)}^{b(0)}$ 이 계산되는데 항법시작 시점에서 초기자세의 쿼터니언을 초기값으로 사용하면 (9)의 좌변인 $Q_{b(n)}^{b(0)}$ 는 (31)의 $Q_{b(n)}^{b(t)}$ 로 변경되며, 동시에 (12)의 DCM은 $C_{b(n)}^{b(0)}$ 가 된다

$$\begin{aligned} v^n(t) &= v^n(t-\Delta T) \\ &- [2\Omega_{in}^n(t-\Delta T) + \Omega_{on}^n(t-\Delta T)] v^n(t-\Delta T) \Delta T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ C_n^n(t-AT) \left(\Delta v + \frac{1}{2} [\Delta \phi \times \Delta v] \right) \\
 &+ [1.425 \Delta \theta_1 \times \Delta v_2 - 0.4125 \Delta \theta_1 \times \Delta v_3 + 0.6917 \Delta \theta_2 \times \Delta v_3] \\
 &+ [1.425 \Delta v_1 \times \Delta \theta_2 + 0.4125 \Delta v_1 \times \Delta \theta_3 + 0.6917 \Delta v_2 \times \Delta \theta_3] \\
 &+ \frac{1}{2} \Omega_{ie}''(t-AT) C_n^n(t-AT) \Delta v \Delta T \\
 &+ \{ I - [2\Omega_{ie}''(t-AT) + \Omega_{ie}''(t-AT)] AT / 2 \} g''(t-AT) \Delta T \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$Q_{b(t)}^{lm} = Q_{b(t-AT)}^{lm} * \Delta Q \quad (31)$$

$C_{n(t)}^{m(t)}$ 는 (6)으로 계산하는데, (7), (8)의 $C_{n(t)}^{m(t)}$ 와 $C_{lm}^{m(t)}$ 를 결합하면 (32)가 된다. 여기서 t 시점의 위도 L_t , 경도 l_t 는 $v''(t-AT)$ 와 $v''(t)$ 의 사다리꼴 적분을 이용하여 계산할 수 있다

$$C_n^{m(t)} = \begin{bmatrix} \sin L_t \sin L_n \cos(l_t - l_n + \Omega_e t) & -\sin l_t \sin(l_t - l_n + \Omega_e t) & \sin L_t \cos L_n \cos(l_t - l_n + \Omega_e t) \\ + \cos L_t \cos L_n & & -\sin L_t \cos L_n \\ \sin l_t \sin(l_t - l_n + \Omega_e t) & \cos(l_t - l_n + \Omega_e t) & \cos l_t \sin(l_t - l_n + \Omega_e t) \\ \cos L_t \sin L_n \cos(l_t - l_n + \Omega_e t) & -\cos l_t \sin(l_t - l_n + \Omega_e t) & \cos L_t \cos L_n \cos(l_t - l_n + \Omega_e t) \\ -\sin L_t \cos L_n & & -\sin l_t \sin l_n \end{bmatrix} \quad (32)$$

상기 (30)~(32)에서 제시하는 자세 및 속도계산 알고리즘의 개선점은 좌표변환 행렬을 동체 각속도, 지구자전 각속도, 그리고 이동 각속도 등에 의한 자세변화로 (6)과 같이 계산한 것이며, 속도 미분방정식 해법의 고차항이 되는 지구자전 각속도와 이동 각속도가 중력 가속도와 결합되어 유발되는 (17), (19), 그리고 (29)를 추가한 것이다. 본 절에서는 이러한 개선점이 항법계산 알고리즘의 정확도를 어느 만큼 향상시키는지 간단한 전산 시뮬레이션을 통해 확인하는데, 전산 시뮬레이션의 프로그램에서 항법계산 알고리즘은 2×10^{-3} 초로 자이로, 가속도계 정보를 샘플링하고, 6×10^{-3} 초마다 자세, 속도, 위치를 계산하도록 실현되었다.

(6)과 같은 좌표변환 행렬의 계산방법은 (5)의 계산방법과 같이 급격한 자세변화로 지구자전 각속도와 이동 각속도의 보상오차가 유발되지 않으므로, 성능차이를 명확히 구분할 수 있는 전산 시뮬레이션 조건은 정동으로 마하 (mach) 1로 이동하는 운반체가 임의의 경로점에서 90 도/초의 각속도로 이동방향을 정남으로 변경하는 것을 가정하였다 이 경우의 전산 시뮬레이션 결과는 본 논문에서 제시하는 알고리즘의 경우 10^{-10} radian의 자세오차가 유발된

표 1. 속도계산 알고리즘의 시뮬레이션 결과 비교

Table 1. Simulation result of the velocity calculation algorithms.

요기영부	위치오차(meter)			속도오차 (10 ⁻³ meter/sec.)			자세오차 (radian)		
	n	e	d	n	e	d	n	e	d
Savage 알고리즘	30	471	5572	31	525	9711	71	05	55
본 논문의 알고리즘	001	07	78	005	07	137	01	001	008

것에 비해 (5)의 방법은 0.3×10^{-6} radian의 자세오차가 발생하였다

그리고 속도 미분방정식의 해법에서 (17), (19), 그리고 (29)의 특성은 단지 운반체의 운동과는 무관하게 주로 이 동속도와 시간에 관계되므로 전산 시뮬레이션 조건은 정동으로 마하 1로 이동하는 운반체를 가정하고 전산 시뮬레이션 시간은 일반적으로 관성항법장치의 성능평가 또는 교정(calibration)시간과 밀접한 관련이 있는 슈러(schuler) 주기인 90분으로 하였다. 이때의 전산 시뮬레이션 결과는 표 1과 같은데, 본 논문에서 제시한 속도계산 알고리즘과 비교 대상이 되는 항법계산 알고리즘의 성능은 Savage가 제시한 연구결과인 [8]의 (7), (14), (29), (61) 등을 3 샘플 알고리즘으로 실현하여 동일한 조건으로 전산 시뮬레이션을 수행한 결과이다.

전산 시뮬레이션에 의한 결과를 살펴보면 본 논문의 자세계산 알고리즘은 급격한 자세변화에서 0.3×10^{-6} radian 만큼 계산오차를 감소 시켰으며, 그리고 본 논문의 속도계산 알고리즘은 90분 동안에 Savage의 알고리즘에 비해 d 축 위치오차와 속도오차에서 각각 550 meter, 0.96 meter/sec 만큼 감소시킨 것을 비롯하여 전체적으로는 50 배 이상의 계산 정확도가 향상된 결과를 살펴볼 수 있다. 절대량으로 살펴보면 d 축 위치오차와 속도오차를 제외하고 계산 정확도의 향상은 비교적 작은 양이나 상대적인 계산 정확도의 향상은 상당한 것이어서 결과적으로 본 논문의 속도 및 자세계산 알고리즘이 국부수평 스트랩다운 관성항법장치에서 필수적으로 요구되는 지구자전 각속도와, 이동 각속도 보상을 위한 보다 개선된 해법임이 확인되었다.

V. 결론

본 논문은 과거에 이루어졌던 속도 교환오차와 자세 교환오차를 최소화한 연구결과에 국부수평 관성항법을 위해 항법좌표계 변위에 의한 자세변화와 이동 각속도 (transport rate) 및 지구자전 각속도를 보상하여 적분구간에서 3 샘플된 속도 변화량과 각 변화량을 이용하는 항법계산 알고리즘을 제시하였다. 제시된 항법계산 알고리즘은 이제까지 연구된 결과들을 바탕으로 자세계산을 위해서 동체 각속도와 지구자전 각속도 및 이동 각속도를 분리하여 계산할 수 있는 DCM 계산방법으로 유도되었으며, 속도계산에서는 Savage의 연구결과에서 무시되었던 속도 미분방정식 해법의 고차항과 항법좌표계 변위에 의한 자세변화를 고려하였다. 결과적으로 본 논문의 속도 및 자세계산 알고리즘은 전산 시뮬레이션을 통해 확인된 것 같이 국부수평 스트랩다운 관성항법장치에서 지구자전 각속도와, 이동 각속도의 정확한 보상을 위한 보다 개선된 해법이다.

참고문헌

[1] J. E. Bortz, "A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronics Systems*, AES-7, pp.

61-66, Jan. 1971.

[2] R. A. Miller, "A new strapdown attitude algorithm." *J. Guidance, Control and Dynamics*, vol. 4, no. 6, pp. 287-291, 1983.

[3] R. A. Mckern and H. Musoff, "Strapdown attitude algorithms from a geometric viewpoint," *J. Guidance, Control and Dynamics*, vol. 4, no. 6, pp. 657-661, 1981.

[4] J. G. Lee, Y. J. Yoon, J. G. Mark, and D. A. Tazartes. "Extension of strapdown attitude algorithm for high-frequency base motion." *J. Guidance, Control and Dynamics*, vol. 4, no. 13, pp. 738-743, 1990.

[5] M B Ignagni, "Optimal strapdown attitude integration algorithms," *J. Guidance, Control and Dynamics*, vol. 2, no. 13, pp. 363-369, 1990.

[6] 박찬국, 김광진, 이장규, "최적 스트랩다운 원추보상 알고리즘." 제어·자동화·시스템공학 논문지, 제2권, 제3호, pp. 242-247, 1996.

[7] P G. Savage. "Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 1 attitude algorithms," *J. Guidance, Control and Dynamics*, vol 21, no. 1, pp. 19-28, 1998.

[8] P G. Savage. "Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 2: velocity and position algorithms," *J. Guidance, Control and Dynamics*, vol. 21, no. 2, pp. 208-221, 1998.

[9] K R. Britting, *Inertial Navigation Systems Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1971.

부록

I. 스칼라 속도의 3 샘플 계수

적분구간에서 스칼라 속도는 (27)의 좌변으로 ω_b^b 와 f^b 를 각각 (25), (26)의 2차 시변으로 가정하여 풀이하면, 3 샘플된 속도 변화량 ($\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3$)과 각 변화량($\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3$)에 의하여 (28)의 우변이 된다. 이 과정을 풀이하면 우선 (25), (26)의 적분으로 (a.1), (a.2)로 나타낼 수 있으며, (25), (26) 그리고 (a.1), (a.2)를 (27)의 좌변에 대입하면 (a.3)이 된다.

단, 여기서

$$\phi(\tau) = \int_0^\tau \phi(s) ds \approx \int_0^\tau \omega_b^b(s) ds = \theta(\tau) \text{로 가정된 것이다}$$

$$v(\tau) = \int_0^\tau f^b(s) ds = A\tau + B\tau^2/2 + C\tau^3/3 \quad (a.1)$$

$$\theta(\tau) = \int_0^\tau \omega_b^b(s) ds = D\tau + E\tau^2/2 + F\tau^3/3 \quad (a.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{\Delta T} [\phi(\tau) \times f^b(\tau) + v(\tau) \times \omega_b^b(\tau)] d\tau \\ &= \frac{1}{12} (D \times B \Delta T^3 + A \times E \Delta T^3 + D \times C \Delta T^1 \\ &+ A \times F \Delta T^4 + \frac{1}{5} E \times C \Delta T^5 + \frac{1}{5} B \times F \Delta T^5) \quad (a.3) \end{aligned}$$

(a.3)의 매개변수 A, B, C, D, E, F를 3 샘플된 속도 변화

량과 각 변화량으로의 변환은 (a.1)과 (a.2)를 $t-\Delta T \sim t-2\Delta T/3, t-2\Delta T/3 \sim t-\Delta T/3, t-\Delta T/3 \sim t$ 의 세 부분으로 나누어 나타내면 각각 속도 변화량과 각 변화량에 대하여 (a.4)~(a.6)이 된다.

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= \frac{1}{3} A \Delta T + \frac{1}{18} B \Delta T^2 + \frac{1}{81} C \Delta T^3, \\ \Delta \theta_1 &= \frac{1}{3} D \Delta T + \frac{1}{18} E \Delta T^2 + \frac{1}{81} F \Delta T^3 \end{aligned} \quad (a.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta v_2 &= \frac{1}{3} A \Delta T + \frac{3}{18} B \Delta T^2 + \frac{7}{81} C \Delta T^3, \\ \Delta \theta_2 &= \frac{1}{3} D \Delta T + \frac{3}{18} E \Delta T^2 + \frac{7}{81} F \Delta T^3 \end{aligned} \quad (a.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta v_3 &= \frac{1}{3} A \Delta T + \frac{5}{18} B \Delta T^2 + \frac{19}{81} C \Delta T^3, \\ \Delta \theta_3 &= \frac{1}{3} D \Delta T + \frac{5}{18} E \Delta T^2 + \frac{19}{81} F \Delta T^3 \end{aligned} \quad (a.6)$$

(a.4)~(a.6)의 연립방정식을 풀면 A, B, C, D, E, F는 각각 속도 변화량과 각 변화량으로 (a.7)~(a.9)와 같다. A, B, C, D, E, F를 (a.3)에 대입하여 정리하면 (27)의 우변과 같이 된다.

$$\begin{aligned} A &= (11\Delta v_1 - 7\Delta v_2 + 2\Delta v_3)/2\Delta T, \\ D &= (11\Delta \theta_1 - 7\Delta \theta_2 + 2\Delta \theta_3)/2\Delta T \end{aligned} \quad (a.7)$$

$$\begin{aligned} B &= 9(-2\Delta v_1 + 3\Delta v_2 - \Delta v_3)/\Delta T^2, \\ E &= 9(-2\Delta \theta_1 + 3\Delta \theta_2 - \Delta \theta_3)/\Delta T^2 \end{aligned} \quad (a.8)$$

$$\begin{aligned} C &= 27(\Delta v_1 - 2\Delta v_2 + \Delta v_3)/2\Delta T^3, \\ F &= 27(\Delta \theta_1 - 2\Delta \theta_2 + \Delta \theta_3)/2\Delta T^3 \end{aligned} \quad (a.9)$$

II. 지구자전 각속도와 이동 각속도의 회전벡터

적분구간에서 지구자전 각속도와 이동 각속도에 대응되는 $\Delta\psi$ 는 $C_{n(t-\Delta T)}^{n(t)}$ 의 회전벡터 (22)로 근사화 할 수 있다. 따라서 적분구간 $t-\Delta T \sim t$ 에서 $C_{n(t-\Delta T)}^{n(t)}$ 를 (32)와 마찬가지로 지구자전 각속도와 $t-\Delta T$ 및 t 의 위도, 경도로 나타내면 (a.10)이 된다. 여기서 $\Delta l = l_t - l_{t-\Delta T}$ 이다

(a.10)에서 적분구간 ΔT 의 위치변화를 충분히 작다고 가정하면, $\cos(\Delta l + \Omega_e \Delta T) \approx 1$ 이고, $\sin(\Delta l + \Omega_e \Delta T) \approx \Delta l + \Omega_e \Delta T$ 로 근사화할 수 있으므로 (a.10)은 (a.11)이 된다. 여기서 $\Delta L = L_t - L_{t-\Delta T}$ 이다.

(a.11)의 ΔL 과 Δl 을 적분구간에서 정속도로 가정하면, 이동 각속도 ω_{en}^n 로 (a.12)와 같이 나타낼 수 있으며, 지구

$$\begin{aligned} C_{n(t-\Delta T)}^{n(t)} = & \begin{bmatrix} \sin L_t \sin L_{t-\Delta T} \cos(\Delta l + \Omega_e \Delta T) & -\sin L_t \sin(\Delta l + \Omega_e \Delta T) & \sin L_t \cos L_{t-\Delta T} \cos(\Delta l + \Omega_e \Delta T) \\ -\cos L_t \cos L_{t-\Delta T} & \cos(\Delta l + \Omega_e \Delta T) & -\sin L_{t-\Delta T} \cos L_t \\ \cos L_t \sin L_{t-\Delta T} \cos(\Delta l + \Omega_e \Delta T) & -\cos L_t \sin(\Delta l + \Omega_e \Delta T) & \cos L_t \cos L_{t-\Delta T} \cos(\Delta l + \Omega_e \Delta T) \\ -\sin L_t \cos L_{t-\Delta T} & \sin L_t \cos L_t & \sin L_{t-\Delta T} \cos L_t \end{bmatrix} \quad (a.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{n(t-\Delta T)}^{n(t)} \approx & \begin{bmatrix} 1 & -(\Delta l + \Omega_e \Delta T) \sin L_{t-\Delta T} & \Delta L \\ (\Delta l + \Omega_e \Delta T) \sin L_{t-\Delta T} & 1 & (\Delta l + \Omega_e \Delta T) \cos L_{t-\Delta T} \\ -\Delta L & (\Delta l + \Omega_e \Delta T) \cos L_{t-\Delta T} & 1 \end{bmatrix} \quad (a.11) \end{aligned}$$

자전 각속도는 (a.13) 이므로 (a.11)은 (a.14)와 같다

$$\omega_{en}^n = [\dot{L} \cos L \quad -\dot{L} \quad -\dot{L} \sin L]^T$$

$$\approx [\frac{\Delta L}{\Delta T} \cos L \quad -\frac{\Delta L}{\Delta T} \quad -\frac{\Delta L}{\Delta T} \sin L]^T \quad (a.12)$$

$$\omega_{ic}^n = [\Omega_e \cos L \quad 0 \quad -\Omega_e \sin L]^T \quad (a.13)$$

$$C_{n(t-\Delta T)}^{n(t)} \approx [I - (\Omega_{ic}^n + \Omega_{en}^n) \Delta T] \quad (a.14)$$

(a.14)로부터 적분구간에서 지구자전 각속도와 이동 각속도에 대응되는 회전벡터 $\Delta \psi \approx -(\Omega_{ic}^n + \Omega_{en}^n) \Delta T$ 이다.



송 기 원

1962년 1월 3일생 1984년 성균관 대학교 전자공학과 학사 졸업, 1992년 충남대학교 전자공학과 석사 졸업, 동대학 박사과정 1998~현재, 1984년~현재 국방과학연구소 선임연구원. 관심분야는 강인제어/필터, 추정이론 및 관성항법장치.

법장치.



이 상 정

1957년 8월 15일생 1979년 서울대 교 전자공학과 졸업, 동대학원 석사(1981), 동대학 박사(1987) 1988년~현재 충남대학교 전자공학과 교수. 관심분야는 강인제어 및 GPS 항법.