

신경회로망을 사용한 비선형 확률시스템 제어에 관한 연구

A Study on a Stochastic Nonlinear System Control Using Neural Networks

석진욱, 최경삼, 조성원, 이종수
(Jinwuk Seok, Kyung-Sam Choi, Seongwon Cho, and Jongsoo Lee)

Abstract : In this paper, we give some geometric condition for a stochastic nonlinear system and we propose a control method for a stochastic nonlinear system using neural networks. Since a competitive learning neural networks has been developed based on the stochastic approximation method, it is regarded as a stochastic recursive filter algorithm. In addition, we provide a filtering and control condition for a stochastic nonlinear system, called the perfect filtering condition, in a viewpoint of stochastic geometry. The stochastic nonlinear system satisfying the perfect filtering condition is decoupled with a deterministic part and purely semi martingale part. Hence, the above system can be controlled by conventional control laws and various intelligent control laws. Computer simulation shows that the stochastic nonlinear system satisfying the perfect filtering condition is controllable and the proposed neural controller is more efficient than the conventional LQG controller and the canonical LQ-Neural controller.

Keywords : stochastic nonlinear control, neural networks, feedback linearization, perfect filtering

I. 서론

최근 비선형 시스템 제어에 대한 연구는 제어 입력이 선형결합 가능으로 주어진 시스템에 대하여 미분 기하학적 접근으로 좌표변환을 통해 시스템을 Lie Derivation에 대하여 선형 시스템으로 변환하여 제어조건과 관측조건 그리고 제어기 설계에 대한 연구가 대종을 이루고 있다. A Isidori 등에 의해 제창된 궤환 선형화(feedback linearization)에 의한 비선형 시스템의 제어방식은 그동안 해석(analysis) 수준에 머물러 있던 비선형 시스템 제어 연구분야에 Kalman 등에 의해 발전된 선형 시스템의 상태방정식 해석을 통해 발전된 여러 제어기법들을 직접적으로 응용할 수 있을 뿐 아니라 최근 각광을 받고 있는 강인제어(robust control) 연구의 성과들을 직접적으로 응용할 수 있는 등 괄목할 만한 성과를 내고 있다[1][2]. 그러나, 백색잡음(white noise)이 포함된 비선형 확률시스템의 경우에는 현재까지도 뚜렷한 성과가 나타나지 못하고 있으며 매우 특별한 모델에 대해서만 어느 정도의 해석이 가해지고 있는 실정이다[3]. 최근, 강인제어 이론에 의해 발전하기 시작하는 불확실성 모델에 대한 비선형 시스템의 궤환 선형화 기법에서도 불확실한 모델이 엄밀한 정합조건을 만족할 경우에만 제어가 가능하다는 연구가 있었으며[4], 따라서 백색잡음과 같이 전 영역에 외란 주파수가 존재하는 경우에는 전실한 제어를 이루는데에 한계가 있다.

특히 비선형 확률시스템 제어문제의 경우에는 기존의 설정론적 미분 방정식 해법 대신 Ito Differential과 같은 비선형 미분 연산의 도입이 불가피 하므로[5][6] 결정론적 비선형 제어 시스템의 궤환 선형화기법에서 볼 수 있는

Lie 대수구조(lie-algebra)를 유도하기 어렵다. 이 같은 어려움 때문에 비선형 확률시스템의 제어문제는 Extended Kalman Filtering의 개념을 제어문제에 까지 확장하여, 1, 2차 Taylor 급수전개를 통한 국소 근사화 LQG 제어방식 [7]이나 특수한 비선형 확률시스템 제어모델에 대하여 Ito Differential 혹은 Fisk-Stratonovich Differential에 대한 Lie 대수구조(lie-algebra)를 구하여 제어조건을 유도하는 연구가 주종을 이루었다[3].

본 연구에서는 비선형 시스템의 미분 기하학적 접근을 통한 궤환 선형화 방식 제어이론을 잡음(noise)이 있는 비선형 시스템에 적용하여 확률 비선형 시스템의 제어를 위한 정합조건과 Perfect Filtering 조건을 유도하며, 유도된 조건을 만족하는 시스템 모델에 대하여 신경망을 사용한 제어 시스템을 구성하고, 기존의 EKF(Extended Kalman Filtering)에 근거한 제어시스템과 궤환 선형화된 시스템에 대한 선형 최적제어기와의 비교실험을 행한다. 또한 기존의 정준형 신경망 제어기와의 비교실험을 아울러 행한다.

II. 비선형 확률시스템을 위한 궤환 선형화 조건유도

입력 u 와 외란 ξ_i 에 대하여 선형분리가 가능한 다음과 같은 단일입력 단일출력 확률 비선형 시스템을 가정한다.

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= f(X_i) + g(X_i)u + b(X_i)\xi_i \\ Y_i &= h(X_i) \end{aligned} \quad (1)$$

(1)에서 $f(X_i)$ 와 $g(X_i)$ 는 $f(X_i) \in R^n$, $g(X_i) \in R^n$ 인 평활한 다양체 (C^∞ -Manifold)위에 정의된 벡터 필드(Vector Field)이며 X_i 는 시스템의 상태벡터 확률변수로서 $X_i \in R^n$ 인 R^n 벡터 Process로 Sample Path 연속이며(sample path continuous), u 는 $u \in R$ 인 스칼라 입력으로서 구간별 인

속이다(piecewise continuous). $h(X_t)$ 는 $h(X_t) \in R$ 인 스칼라 Process로 Sample Path 연속이며 시스템의 출력상태 확률변수이다. (9)가 시스템 (1)과의 가장 큰 차이는 외란으로 정의된 Wiener Process ξ_t 의 존재로 확률변수로서 정의되는 점이다 Wiener Process ξ_t 는 다음과 같이 정의된다.

정의 1 : Wiener Process ξ_t [6]

확률공간 (Ω, \mathcal{F}, P) 위에 정의된 Filtration \mathcal{F}_t 에 대하여 Process $(\xi_t, t \geq 0)$ 는 다음을 만족할 때 \mathcal{F}_t -Wiener Process라 한다.

1. $\xi_0 = 0$ w.p.1
2. ξ_t 는 \mathcal{F}_t -가측 (\mathcal{F}_t -Measurable)이며 $\mathcal{F}(\xi_s - \xi_t : s \geq t)$ 는 $\forall t \geq 0$ 에서 \mathcal{F}_t 에 대해 독립이다.
3. 증가소(increments) $\xi_s - \xi_t$ 는 $\forall s \geq t \geq 0$ 에 대해 평균 0이며 분산 $\sigma^2 > 0$ 인 정규분포를 가진다.
4. ξ_t 의 Sample Path는 $C^1[0, \infty)$ 이다 여기서 $C^1[0, \infty)$ 는 실패구간 $[0, T]$ 를 R^n 에 사상하는 연속 함수들의 공간이다.

시스템 (1)에서 ξ_t 가 \mathcal{F}_t -Wiener Process 조건을 만족한다고 가정하면 $b(X_t)\xi_t \in R^n$ 이므로 $b(X_t)\xi_t$ 는 벡터 Wiener Process이다. 또한, ξ_t 가 \mathcal{F}_t -Wiener Process이므로 상태벡터 확률변수 X_t 와 출력 상태벡터 확률변수 Y_t 는 \mathcal{F}_t -Adapted 이다 (즉, \mathcal{F}_t -가측이 아니면 $\forall s \geq t$ 에 대하여 ξ_s 의 X_t 와 Y_t 에 대한 영향을 모두 고려하여야 하나, (1)은 ξ_s 의 영향이 나타나지 않는다) 따라서 시스템 (1)은 다음과 같이 Ito 미분 방정식의 형태로 나타난다[8][9].

$$\begin{aligned} dX_t &= (f(X_t) + g(X_t)u)dt + b(X_t)dW_t \\ Y_t &= h(X_t) \end{aligned} \quad (2)$$

(2)에서 dW_t 는 Wiener Process의 Differential이다. 시스템 (2)을 폐환 선형화시키기 위해서는 출력함수 $h(X_t)$ 에 대한 Differential을 구하여야 한다. 이때 $h(X_t)$ 에 대한 Differential은 dW_t 의 존재 때문에 Ito 확률미분 방정식의 형태를 가져야 한다. Ito 미분에 의한 $h(X_t)$ 의 전 미분은 다음과 같다.

$$dh(X_t) = (L_f h(X_t) + L_g h(X_t) + \frac{1}{2} H_b h(X_t))dt + L_b h(X_t)dW_t \quad (3)$$

여기서 H_b 는 $h(X_t)$ 의 Hessian을 $H(X_t) \in R^{n \times n}$ 에 대해 다음을 만족하는 연산자이다 [12]

$$H_b h(X_t) = \langle b(X_t), H(h(X_t))b(X_t) \rangle$$

이때 Ito 미분연산자를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathcal{L}_{f,b} h(X_t) = (L_f h(X_t) + \frac{1}{2} H_b h(X_t))dt + L_b h(X_t)dW_t \quad (4)$$

그러므로 $h(x_t)$ 의 전미분은 다음과 같은 Feynman-Kac

공식을 따른다[10].

$$dh(X_t) = \mathcal{L}_{f,b} h(X_t) + L_b h(X_t)$$

주어진 시스템의 특성을 명확히 하기 위해 다음의 가정을 둔다.

가정 1. 주어진 확률시스템의 결정론적 부분의 상대차수(relative degree)가 r 이라 가정한다. i.e

$$\begin{aligned} L_b L_f^k h(x) &= 0 \quad \forall x \in B(\epsilon, x^0), \forall k < r-1 \\ L_b L_f^{r-1} h(x^0) &\neq 0 \end{aligned}$$

한편 Ito 확률 미분 방정식 대신 Stratonovich 확률 미분 방정식을 사용하여 $dh(X_t)$ 를 해석하면 다음과 같이 미분의 선형성이 보장되는 형태로 나타난다.

$$dh(X_t) = (L_{\tilde{f},b} h(X_t) + L_{\tilde{g}} h(X_t)u)dt + L_b h(X_t) \circ dW_t \quad (5)$$

이때 각 부분은 다음과 같이 정의된다

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{1}{2} b(x) \frac{\partial b(x)}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} L_b h(X_t) \circ dW_t &= \frac{1}{2} \nabla \cdot L_b h(X_t)dt + L_b h(X_t)dW_t \\ &= \frac{1}{2} bb' h'(X_t) + \frac{1}{2} H_b h(X_t) + L_b h(X_t)dW_t \end{aligned}$$

그러므로 $h(X_t)$ 에 대한 확률 미분 연산자를 사용한 전 미분 혹은 Stratonovich SDE로 비선형 확률시스템의 선형화를 도모할 수 있다.

III. 비 선형 확률 시스템의 Perfect Filtering 조건

비선형 시스템의 제어조건을 유도하기 전에 먼저 선형 확률 시스템의 가 제어성과 가 관측성에 대해 고찰해보면, 선형 확률 시스템의 가 제어성은 상태(state)가 완전 필터링 가능할 때, 즉 Semimartingale부분으로 명확히 Decomposition될 때 만족된다. (semimartingale decomposition) 그러므로 선형 확률 시스템의 가 제어성은 상태가 완전 필터링 가능할 때, 즉 Semimartingale Decomposition이 가능하면 1차 Moment(평균)에서 결정론적 경우에서 가 제어성과 일치한다. 그러므로 Brunovsky 정준형 모델에서 선형 확률 시스템의 가 관측성은 결국 상태 잡음이 모든 상태에 Imbedded 되지 않고 나타나야 만족됨을 의미한다. 따라서 비선형 확률시스템의 가 제어성을 알아보기 위해서는 Differential $dL_f^r h(X_t)$ 의 존재조건을 살펴보아야 한다. 비선형 확률시스템의 가 제어성, 가 관측성 조건을 알아보기 위해 (3)의 결과를 확장하자.

정리 1 : 단일 입력 단일 출력 비선형 확률제어 시스템 (2)에서 시스템의 출력이 입력의 영향을 받지 않기 위해서는 x^0 에서 상대차수 r 에 대하여 다음의 조건을 만족하여야 한다.

- i) $L_g \mathcal{L}_{f,b}^k h(x) = 0, \forall x \in B(x^0, \epsilon)$ and $\forall k < r-1$
- ii) $L_g \mathcal{L}_{f,b}^{r-1} h(x^0) \neq 0$

증명 . $r=0$ 의 경우를 살펴보면

$$dh(X_t) = (L_f h(X_t) + \frac{1}{2} H_b h(X_t))dt + L_b h(X_t)dW_t \quad (9)$$

$$= \mathcal{L}_{f,b} h(X_t)$$

그리고 $r=1$ 의 경우에는

$$\begin{aligned} d^2 h(X_t) &= (L_f \mathcal{L}_{f,b} h(X_t) + \frac{1}{2} H_b \mathcal{L}_{f,b} h(X_t))dt + L_b \mathcal{L}_{f,b} h(X_t)dW_t \\ &= \left\{ L_f (L_f + \frac{1}{2} H_b) h(X_t)dt + L_b L_b h(X_t)dW_t \right. \\ &+ L_g (L_f + \frac{1}{2} H_b) h(X_t)dt + L_g L_b h(X_t)dW_t \\ &+ \frac{1}{2} H_b (L_f + \frac{1}{2} H_b) h(X_t)dt + \frac{1}{2} H_b L_b h(X_t)dW_t \left. \right\} dt \\ &+ L_b (L_f + \frac{1}{2} H_b) h(X_t)dW_t + L_b L_b h(X_t)dW_t dW_t \\ &= \left((L_f + \frac{1}{2} H_b)dt + L_b dW_t \right) \left\{ (L_f + \frac{1}{2} H_b) h(X_t)dt + L_b h(X_t)dW_t \right\} \\ &+ L_g \left\{ (L_f + \frac{1}{2} H_b) h(X_t)dt + L_b h(X_t)dW_t \right\} \\ &= \mathcal{L}_{f,b}^2 h(X_t) \end{aligned} \quad (10)$$

따라서 $dh(X_t)$ 에는 Ito 미분연산자(operator) $\mathcal{L}_{f,b}$ 에 대한 미분만으로 정의되어 입력 $g(X_t)$ 에 대한 항이 존재하지 않으므로 입력 $g(X_t)$ 의 영향을 받지 않는다. $r > k+1$ 인 k 에 대하여 (10)과 같이 $d^k h(X_t)$ 가 Ito 미분 연산자 $\mathcal{L}_{f,b}$ 에 대한 미분만으로 다음과 같이 성립한다고 가정하자.

$$d^k h(X_t) = \mathcal{L}_{f,b}^k h(X_t)$$

이때 $d^{k+1} h(X_t)$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d^{k+1} h(X_t) &= (L_f \mathcal{L}_{f,b}^k h(X_t) + L_g \mathcal{L}_{f,b}^k h(X_t) \\ &+ \frac{1}{2} H_b \mathcal{L}_{f,b}^k h(X_t))dt + L_b \mathcal{L}_{f,b}^k h(X_t)dW_t \quad (11) \\ &= \mathcal{L}_{f,b}^{k+1} h(X_t) + L_g \mathcal{L}_{f,b}^k h(X_t) \end{aligned}$$

(11)의 우항의 두번째 항은 $k < r-1$ 에 대하여 $L_g \mathcal{L}_{f,b}^k h(X_t) = 0$ 이다. 따라서 (11)은 가정 i), ii)가 만족될 때

$$d^{k+1} h(X_t) = \mathcal{L}_{f,b}^{k+1} h(X_t)$$

이므로 입력의 영향을 받지 않는다. ■

정리 1의 가정 i), ii)를 확률화 상대차수(stochastic relative degree)라고 명명한다. 정리 1의 증명은 충분조건에 관한 것이나 (11)에서 $d^{k+1} h(X_t)$ 이 입력에 대한 영향을 받지 않으려면 자연스럽게 정리 1의 가정 i), ii)를 만족하여야 하므로 정리 1은 필요충분조건으로 만족된다. 확률화 상대차수가 n 차원 전체에 만족되면 Ito 미분연산자 $\mathcal{L}_{f,b}$ 혹은 Stratonovich-Lie Derivative L_f 에 대해 결정론적 경우와 같은 Brunowsky 정준형을 유도할 수 있다. 그러므로 결정론적 시스템의 Brunowsky 정준형을 참조 모델(reference model)로 사용할 수 있다.

확률화 상대차수를 통해 비선형 확률시스템의 Brunowsky 정준형으로의 유도를 위한 입력조건이 유도된다. 한편, 비선형 확률시스템의 가 관측성과 Filtering조건을 알아보기 위해서는 비선형 확률시스템 (9)가 확률화 상대차수가 만족되는 범위내에서 결정론적부분과 Martingale부분을 분리하기 위한 Semimartingale Decomposition을 행하여야 한다.

정의 2 : 비선형 확률시스템 (1)에서 Wiener-Levy process의 Differential을 제외한 항의 미분 연산자를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathcal{L}_{f,b}^m = (L_f h(X_t) + \frac{1}{2} H_b h(X_t))dt \quad (12)$$

$dh(X_t)$ 를 $\mathcal{L}_{f,b}^m$ 을 사용하여 표시하면

$$dh(X_t) = \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) + L_b h(X_t)dW_t \quad (13)$$

따라서 $d^2 h(X_t)$ 는 다음과 같이 Semimartingale Decomposition된다.

$$\begin{aligned} d(dh(X_t)) &= \mathcal{L}_{f,b}^m \{ \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) + L_b h(X_t)dW_t \} \\ &+ L_b \{ \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) + L_b h(X_t)dW_t \} dW_t \quad (14) \\ &= \mathcal{L}_{f,b}^{m,2} h(X_t) + L_b^2 h(X_t)dW_t dW_t \\ &+ \{ \mathcal{L}_{f,b}^m L_b^2 h(X_t) + L_b \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) \} dW_t \end{aligned}$$

(14)을 살펴보면 Ito 미분의 적분특성에 의해 결정론적 부분은 다음과 같다.

$$\mathcal{L}_{f,b}^{m,2} h(X_t) + L_b^2 h(X_t)dW_t dW_t \quad (15)$$

한편, Semimartingale 부분은 다음과 같다.

$$\mathcal{L}_{f,b}^m L_b h(X_t) + L_b \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t)dW_t \quad (16)$$

따라서 $dh(X_t)$ 의 Wiener-Levy process항 $L_b h(X_t)dW_t$ 이 다시 Stochastic Differential dW_t 의 Differential로 나타나게 되면 Brunowsky 정준형으로의 변환은 $\mathcal{L}_{f,b}^m$ 에 대하여 불가능함을 알 수 있다. 즉, (17)의 결과에서 관측기능과 Filtering 기능이 존재하기 위해서는 결정론적 부분이 잡음에 의해 왜곡되어서는 불가능하다.(slice가 형성되지 않는다.) 따라서 다음 조건이 만족되어야 (14)가 $d(dh(X_t))$ 에 대하여 완전 Martingale Decomposition 가능하다.

$$\begin{aligned} L_b^2 h(X_t)dW_t dW_t &= 0 \\ \mathcal{L}_{f,b}^m L_b h(X_t) &= 0 \quad (17) \\ d(dh(X_t)) &= \mathcal{L}_{f,b}^{m,2} h(X_t) + L_b \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t)dW_t \end{aligned}$$

(17)은 Ito 미분식 이므로 $d(dh(X_t))$ 는 Martingale 특성을 만족하지만 (17)의 적분값이 명확하게 결정론적 부분과 Martingale 부분으로 나누어 지는지 명확하지 않다. 그러나, Stratonovich 미분을 통하여 (13)을 다시 살펴 볼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 dh(X_t) &= \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) + L_b h(X_t) dW_t \\
 &= \left\{ L h(X_t) + \frac{1}{2} H_b h(X_t) - \frac{1}{2} \langle b(X_t) H(h(X_t)) b(X_t) \rangle \right\} dt \\
 &\quad + L_b h(X_t) \cdot dW_t \\
 &= L h(X_t) + L_b h(X_t) \circ dW_t
 \end{aligned} \tag{18}$$

따라서, Stratonovich 미분을 통해 다시 살펴보면 (17)의 조건이 만족되면 결정론적 부분은 일반적인 Lie-Derivation에 의한 미분 항이 되며 Wiener Process의 Differential 부분은 변화 없이 Martingale부분으로 적분값이 나타날 수 있음을 알 수 있다. (17)의 결과를 임의의 k차 미분으로 확대하면 다음의 정리를 얻는다

정리 2 : 임의의 k차 Ito 미분에 대하여 상대차수 r이 다음의 Filtering 조건을 만족할 때 시스템 (1)는 결정론적 부분과 Martingale 부분이 연속미분에 대하여 (19)와 같이 k차에 대하여 동일한 Form을 갖는다.

- i) $L_b^2 \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-2} h(x) = 0 \quad \forall x \in B(x^0, \epsilon) \text{ and } \forall 2 \leq k \leq r$
- ii) $\mathcal{L}_{f,b}^m L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-2} h(x^0) = 0, \quad \forall x \in B(x^0, \epsilon)$
and $\forall 2 \leq k \leq r$

$$dh^{(k)}(X_t) = \mathcal{L}_{f,b}^m h(x_t) + L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-1} h(X_t) dW_t \tag{19}$$

증명 : k=2의 경우 자연스럽게 성립하므로 k=3의 경우를 살펴본다.

$$\begin{aligned}
 d^3 h(X_t) &= \mathcal{L}_{f,b}^m \{ \mathcal{L}_{f,b}^m \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) + L_b \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) dW_t \} \\
 &\quad + L_b \{ \mathcal{L}_{f,b}^m \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) + L_b \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) dW_t \} dW_t \\
 &= \mathcal{L}_{f,b}^m \mathcal{L}_{f,b}^m \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) + L_b^2 \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) d^2 W_t \\
 &\quad + \mathcal{L}_{f,b}^m L_b \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) dW_t + L_b \mathcal{L}_{f,b}^m \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) dW_t
 \end{aligned}$$

가정의 조건 i), ii)가 만족되면

$$L_b^2 \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) d^2 W_t = 0 \quad \mathcal{L}_{f,b}^m L_b \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) dW_t = 0$$

따라서

$$d^3 h(X_t) = \mathcal{L}_{f,b}^m \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) + L_b \mathcal{L}_{f,b}^m \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) dW_t$$

이 되어 Filtering이 가능해진다.

r > k-1의 경우 Filtering 조건을 만족한다고 한다면 동역학 방정식은 다음과 같다

$$\begin{aligned}
 dh^{(k-1)}(X_t) &= \mathcal{L}_{f,b}^m h^{(k-1)}(x_t) + L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-2} h(X_t) dW_t \\
 dh^{(k)}(X_t) &= \mathcal{L}_{f,b}^m \{ \mathcal{L}_{f,b}^m h^{(k-1)}(x_t) + L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-2} h(X_t) dW_t \} \\
 &\quad + L_b \{ \mathcal{L}_{f,b}^m h^{(k-1)}(x_t) + L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-2} h(X_t) dW_t \} dW_t \\
 &= \mathcal{L}_{f,b}^m \mathcal{L}_{f,b}^m h^{(k-1)}(x_t) + L_b^2 \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-2} h(X_t) dW_t dW_t \\
 &\quad + L_b \mathcal{L}_{f,b}^m h^{(k-1)}(x_t) dW_t + \mathcal{L}_{f,b}^m L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-2} h(X_t) dW_t
 \end{aligned}$$

가정의 조건 i), ii)에 의해

$$\begin{aligned}
 L_b^2 \mathcal{L}_{f,b}^m h^{(k-2)}(X_t) dW_t dW_t &= 0 \\
 \mathcal{L}_{f,b}^m L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-2} h(X_t) dW_t &= 0
 \end{aligned}$$

이므로 임의의 k차 Ito 미분에 대하여

$$dh^{(k)}(X_t) = \mathcal{L}_{f,b}^m h^{(k)}(x_t) + L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-1} h(X_t) dW_t \quad \blacksquare$$

이를 Perfect Filtering 조건이라 명명한다.

Perfect Filtering조건이 만족되면 케환 선형화에 대한 외란 분리(disturbance decoupling)가 보다 강한 조건을 통해 가능해진다.

정리 3 : 임의의 k차 Ito 미분에 대하여 상대차수 r이 x⁰ 주변에 정의될 때 시스템의 출력은 필요충분 조건으로 외란에 대해 분리된다.

$$L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, i} h(x) = 0 \quad \forall x \in B(x^0, \epsilon) \text{ and } \forall 0 \leq i \leq r-1$$

이 때의 입력 u가 u = α(x) + β(x)v의 형태로 주어질 때 입력 u는 (20)과 같다.

$$u = -\frac{\mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t)}{L_g \mathcal{L}_{f,b}^{m, r-1} h(X_t)} + \frac{v}{L_g \mathcal{L}_{f,b}^{m, r-1} h(X_t)} \tag{20}$$

증명 : 가정에 의해

$$\begin{aligned}
 L_b^2 \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-2} h(x) &= L_b L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-2} h(x) = 0 \\
 \mathcal{L}_{f,b}^m \{ L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-2} h(x^0) \} &= 0
 \end{aligned}$$

이므로 정리 3의 조건은 자동적으로 Perfect Filtering조건을 만족한다 정리 2에 의해 h(X_t)의 r차 미분은 다음과 같다.

$$d^r h(X_t) = \mathcal{L}_{f,b}^m h(x_t) + L_g \mathcal{L}_{f,b}^{m, r-1} h(X_t) \cdot u + L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, r-1} h(X_t) dW_t$$

그러므로 d^rh(X_t) = 0이고 가정에 의해 L_b d^rh(X_t) dW_t = 0 이므로 케환 선형화입력 u는

$$u = -\frac{\mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t)}{L_g \mathcal{L}_{f,b}^{m, r-1} h(X_t)} + \frac{v}{L_g \mathcal{L}_{f,b}^{m, r-1} h(X_t)} \quad \blacksquare$$

결정론적인 경우 정리 3의 조건은 A. Isidori의 외란분리조건과 비교하면 f(x)에 대한 Lie-Derivation L_f가 Martingale Ito 미분연산자 $\mathcal{L}_{f,b}^m$ 로 변환된 것임을 알 수 있다. 따라서 Codistribution $\mathcal{Q} = \text{span}\{dh(X_t), d\mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t), \dots, d^2 \mathcal{L}_{f,b}^{m, r-1} h(X_t)\}$ 에 대하여 Wiener Process에 대한 Vector Field b(X_t)가 다음과 같은 기하학적 조건을 만족하여야함을 의미한다.

$$b(X_t) \perp \mathcal{Q}^{\perp} \quad X_t \in U(x^0, \epsilon)$$

즉, Wiener-Levy process를 결정하는 b(X_t)가 h(X_t)의 Martingale Ito differential과 직교임을 의미한다. 즉, Wiener-Levy process는 결정론적 Differential과 독립일때 완전한 외란 분리가 가능해진다. 따라서 외란은 케환 선형화에서 나타나지 않게된다. 이때 L_b d^rh(X_t) dW_t ≠ 0 이므로

$$d^k h(X_t) = \mathcal{L}_{f,b}^m h(x_t) + L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-1} h(X_t) dW_t \quad \forall 0 \leq k < r-1 \quad (21)$$

$$d^r h(X_t) = \mathcal{L}_{f,b}^m h(x_t) + L_g \mathcal{L}_{f,b}^{m, r-1} h(X_t) \cdot u + L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, r-1} h(X_t) dW_t \quad k=r-1$$

와 같이 나타난다. 따라서 적절한 최적 Filtering을 통해 Wiener Process항의 영향을 최소화 해야한다.

IV. Perfect Filtering 조건하에서 신경망을 사용한 비선형 확률시스템 제어

Perfect Filtering 조건이 만족되는 상태에서 Martingale Ito 미분연산자 $\mathcal{L}_{f,b}^m$ 에 대하여 귀환 선형화를 행하면, $\forall t \geq 0$ 에서 \mathcal{F}_t 에 대하여 평균을 취해

$$E_{\mathcal{F}_t} L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, r-1} h(X_t) dW_t = L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, r-1} h(X_t) E_{\mathcal{F}_t} dW_t = 0 \quad (22)$$

이므로 (21)은 다음과 같이 정리된다.

$$Ed^k h(X_t) = \mathcal{L}_{f,b}^m h(x_t) \quad \forall 0 \leq k \leq r-1 \quad (23)$$

$$Ed^r h(X_t) = \mathcal{L}_{f,b}^m h(x_t) + L_g \mathcal{L}_{f,b}^{m, r-1} h(x_t) \cdot u$$

(23)에 의해, \mathcal{F}_t 에 대한 평균에 대하여 정리 2에서 외란분리를 위한 입력

$$u = -\frac{\mathcal{L}_{f,b}^{m, r-1} h(X_t)}{L_g \mathcal{L}_{f,b}^{m, r-1} h(X_t)} + \frac{v}{L_g \mathcal{L}_{f,b}^{m, r-1} h(X_t)}$$

을 사용하면 좌표변환에 의해 귀환선형화가 이루어진다.

$$\begin{aligned} E z_1 &= z_2 & E z_{r+1} &= q_{r-1}(z) \\ E z_2 &= z_3 & & \dots \\ & \dots & E z_n &= q_n(z) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} E z_{r-1} &= z_r \\ E z_r &= b(z) + z(z)u \end{aligned}$$

위 식에서 $\dot{z}_k = \mathcal{L}_{f,b}^m h(x_t) (dt)^{-1} + L_b \mathcal{L}_{f,b}^m h(x_t) \xi_t$ 이며, $k \geq r+1$ 인 z_k 는 Zero Dynamics로서 출력측에 Zero Dynamics의 내부 동역학은 직접 나타나지 않는다 만일 상대차수 r 이 시스템 (2)의 차원 n 이면 Zero Dynamics가 존재하지 않게된다. (24)에서 $\varepsilon_t = L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-1} h(x_t) \xi_t$ 로 정의하면 (24)는 선형 가 제어 정준형과 같은 형태의 동역학 방정식을 상대차수 r 보다 작은 차수에 대하여 가지게 된다

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 + \varepsilon_1 \\ z_2 &= z_3 + \varepsilon_2 & E z_{r+1} &= q_{r-1}(z) \\ & \dots & & \dots \\ z_{r-1} &= z_r + \varepsilon_{r-1} & E z_n &= q_n(z) \\ \dot{z}_r &= b(z) + z(z)u + \varepsilon_r \end{aligned} \quad (25)$$

(25)의 문제점은 $\varepsilon_r = L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-1} h(x_t) \xi_t$ 가 가변적인 분포를 가진 잡음으로 나타난다는 점이다. 앞에서 $\xi_t - \hat{\xi}_t$ 가 정규분포를 따른다고 하였으므로 가정에 의해 $\xi_t = \xi_t - \hat{\xi}_t$

이므로 ξ_t 역시 정규분포를 따르게되나 분산의 크기를 결정하는 항이 시간에 대한 항과 $L_b \mathcal{L}_{f,b}^{m, k-1}$ 의 관계식으로 나타나게 되므로 Kalman Filtering과 같은 특수한 경우를 제외하고 선형 최적 필터를 구하기가 매우 어렵다. 따라서 ε_k 의 영향을 최소화 하는 추정된 \hat{z}_k 를 구하는 예측자(predictor)의 도입이 이루어진다면 선형 LQ제어의 분리원칙(separation principle)에 의해 최적 제어입력을 구하여 그것을 비선형 시스템의 제어 입력으로 할 수 있다

본 논문에서는 하드웨어 구현이 편리하고 패턴분류 성능이 우수한 Langevine경쟁학습신경망 모델[11]과 상공간 정준형 경쟁학습 신경망을 귀환 선형화된 비선형 확률 제어기의 예측자(predictor)로 사용한다.

신경망을 사용한 제어 시스템 구성을 위해 참조 모델은 귀환 선형화로 선형화된 시스템을 사용한다. 그리고 비선형 시스템에는 (20)에서 구한 입력 u 가 귀환되어 인가된다고 본다. 참조 모델에서 구해지는 상태벡터를 z_r , 그리고 선형화 입력이 인가된 비선형 확률시스템의 상태벡터를 z_R 이라고 하면 각 시스템의 상태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_R &= A z_R + B u_R + \Gamma \xi_t \\ \dot{z}_r &= A z_r + B u_r \end{aligned} \quad (26)$$

이 때 $e \equiv z_R - z_r$ 로 정의하면 (26)에서 e 의 동역학 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{e} = A e + B(u_R - u_r) + \Gamma \xi_t \quad (27)$$

그런데, 실제 비선형 시스템으로 인가되는 제어입력은 $u_R = u_r + u_N = u_r - K_N e_N$ 이다. K_N 은 e 에 대한 LQR이득이며 e_N 은 경쟁학습 신경망을 통해 정규화된 오차항으로서 $e_N = e + \Delta e_N$ 으로 정의한다 따라서

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A e + B(u_r - K_N e_N - u_r) + \Gamma \xi_t \\ &= A e + B u_N + \Gamma \xi_t \\ &= (A - B K_N) e + \Gamma \xi_t - B K_N \Delta e_N \end{aligned} \quad (28)$$

(27)에서 신경망의 영향이 없다고 가정하면 $\Gamma \xi_t$ 는 Perfect Filtering 조건에 의해 신경망의 출력과 독립적으로 나타나므로 $\dot{e} - \Gamma \xi_t = A e$ 이다. 이를 (28)에 넣어 정리하면 $-B K_N e_N = 0$ 이 된다 이는 필요조건으로서 $\uparrow \infty$ 에 따라 $-B K_N e_N \downarrow 0$ 이어야 함을 의미한다. 이를 다음 정리를 통해 엄밀하게 살펴보자

정리 4. 목적함수 $J_t = \frac{1}{2} \int_0^{t-1} \|e_t - w_t\|^2 dt$ 를 최소화 할 수 있는 경쟁학습 신경망과 LQ제어기가 결합된 그림 22와 같은 비선형 확률제어 시스템은 $e_t \in U(0, \varepsilon)$ 에 대하여

$J_{z_0, u} = E_{0, z_0} \left\{ z_0^T Q z_0 + \int_0^T (z_t^T Q z_t + u_t^T R u_t) dt \right\}$ 을 최소화 시킨다.

증명 : 제어 목적함수를 다시 쓰면

$$\begin{aligned}
 & J(z_0, u) \\
 &= E_{0, z_0} \left\{ z_0^T Q_T z_0 + \int_0^T (z_t^T Q z_t + u_t^T R u_t) dt \right\} \\
 &= E_{0, z_0} \left\{ (z_{rT} + e_T)^T Q_T (z_{rT} + e_T) \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^T ((z_{rt} + e_t)^T Q_t (z_{rt} + e_t) + u_t^T R_t u_t) dt \right\} \\
 &= E_{0, z_0} \left\{ z_{rT}^T Q_T z_{rT} + \int_0^T (z_{rt}^T Q_t z_{rt} + u_{rt}^T R_t u_{rt}) dt \right\} \\
 &\quad + E_{0, z_0} \left\{ e_T^T Q_T e_T + \int_0^T (e_t^T Q_t e_t + u_{Nt}^T R_t u_{Nt}) dt \right\}
 \end{aligned} \tag{29}$$

위 식에서 $E_{0, z_0} \left\{ z_{rT}^T Q_T z_{rT} + \int_0^T (z_{rt}^T Q_t z_{rt} + u_{rt}^T R_t u_{rt}) dt \right\}$ 부분은 결정론적 부분으로서 참조 모델에 의해 최적화 된 제어입력 $u_{rt} = -R_t^{-1} B^T P_t z_{rt}$ 을 생성해 낸다. 한편 정의 1의 Wiener-Levy Process 정의에 의해 $H_{z_t} \perp H_{e_t}$, 이며 $E_{0, z_0} \left\{ e_T^T Q_T e_T + \int_0^T (e_t^T Q_t e_t + u_{Nt}^T R_t u_{Nt}) dt \right\}$ 는 결정론적 LQ 제어 입력 u_{rt} 의 영향을 받지 않는다 그런데 (28)에서 e_t 의 동역학 방정식은 폐환 선형화에 의해 $e = Ae + Bu_N + \Gamma \xi_t$ 로서 선형 LQG 제어기와 Γ_t 를 제외하고 같은 계수를 가지게 된다. 정의에 의해 $e_t = e_{Nt} - \Delta e_{Nt}$ 이므로 이를 (29)의 우변의 두 번째 항에 적용하면,

$$\begin{aligned}
 & E_{0, z_0} \left\{ e_T^T Q_T e_T + \int_0^T (e_t^T Q_t e_t + u_{Nt}^T R_t u_{Nt}) dt \right\} \\
 &= E_{0, z_0} \left\{ (e_{NT} - \Delta e_{NT})^T Q_T (e_{NT} - \Delta e_{NT}) \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^T ((e_t - \Delta e_{Nt})^T Q_t (e_t - \Delta e_{Nt}) + u_{Nt}^T R_t u_{Nt}) dt \right\} \tag{30} \\
 &= E_{0, z_0} \left\{ e_{NT}^T Q_T e_{NT} + \int_0^T (e_t^T Q_t e_t + u_{Nt}^T R_t u_{Nt}) dt \right\} \\
 &\quad + E_{0, z_0} \left\{ \Delta e_{NT}^T Q_T \Delta e_{NT} + \int_0^T \Delta e_t^T Q_t \Delta e_t dt \right\}
 \end{aligned}$$

(30)의 우변의 첫 번째 항은 $e = Ae + Bu_N + \Gamma \xi_t$ 로서 선형 LQG 제어를 통해 최적 제어 입력 $u_N = -R^T B P e_N$ 을 생성해 내므로 최적화 된다. 여기서 (29)와 (30)은 다음의 대수적 Riccati 방정식을 만족한다.

$$\dot{P}_t + A_t^T P_t + P_t A_t + Q_t - P_t B_t R_t^{-1} B_t^T P_t = 0 \tag{31}$$

(30)의 우변의 두 번째 항 $E_{0, z_0} \left\{ \Delta e_{NT}^T Q_T \Delta e_{NT} + \int_0^T \Delta e_t^T Q_t \Delta e_t dt \right\}$ 은 Δe_{Nt} 의 함수이다. 그런데 e_{Nt} 는 신경망의 Weight Vector w_t^r 에서 Weight Vector Index $r = \arg \min_{k \in A} \|e_t - w_k^r\|$ 에 대하여 $\Delta e_{Nt} = e_{Nt} - e_t = w_t^r - e_t$ 이므로 신경망의 Update 항 $(e_t - w_t^r)$ 를 $Q_t(e_t - w_t^r)$ 로 학습방정식을 변화시키거나 $Q_t = I \quad \forall t \geq 0$ 으로 놓으면 제안한 경쟁학습 신경망을 그대로 사용할 수 있다. 그런데, 사용된 경쟁학습 신경회로망은 $e_t \in U(0, \epsilon)$ 인 범위의 국소 최소점을 항상 보장하므로 [11][12] (30)의 우변의 두 번째 항 $E_{0, z_0} \left\{ \Delta e_{NT}^T Q_T \Delta e_{NT} + \int_0^T \Delta e_t^T Q_t \Delta e_t dt \right\}$ 최소값은 제안한 경쟁학습 신경망에 의해 보장된다. 따라서 제안한 제어 시스템은 폐환 선형화와 신경망의 Receptive Field가 Cover하는 범위내에서 제어 목적함수를 국소 최소화 시킨

다. ■
 가정 3 에서 참조 모델에서 구해지는 상태벡터를 z_r , 그리고 선형화 입력이 인가된 비선형 확률시스템의 상태벡터를 z_R 이라고 하면 각 시스템의 상태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_R &= A z_R + B u_R + \Gamma \xi_t \\
 \dot{z}_r &= A z_r + B u_r
 \end{aligned}$$

이 때 $e \equiv z_R - z_r$ 로 정의하면 위 식에서 e 의 동역학 방정식은 다음과 같다

$$\dot{e} = A e + B(u_R - u_r) + \Gamma \xi_t$$

이때 Innovation Process ξ_t 를 정의한다. Innovation Process의 정의에 의하면 Observation Process $\dot{z}_R = A z_R + B u_R + \Gamma \xi_t$ 에서 ξ_t 는 Wiener Process이고 Γ_t 는 $L_b \mathcal{L}_{J, b}^{m, k-1} h(x_t)$ 에 의해 결정되는 항이다 따라서 Innovation Process ξ_t 는 $E z_R = A z_R + B u_R$ 과 \dot{z}_R 의 차로 정의된다 [13].

$$d_t \xi_t = \dot{z}_R - E \dot{z}_R$$

그런데 제안한 시스템의 정의에 의해 $E \dot{z}_R = A z_R + B u_R = A z_r + B u_r$ 이다. 고로 Innovation Process ξ_t 는

$$d_t \xi_t = \dot{z}_R - E \dot{z}_R = \dot{z}_R - \dot{z}_r = \dot{e}_t$$

따라서 e_t 는 Innovation Process이다. 그러므로 Innovation Process의 정의에 의해 e_t 에 의해 Span 되는 Hilbert Space H_{e_t} 는 z_{rt} 에 의해 구성되는 Hilbert Space $H_{z_{rt}}$ 와 $H_{z_{rt}} \perp H_{e_t}$ 의 성질을 만족한다.

V. 사례 연구와 시뮬레이션 결과

제안한 방법을 Flexible Joint Manipulator에 대하여 적용하였다. Flexible Joint Manipulator의 시스템 동역학은 다음과 같다

$$\begin{aligned}
 J_1 \ddot{q}_1 + F_1 \dot{q}_1 + \frac{K}{N} (q_2 - \frac{q_1}{N}) &= T \tag{32} \\
 J_1 \ddot{q}_2 + F_1 \dot{q}_2 + \frac{K}{N} (q_2 - \frac{q_1}{N}) + mgd \cos q_2 &= 0
 \end{aligned}$$

(32)에서 J_1, J_2 은 관성계수 (inertia constant)이며, F_1, F_2 는 Viscous Friction 계수이며, K 는 용수철 계수이며 N 은 기어비, T 는 Actuator측에서 발생되는 Torque이며 m 은 질량, d 는 링크에서의 무게중심이다. 한편 q_1, q_2 는 고정 Reference Frame에 대한 각도 (angular position) 이다. 이 때 상태벡터는 $x = (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$ 이고 이 때의 시스템 방정식은 (34)와 같으며 시스템의 출력은 Link의 각도로서 다음과 같다

$$y = h(x) = x_2 \tag{33}$$

선형화 입력은 $u = \frac{-L_1^j h(x) + v}{L_2 L_3^j h(x)}$ 이며, 외부 입력 v 로

서 시스템의 안정화를 도모한다. 선형화 입력 u 가 인가 되었을 때 선형화 Model은 (35)와 같다.

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ \frac{-K}{J_1 N^2} x_1 + \frac{K}{J_1 N} x_2 - \frac{F}{J_1} x_3 \\ \frac{K}{J_2 N^2} x_1 - \frac{K}{J_2} x_2 - \frac{mgd}{J_2} \cos x_2 - \frac{F}{J_1} x_3 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (35)$$

시스템에 선형화 입력 u 가 인가되고 안정화 입력 v 가 인가 되지 않았을 때의 응답은 그림 4와 같다.

안정화 입력이 없는 상태에서의 Link 각도 위치의 변화는 지수 함수적으로 감소하여 -15 Radian 으로 수렴하는 큰 변화와 변화상태 사이에 정현적인 작은 변화가 같이하고 있어 비선형적 특성을 잘 나타내고 있다. 한편 백색잡음이 상태 방정식위에 존재하는 경우는 그림 5와 같이 시스템의 상태를 전혀 예측할 수 없다. 시뮬레이션 환경은 IBM-PC Pentium100이며 MatLaB 4.01 Simulink 환경에서 행하였다. 백색잡음이 시스템에 인가되었을 때 앞 절에서 살펴본 바 Perfect Filtering을 만족할 수 있는 조건을 찾아야 한다. Perfect Filtering조건을 찾기 전에 주어진 시스템의 특성상 시스템 출력이 상태벡터의 한 성분 이므로 $H_b h(x_t) = \langle b(x_t), H(h(x_t))b(X_t) \rangle$ 를 구하기 위해 출력함수의 Hessian을 구하면 $H(h(x)) = 0^{n \times n}$ 이다. 따라서 Martingale 미분연산자 $\mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t)$ 는 다음과 같은 결정론적 Lie Derivation과 같아진다.

$$\mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) = \left\{ L_b h(X_t) + \frac{1}{2} H_b h(X_t) \right\} dt = L_b h(X_t) \quad (37)$$

이때 백색잡음에 대한 벡터 혹은 분산벡터는 다음과 같다.

$$b(X_t) = (b_1(X_t), b_2(X_t), b_3(X_t), b_4(X_t)) \quad (38)$$

Perfect Filtering 조건을 구하기 위해 조건식을 유도하면

$$L_b^2 h(X_t) = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial b_2(x)}{\partial x_k} = 0$$

$$L_b^2 \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) = L_b^2 L_b h(X_t) = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial b_4(x)}{\partial x_k} = 0$$

$$L_b^3 \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) = L_b^3 L_b^2 h(X_t) = L_b \left\{ \frac{K}{J_2 N} b_1(x) - \frac{K}{J_2} b_2(x) + \frac{mgd}{J_2} \sin x_2 \cdot b_2(x) - \frac{F_2}{J_2} b_4(x) \right\} \quad (39)$$

$$= \frac{K}{J_2 N} \sum_{k=1}^4 \frac{\partial b_1(x)}{\partial x_k} + \frac{K}{J_2} \sum_{k=1}^4 \frac{\partial b_2(x)}{\partial x_k}$$

$$+ \frac{mgd}{J_2} \cos x_2 \cdot b_2(x) - \frac{mgd}{J_2} \sin x_2 \sum_{k=1}^4 \frac{\partial b_2(x)}{\partial x_k}$$

$$- \frac{F_2}{J_2} \sum_{k=1}^4 \frac{\partial b_4(x)}{\partial x_k} = 0$$

$$\mathcal{L}_{f,b}^m L_b h(X_t) = L_b L_b h(X_t) = L_b b_2(x) = 0$$

$$\mathcal{L}_{f,b}^m L_b \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) = L_b L_b L_b h(X_t) = L_b b_1(x) = 0$$

$$L_b \mathcal{L}_{f,b}^m L_b \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) = L_b L_b^2 h(X_t)$$

$$= L_b \left\{ \frac{K}{J_2 N} b_1(x) + \frac{K}{J_2} b_2(x) + \frac{mgd}{J_2} \sin x_2 b_2(x) - \frac{F_2}{J_2} b_4(x) \right\} \quad (40)$$

$$= \frac{K}{J_2 N} \sum_{k=1}^4 \frac{\partial b_1(x)}{\partial x_k} \cdot f_k(x) + \frac{K}{J_2} \sum_{k=1}^4 \frac{\partial b_2(x)}{\partial x_k} \cdot f_k(x)$$

$$+ \frac{mgd}{J_2} \cos x_2 \cdot b_2(x) \cdot x_4 + \frac{mgd}{J_2} \sin x_2 \sum_{k=1}^4 \frac{\partial b_2(x)}{\partial x_k} \cdot f_k(x)$$

$$- \frac{F_2}{J_2} \sum_{k=1}^4 \frac{\partial b_4(x)}{\partial x_k} \cdot f_k(x) = 0$$

(39)와 (40)을 만족하기 위해서는 모든 $t \in [0, \infty)$ 에 대하여 (41)이 만족 되어야 한다.

$$b_1(X_t) = 0, \quad b_2(X_t) = 0$$

$$b_3(X_t) = \sigma^2, \quad b_4(X_t) = 0 \quad (41)$$

여기서 $b_3(X_t) = \sigma^2$ 인 상수값으로 놓은 것은 Wiener-Levy Process의 분포 특성을 맞추기 위해서이다. (42)에 의해 케환 선형화된 비선형 확률시스템은 다음의 Semimartingale 부분의 계수를 가지게 된다.

$$L_b h(X_t) = b_2(X_t) = 0$$

$$L_b \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) = L_b L_b h(X_t) = b_4(X_t) = 0$$

$$L_b L_b \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) = L_b L_b^2 h(X_t)$$

$$= \frac{K}{J_2 N} b_1(x) + \left(\frac{mgd}{J_2} \sin x_2 - \frac{K}{J_2} \right) b_2(x) - \frac{F_2}{J_2} b_4(x) = 0$$

$$L_b L_b \mathcal{L}_{f,b}^m h(X_t) = L_b L_b^3 h(X_t)$$

$$= -\frac{KF_2}{J_2 N} b_1(x) + \left(\frac{F_2 K}{J_2^2} + \frac{mgd}{J_2} (x_1 \cos x_2 - \sin x_2) \right) b_2(x)$$

$$+ \frac{K}{J_2 N} b_3(x) + \frac{F_2}{J_2} b_4(x) = \frac{K}{J_2 N} \sigma^2$$

이때 시스템과 Feedback 입력은 (42)와 같다

$$x = f(x) + g(x)u + b(x)\xi_t$$

$$= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ \frac{-K}{J_1 N^2} x_1 + \frac{K}{J_1 N} x_2 - \frac{F}{J_1} x_3 \\ \frac{K}{J_2 N^2} x_1 - \frac{K}{J_2} x_2 - \frac{mgd}{J_2} \cos x_2 - \frac{F}{J_1} x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma^2 \\ 0 \end{bmatrix} \xi_t$$

$$y = x_2$$

$$u = \frac{-L_b^1 h(x)}{L_b L_b^3 h(x)} + \frac{v}{L_b L_b^3 h(x)} \quad (42)$$

비교대상은 Kalman-Bucy 필터를 출력층에 결합하고 Kalman-Bucy 필터에 의해 추정된 \hat{z}_t 를 사용하여 LQR제어를 행하는 비선형 확률제어기이다. 제한한 신경망을 사용한 제어기의 경우 두 가지 알고리즘이 사용되었다. 하나는 Langevine 경쟁학습 신경망이며 또 하나는 상공간 정준형 경쟁학습 신경망이다. 각 신경망에 Weight Vector는 20개를 사용하였다. 시뮬레이션 결과, $\sigma^2 = 0.1$ 의 경우, 기존의 최적 필터링-최적제어 방식의 제어기보다 안정도 확보에서 좋은 성능을 나타내고 있다. 이것은 기존의 제어기가 외란분리 조건을 완벽하게 만족하지 않는 이상 케환 입

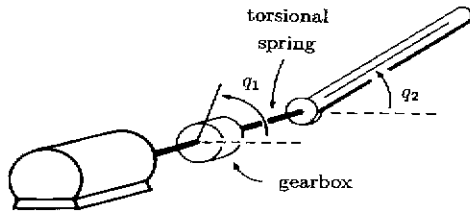


그림 1. 유연 관절을 가진 Manipulator.
Fig. 1. Flexible joint manipulator.

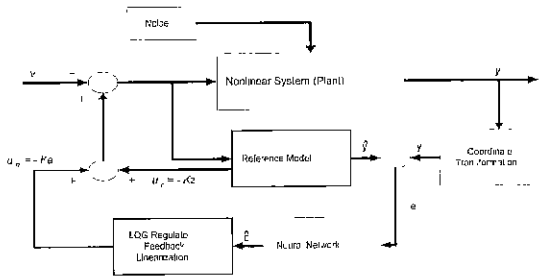


그림 2 제안한 신경망을 사용한 비선형 확률제어 시스템.
Fig. 2. The proposed nonlinear stochastic control system using the neural network.

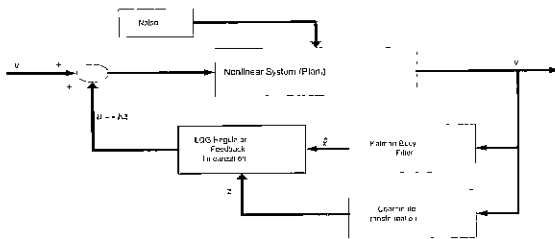


그림 3. Kalman-Bucy Filter LQR 제환 선형화 제어기 구성도.
Fig. 3. The diagram of kalman-bucy filter-lqr feed back linearization controller

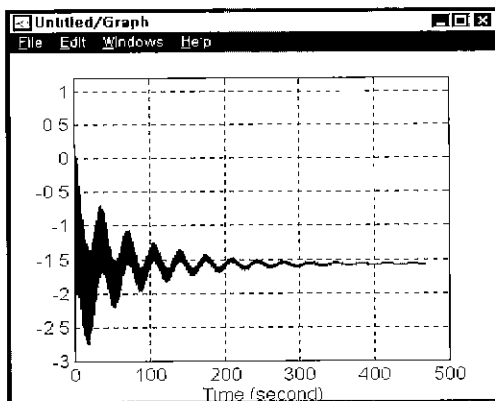


그림 4 안정화 입력이 없을 때 Flexible Joint Manipulator.
Fig. 4. The system response of flexible joint manipulator without stabilized input.

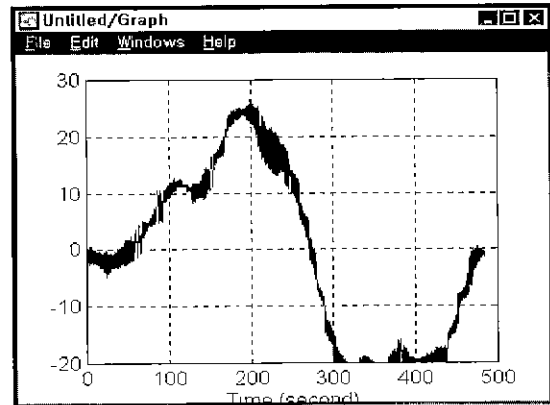


그림 5 안정화 입력이 없으며 백색잡음이 들어갈 때의 Flexible Joint Manipulator.
Fig. 5. The system response of flexible joint manipulator without stabilized input and white noise.

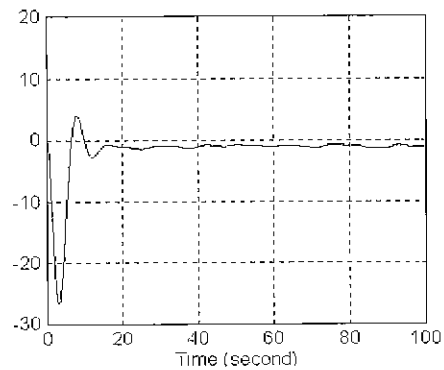


그림 6. 기존제어기의 백색잡음에 대한 응답
Fig. 6. The conventional controller response of nonlinear system including white noise.

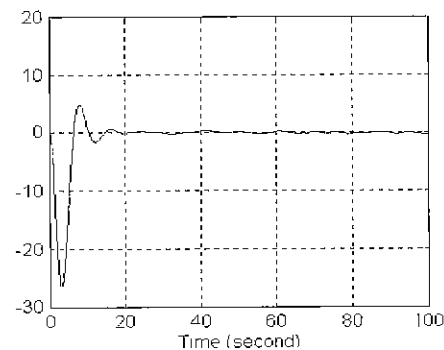


그림 7. 상공간 정준형 경쟁학습 신경망 제어기의 백색잡음에 대한 응답
Fig. 7. The quotient canonical competitive neuro-controller response of nonlinear system including white noise.

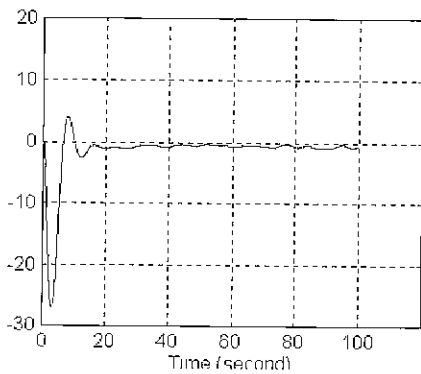


그림 8. Langevine 경쟁학습 신경망 제어기의 백색잡음에 대한 응답

Fig. 8 The langevine competitive neuro-controller response of nonlinear system including white noise.

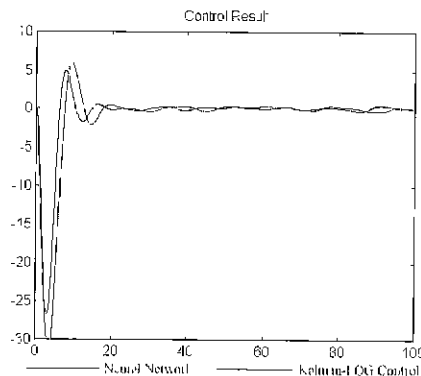


그림 9. 제안한 신경망에 의한 제어결과와 Kalman-LQG 제어결과 비교.

Fig. 9. The comparison of the control result between the proposed neuro control and the conventional kalman-lqg control.

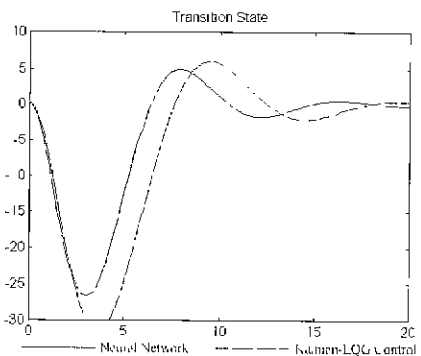


그림 10. 제안한 신경망에 의한 제어결과와 Kalman-LQG 제어결과 과도상태비교.

Fig. 10. The comparison of the transition state between the proposed neuro control and the conventional kalman-lqg control.

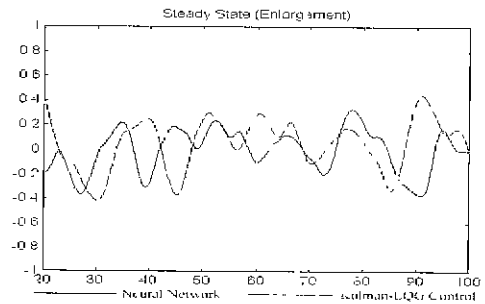


그림 11. 신경회로망에 의한 제어결과와 Kalman-LQG 제어결과 정상상태비교 (범위 1.0 ~ -1.0 rad)

Fig. 11. The comparison of the steady state between the proposed neuro control and the conventional kalman-lqg control (range : 1.0 ~ -1.0 rad).

력으로 반드시 외란의 특성을 파악하여 외란분리를 위한 제어입력을 궤환 시켜야 하지만, 백색잡음과 같은 외란의 경우에는 외란의 특징이 분포함수의 형태로 나타나기 때문에 완벽한 외란분리가 어렵기 때문이다. 그러나 신경망을 사용한 제어기의 경우에는 외란을 다수의 Weight Vector로 근사화 하여 다시 최적화된 제어입력으로 궤환 시키므로 보다 정확한 제어출력을 얻어낼 수 있다.

평가함수를 $E = \frac{1}{T} \sqrt{\int_{t=0}^T \|k(x_t)\|^2 dt}$ 로 놓았을 때 정량적인 각 제어기의 평균 출력오차는 다음과 같다.

표 1. 각 제어기의 평균 출력오차.

Table 1. Mean square errors for each controller.

기존 제어기의 백색잡음에 대한 응답	0.1884 (rad)
기존 신경망 제어기의 백색잡음에 대한 응답	0.1621 (rad)
Langevine 경쟁학습 신경망 제어기의 백색잡음에 대한 응답	0.1537 (rad)
상공간 정준형 경쟁학습 신경망 제어기의 백색잡음에 대한 응답	0.1426 (rad)

VI. 결론

본 논문에서는 비선형 확률제어(nonlinear stochastic control)문제를 궤환 선형화 문제와 결합하여 제어 가능 조건을 유도하여, 제안한 두 종류의 경쟁학습 알고리즘을 통해 향상된 제어를 이루는 것에 대하여 알아보았다. 유도한 Perfect Filtering 조건은 기존의 외란분리 조건보다 약한 조건으로서, 외란분리 조건이 강한조건에서 외란이 선형화 모델에 완전히 나타나지 않도록 하는 조건이며 약한조건이 외란을 선형화모델에서 나타나지 않도록 선형화 입력을 조절하는 문제였던 것에 반하여 Perfect Filtering 조건은 적절한 최적 필터를 찾을 수 있다면, 선형화 입력의 변화 없이 최적 필터를 통한 선형화 추정상태를 얻어 이를 통해 안정화 제어입력을 찾을 수 있음을 보였다.

또한 제안한 두 종류의 신경망을 사용하여, Perfect Filtering 조건이 만족되는 상태에서 분리원칙(separation principle)이 만족되면서 선형화 시스템상태를 최소화시킬 수 있음을 유도하였으며 시뮬레이션 결과를 통해 기존의 Kalman-Bucy 최적필터링과 LQR 궤환 제어기를 사용한 제어 시스템 보다 좋은 안정화 성능을 얻었다 앞으로의 과제는 Perfect Filtering 조건보다 더욱 약한 조건을 유도하여 비선형 확률제어 가능한 제어규칙을 찾는 것이다

참고문헌

- [1] A. Isidori, "Nonlinear control systems", 3rd ED. Springer-Verlag : London, 1995.
- [2] A. Isidori, "Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, pp. 1283-1293, 1992.
- [3] G. Blankenship, C-H Lu, and S. Marcus. "Asymptotic expansions and Lie algebras for some nonlinear filtering problems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-28, no. 7, July 1983.
- [4] 주성준, 서진현, "부분 선형화 가능한 미지구조를 자기는 비선형 시스템", 전기학회 논문지, 57권, 3호, pp 349-357, 1998년 3월.
- [5] G. Chen, G. Chen, S-H and Hsu, "Linear stochastic control systems", *CRC Press* : Boca Raton, 1995.
- [6] H. J. Kushner and P. G. Dupuis, "Numerical methods for stochastic control problems in continuous time", Springer-Verlag : New York, 1992
- [7] P. S. Maybeck, "Stochastic models, estimation, and control volume 3". Academic Press : New York, 1982.
- [8] N. Ikeda and S. Watanabe, "Stochastic differential equations and diffusion process". 2nd ED. North-Holland, 1989.
- [9] K. Sobczyk, "Stochastic differential equations with applications to physics and engineering", Kluwer Academy, . Dordrecht, 1991.
- [10] M. Freidlin, "Markov processes and differential equations : asymptotic problems", Birkhauser : Zürich, 1997.
- [11] 석진욱, 조성원, "Fokker-Planck 방정식의 해석을 통한 Langevine 경쟁학습의 동역학 분석". 대한전자공학회 논문지, 제34권, C편, 제7호, pp. 82-91, 1997
- [12] Jinwuk Seok and Seongwon Cho, "Quotient canonical feature map competitive learning", *Proc. IEEE Asia Pacific Conf. on Circuits and Systems 96*, pp. 528-531, 1996
- [13] G. Chen, G. Chen and S-H. Hsu, "Linear stochastic control systems", *CRC Press* : Boca Raton, 1995

석진욱

제어·자동화·시스템공학 논문지 제5권, 제4호, 참조

최경삼

제어·자동화·시스템공학 논문지 제5권, 제4호, 참조

이종수

제어·자동화·시스템공학 논문지 제5권, 제4호, 참조

조성원

제어·자동화·시스템공학 논문지 제5권, 제4호, 참조