

# 제어신호가 제한된 모델기준제어를 위한 가변기준모델

## Variable Reference Model for Model Reference Control Subject to Bounded Control Signals

변경석, 송재복

(Kyung-Seok Byun and Jae-Bok Song)

**Abstract** : The reference model of an MRC (model reference control) provides the desired trajectory a plant should follow, and thus the design of a reference model has a significant effect on control performance. In most control systems control input to a plant has some bounds, and it is preferable to make use of as large control inputs as possible within the range of no saturation. In this paper a new approach of selecting the reference model is proposed for bounded control inputs. Design variables of the reference model are determined in such a way that maximizes the performance index within the range of no saturation. Moreover, this variable reference model is regularly updated during control. This scheme is verified by application to the servo motor position control system in various simulations. The responses of the MRC with a variable reference model show better tracking performance than that with a fixed reference model. Moreover, by adjusting the update interval of the reference model the control performance can be further improved

**Keywords** : model reference control, variable reference model, bounded control signals

### 1. 서론

모델기준제어(Model Reference Control, MRC) [1]는 플랜트가 주어진 기준모델을 추종하도록 플랜트를 제어하는 제어 기법으로서 MRAC(Model Reference Adaptive Control)[2], MRRC(Model Reference Robust Control)[3,4], MRLS(Model Reference Learning Scheme)[5], TDC(Time Delay Control)[6] 등 여러 분야에서 연구가 진행되고 있다.

MRC에서 기준모델은 플랜트가 추종해야 하는 원하는 궤적을 제공하여 준다. 따라서, 플랜트는 시스템에 주어지는 기준입력을 직접 추종하지 않고, 기준입력에 대한 기준모델의 출력을 추종하게 된다. 예를 들어, 계단형의 기준입력이 시스템에 주어질 경우에 플랜트는 기준입력의 급격한 변화를 직접 추종하지 않고, 기준모델에 의해서 부드럽러워진 출력을 추종함으로써, 과도 응답 특성의 개선과 안정성의 확보 등의 장점을 얻을 수 있다. 기준모델의 선정은 제어 시스템의 성능에 큰 영향을 미치므로 제어기의 설계에 중요한 요소이다.

대부분의 제어 시스템에서 제어신호는 제한 범위를 갖게 된다. 제어신호가 이 범위를 벗어나면 포화 현상을 초래하여, 제어입력의 변화가 플랜트 출력의 변화에 적절하게 반영되지 못하게 된다. 일반적으로 신속한 응답을 위해서는 큰 제어신호가 요구되지만, 이는 큰 오버슈트나 포화를 초래하게 된다. 반면에, 작은 제어신호는 오버슈트나 포화는 피하는 대신에 느린 응답을 초래하게 된다. 그러므로 포화가 되지 않는 범위 내에서 가능한 한 큰 제어입력을 갖는 것이 바람직하다. 이러한 이

상적인 조건은 기준모델을 갖는 제어 기법에서는 기준모델의 적절한 선정을 통해서 성취할 수 있다.

대부분의 경우 MRC의 기준모델은 단지 시스템의 차수나 특성 등을 고려하여 선택하고 있다 [7]. 그러나 제한된 제어입력을 고려한 기준모델의 설계는 설계자의 경험에 의한 설계 요소로 간주되어 체계적인 선정 기준에 관한 연구가 거의 수행된 바가 없다. 실제 시스템을 구현할 때는 플랜트가 변경될 때마다 기준모델을 시행 오차 방식(trial and error method)으로 결정하는 경우가 많으며, 한 플랜트에 대해서 결정된 기준모델은 제어 수행 도중에 변경되지 못하고 고정되어 사용된다.

제한된 제어입력을 갖는 시스템에 대한 피드백 제어에 대해서는 많은 연구가 진행되었다 [8]. 본 연구에서와 같이 기준모델을 사용하지는 않았지만, 기준입력에 대한 급격한 변화를 고려해서 슬라이딩 모드를 변형하고, 이를 제어입력의 제한 범위와 연관시킨 global sliding mode control [9]이나 model predictive control의 개념을 도입하여 제어입력과 상태 변수가 제한 범위를 넘지 않도록 기준입력을 변형하는 reference governor[10, 11, 12] 등이 본 논문과 맥락을 같이하는 연구이다.

본 논문에서는 제한된 제어입력을 갖는 선형 시스템에 적용되는 MRC기법에 대한 연구를 수행하였다. 제어의 목적은 MRC에 사용되는 기준모델의 적절한 선정 및 갱신을 통하여, 주로 계단형의 기준입력이 주어지는 서보시스템의 추적성능을 향상시키는 것이다. 이를 위하여 플랜트가 기준모델을 완벽하게 추종한다고 가정한 공칭제어입력이 주어진 제어입력의 제한을 넘지 않는 범위 내에서 성능지수가 최대가 되도록 하는 방식으로 기준모델의 설계변수를 선정한다. 그리고 제어 수행 중이라도 정기적으로 기준모델을 갱신함으로써 주변 상황의 변화에 대처할 수 있도록 하는 가변기준모델을 제안

접수일자 : 1999. 9. 2., 수정완료 : 1999. 12. 6

변경석: 고려대학교 대학원

송재복: 고려대학교 기계공학과

\* 본 연구는 한국전력공사에서 지원에 의하여 기초전력공학공동연구소 주관(과제번호 98-012)으로 수행되었습니다.

하였다. 송 등[13,14]이 time delay control (TDC) 기법을 대상으로 유사한 연구를 수행한 바 있지만, 주어진 기준입력에 대해서 플랜트가 정상상태에 도달한 후 새로운 기준입력이 입력된다고 가정하였으므로 기준입력이 자주 변화되는 경우에는 적용에 어려움이 있었다. 본 연구에서는 이들 가정을 완화하여 플랜트가 과도상태에 있더라도 기준모형을 갱신할 수 있도록 하였다. 본 논문에서는 MRC의 기준모형을 원하는 갱신주기마다 가변시킴으로써 제어 시스템의 응답성을 향상시키는 방식을 제안하고, 이를 서보 모터 시스템의 시뮬레이션을 통해서 검증하고자 한다.

II. 선형 시스템에 대한 모델기준제어

다음과 같은 시변 선형 시스템을 고려해 보자.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{1}$$

여기서,  $x \in R^n$  는 시스템의 상태벡터.  $A \in R^{n \times n}$  와  $B \in R^{n \times m}$  는 연속(continuous)인 시스템 행렬을 각각 의미한다.  $u \in R^m$  는 제어 벡터로서 각 요소가 다음과 같은 제한 범위를 가진다.

$$U_{\min,i} \leq u_i(t) \leq U_{\max,i} \quad (i=1, \dots, m) \tag{2}$$

(1)로 표현되는 시스템이 추종하여야 하는 이상적인 응답으로 다음과 같은 선형 기준모형을 사용한다고 하자.

$$\dot{x}_m(t) = A_m(t)x_m(t) + B_m(t)r(t) \tag{3}$$

여기서,  $x_m \in R^n$ ,  $r \in R^q$  는 기준모형의 상태벡터와 기준입력,  $A_m \in R^{n \times n}$ ,  $B_m \in R^{n \times q}$  는 기준모형의 시스템 행렬을 각각 의미한다. 이 때,  $A_m$ 는 기준모형의 안정을 위해 모든 고유치가 좌반 평면에 존재하도록 선정한다.

(1)로 표현되는 플랜트는 기준입력을 직접 추종하지 않고, 기준입력에 대한 기준모형의 응답을 추종하게 된다. 이 때, 플랜트와 기준모형의 상태벡터 간의 차를 오차  $e(t) \equiv x(t) - x_m(t)$ 로 정의하면, 다음의 오차 동역학을 얻을 수 있다.

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_m = A_m e + \eta \tag{4}$$

여기서,  $\eta$ 는 다음과 같다.

$$\eta = (A - A_m)x - B_m r + B u \tag{5}$$

이 때,  $A_m$ 이 안정된 행렬이므로  $\eta = 0$ 이 되면 오차가 0으로 수렴하게 되어, 제어입력  $u(t)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다

$$u(t) = B^+ \{ (A_m - A)x + B_m r \} \tag{6}$$

여기서,  $B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$  는 의사 역행렬을 의미한다. (6)의 제어법칙에서 플랜트에 대한 정확한 모델을 필요로 한다.

III. 가변기준모형의 설계

MRC에서는 주어진 기준입력에 대하여 플랜트가 추

종하기를 원하는 궤적을 생성하기 위해서 기준모형을 사용한다. 따라서, 플랜트의 추종 성능은 기준모형에 의해서 크게 영향을 받으므로 MRC에서 기준모형의 선정은 중요한 설계 과정이 된다. 한편, 대부분의 플랜트에서는 포화를 방지하기 위해서 제어입력이 (2)와 같은 제한 범위를 갖게 된다. 만약, 제어기에서 산출된 제어입력이 이러한 제한 범위를 벗어날 경우에, 플랜트는 포화되어 기준모형을 충실하게 추종할 수 없게 된다. 따라서, 기준모형의 설계 시에 이러한 제한 범위를 고려하는 것이 바람직하다.

그림 1과 2는 2차 시스템으로 모델링한 모터의 위치 제어 시스템에서 기준모형의 선정이 제어 성능에 미치는 영향을 보기 위해 수행된 시뮬레이션 결과이다. 상대적으로 느린 기준모형과 빠른 기준모형을 비교하기 위하여 고유진동수가 각각  $\omega = 25\text{rad/sec}$ 와  $150\text{rad/sec}$ 로 고정된 기준모형에 기초한 MRC를 적용하였다. 느린 기준모형을 채택한 그림 1의 경우에 제어입력은 항상 제한 범위 내에 존재하고, 플랜트는 기준모형을 잘 추종한다. 그러나 기준모형 자체가 기준입력의 변화를 잘 나타내지 못하므로, 플랜트의 출력은 기준입력을 제대로 추종하지 못하게 된다. 한편, 그림 2의 경우에는 빠른 기준모형을 선정하였으므로, 기준모형 자체는 기준입력의 변화를 잘 반영할 수 있다. 그러나 기준입력의 작은 변화에 대해서는 신속히 응답하지만, 큰 변화에 대해서는 제어신호가 제한 범위를 벗어나 포화 영역으로 들어가므로 오버슈트 발생하는 등 기준모형을 잘 추종하지 못하게 된다. 이렇게 설계자에 의해 선정된 설계변수를 사용한 기준모형을 플랜트가 잘 추종하지 못할 때 시스템의 한계를 고려한 기준모형의 선정이 필요하게 된다.

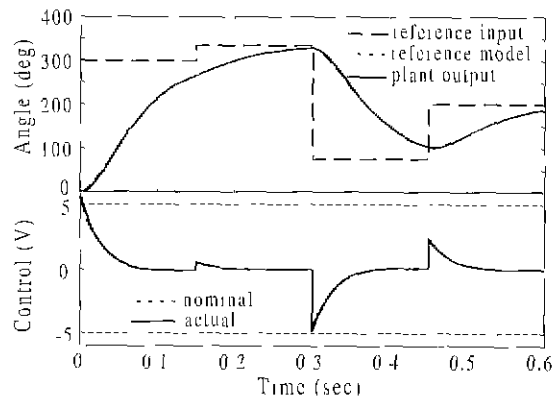


그림 1. 고정된 느린 기준모형을 갖는 MRC를 사용한 위치 제어 시스템의 응답 ( $\omega = 25\text{rad/s}$ ).

Fig 1. Time responses of motor position control system during MRC with fixed slow RM ( $\omega = 25\text{rad/s}$ ).

본 논문에서는 제한된 제어입력을 갖는 선형 시스템에 대하여 제어입력의 제한 범위를 고려하여 기준모형을 설계, 갱신하는 방법을 제안하고자 한다. 이를 위하여 우선 기준모형과 제어입력 사이의 관계를 나타내는

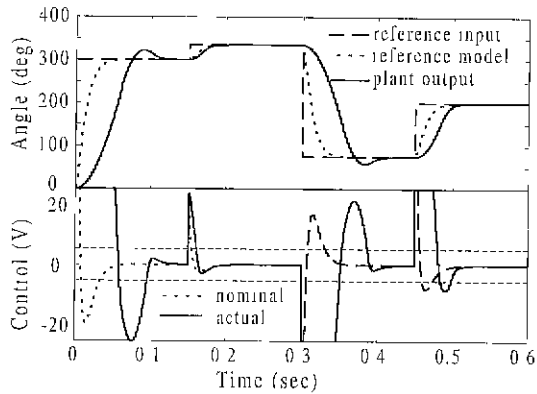


그림 2. 고정된 빠른 기준모델을 갖는 MRC를 사용한 위치 제어 시스템의 응답( $\omega = 150\text{rad/s}$ ).

Fig. 2 Time responses of motor position control system during MRC with fixed fast RM( $\omega = 150\text{rad/s}$ ).

공칭제어입력에 대하여 살펴보고, 이에 기초하여 기준모델을 설계하는 방법을 설명하기로 한다.

1 공칭제어입력

MRC는 기준모델과 플랜트의 상태 변수 사이의 오차가 0이 되도록 제어입력을 산출한다. 실제 제어 시에 기준모델이 적절하게 선성되어도 플랜트가 기준모델을 완벽하게 추종하기는 어렵지만, 완벽한 추종 상태를 가정하면 기준모델과 제어입력 사이의 관계를 얻을 수 있다. 이 때, 완벽한 추종이란 플랜트의 상태 변수와 기준모델의 상태 변수가 일치하는 것을 의미한다

$$x(t) = x_m(t) \tag{7}$$

(7)을 제어법칙 (6)에 대입하여 제어입력을 구하면 다음과 같다

$$u_n(t) = B^+ \{ (A_m - A) x_m + B_m r \} = B^+ \{ \dot{x}_m - A x_m \} \tag{8}$$

여기서,  $u_n(t)$ 는 공칭제어입력(nominal control input)으로, 완벽한 추종이 수행되는 경우의 제어입력을 나타낸다. 즉, 공칭제어입력은 기준모델과 제어입력 간의 이상적인 관계를 나타낸다.

2 가변기준모델의 설계

기존의 기준모델을 사용하는 제어 기법에서는 한 번 선정된 기준모델을 고정하여 사용하므로, 앞에서 살펴본 예와 같이 제어입력이 제한된 경우에 적절하지 못한 궤적을 생성하게 된다. 이 문제를 해결하기 위하여 제어입력의 제한 범위를 고려하여 기준모델을 설계하는 방법을 제시하고, 매 갱신주기마다 제안된 방법을 적용하여 기준모델을 갱신하는 가변기준모델(variable reference model, VRM)을 제안하고자 한다

(8)의 공칭제어입력은 시스템 행렬과 기준모델의 상태 벡터에 의해 계산될 수 있다 이 때, (1)의 시스템 행렬은 기지의 행렬로 가정하므로 (3)으로부터 기준모델의 상태벡터를 계산하면 공칭제어입력을 계산할 수 있다. 한편, 기준모델에 대하여 다음과 같이 가정한다.

가정 1 : 기준모델의 시스템 행렬  $A_m$ 과  $B_m$ 은 설계변수 벡터  $\phi = \{\phi_1, \dots, \phi_p\}^T \in R^p$ 의 함수이다.

여기서, 설계변수는 1차 시스템의 경우는 시정수, 2차 시스템의 경우는 고유진동수 및 감쇠비 등을 의미한다. (3)에서 기준모델의 시스템 행렬  $A_m$ ,  $B_m$ 이 시불변이고, 기준입력  $r$ 이 계단 함수라고 가정하면, 초기 상태가  $x_m(t_0)$ 인 경우에 기준모델의 상태벡터는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} x_m(t) &= e^{(t-t_0)A_m} x_m(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A_m} B_m r d\tau \\ &= e^{(t-t_0)A_m} x_m(t_0) + A_m^{-1} e^{(t-t_0)A_m} B_m r - A_m^{-1} B_m r \tag{9} \end{aligned}$$

여기서,  $e^{(t-t_0)A_m}$ 는 상태 천이 행렬을 의미한다.

기준모델의 시스템 행렬이 시불변인 기존의 기준모델에서는 (9)를 적용할 수 있으나, 가변기준모델에서는 기준모델이 매 갱신주기마다 갱신되어 시스템 행렬이 시변이므로 (9)를 바로 적용할 수는 없다. 따라서, 시변 기준모델에 기초한 기준모델의 상태벡터를 나타내기 위하여 “가상기준모델”(fictitious reference model)이란 개념을 도입한다. 실제로는 갱신주기마다 설계변수의 변화로 기준모델이 변경되므로 어떤 갱신 시점에서 설정된 기준모델은 해당 갱신주기에만 적용되지만, (9)의 적용을 위해서 설정된 기준모델이 마치 과거에서 미래까지 일관되게 적용된다고 가정하게 되며, 이런 의미에서 가상 기준모델이라 부르게 된다. 이해를 돕기 위해서 2차 시스템에 대한 가상 기준모델의 예를 그림 3에 나타내었는데,  $k$ 번째 갱신 시점  $t_k$ 에서 기준모델의 상태 변수를 각각  $x_{mk} = B x_{mk} = v$ 로 표시하였다. 이 때, 이 그림에서 점선은 기준모델 상태 변수가 지나온 실제의 궤적을, 실선은  $t_k$ 에서 선정된 기준모델 상태 변수의 가상적인 궤적을 나타내는데, 이 두 궤적은 일반적으로 서로 다르게 된다. 이 점에 대해서 아래에 자세히 기술하기로 한다.

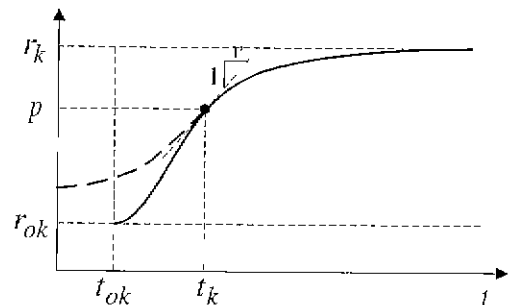


그림 3. 가상 기준모델의 스텝 응답.

Fig. 3. Step responses of fictitious reference model.

$k$ 번째 갱신 시점  $t_k$ 에서 기준모델의 상태벡터가  $x_{mk} = x_m(t_k)$ , 기준입력이  $r_k = r(t_k)$ 로 주어진다 하자. 이 때,  $t_k$ 에서 갱신되는 설계변수  $\phi(t_k)$ 에 기초한 기준모델은  $t_k$  이후에만 영향을 미치게 되지만, 과거에도 계속 적용되어 왔다고 가정한다. 즉,  $t_k$ 에서 갱신된 기준모델의 상태

는, 초기 시간  $t_{ok}$ 에서 초기 상태  $r_{ok}$ 에서 출발하여,  $t_k$ 에서 상태  $x_{mk}$ 를 통과한 후 기준입력  $r_k$ 로 접근하여 간다. 그러면 시점  $t_k$ 에서의 가상 기준모델의 상태는 (9)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x_m(t_k) = e^{(t_k - t_{ok})A_{mk}} x_m(t_{ok}) + A_{mk}^{-1} e^{(t_k - t_{ok})A_{mk}} B_{mk} r_k - A_{mk}^{-1} B_{mk} r_k \quad (10)$$

여기서,  $x_m(t_{ok})$ 는  $r_{ok}$ 에 해당하며, 기준모델의 시스템 행렬은  $\phi(t_k)$ 의 함수로서  $A_{mk} = A_m(t_k)$ ,  $B_{mk} = B_m(t_k)$ 를 의미한다.  $t_{ok}$ 와  $r_{ok}$ 를 제외한 모두 변수는 알고 있으므로, (10)으로부터  $t_{ok}$ 와  $r_{ok}$ 를 구할 수 있는데, 실제 문제에서의 해법은 다음 장의 예제에서 다루기로 한다. 그러면  $k$ 번째 갱신주기 동안에 적용되는 가상 기준모델의 상태 벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_m(t) = e^{(t - t_{ok})A_{mk}} x_m(t_{ok}) + A_{mk}^{-1} e^{(t - t_{ok})A_{mk}} B_{mk} r_k - A_{mk}^{-1} B_{mk} r_k \quad (11)$$

(11)의 가상 기준모델의 상태 벡터에서  $x_m(t)$ 는  $t$ ,  $x_m(t_k)$ ,  $\phi(t_k)$ ,  $r_k$ 의 함수이다. (11)을 (8)에 대입하면 공칭제어입력  $u_c(t)$ 를 기준모델의 설계변수  $\phi(t_k)$ 의 함수로 나타낼 수 있다.

이러한 결과로부터 제어입력의 제한을 고려하여 기준모델을 선정하는 것이 가능하다.  $\phi_d$ 를 설계자에 의해 주어진 원하는 설계변수 벡터(desired design variable vector)라 하자. 이 때,  $\phi_d$ 에 기초한 기준모델로부터 산출한 공칭제어입력이 (2)로 주어지는 제한 범위를 넘지 않는 경우에는 기준모델을 세로이 설계할 필요 없이  $\phi_d$ 에 기초한 기준모델을 그대로 사용한다. 그러나 공칭제어입력이 제한 범위를 넘을 경우에는, 기준모델의 설계변수를 세로이 선정하여 공칭제어입력이 제한 범위를 넘지 않도록 한다. 다음은 기준모델의 선정 및 갱신을 위한 알고리즘을 나타낸다.

VRM update algorithm

If  $\bar{u}_{ni}(t_k, \phi_d) \leq U_{\max, i}$  and  $\underline{u}_{ni}(t_k, \phi_d) \geq U_{\min, i} \forall i$ ,

then  $\phi(t_k) = \phi_d$

Else,  $\phi(t_k) = \{\phi \mid \arg(\max P(\phi))\}$ ,

subject to  $\bar{u}_{ni}(t_k, \phi) \leq U_{\max, i}$  and  $\underline{u}_{ni}(t_k, \phi) \geq U_{\min, i} \forall i$

여기서,  $\bar{u}_{ni}$  과  $\underline{u}_{ni}$  는 다음과 같이 공칭제어입력 벡터의  $n$ 번째 요소의 최대와 최소를 의미한다.

$$\bar{u}_{ni}(t_k, \phi) = \max(u_{ni}(t, \phi) \mid t \geq t_k), \quad \underline{u}_{ni}(t_k, \phi) = \min(u_{ni}(t, \phi) \mid t \geq t_k) \quad (12)$$

(12)에서의 최대와 최소는,  $\phi(t_k)$ 에 기초한 기준모델로부터 현재를 포함한 미래의 공칭제어입력의 최대 및 최소를 산출한 것이다. 이러한 공칭제어입력의 상한과 하한이 제한 범위를 넘지 않도록 기준모델의 설계변수를 선정하는 것이 이 VRM 알고리즘의 핵심이다. 이 때, 이러한 설계변수의 선정은 여러 방법을 통해서 수행할 수

있는데, 위의 알고리즘에서는 제어 시스템의 성능지수  $P(\phi)$ 를 설계변수  $\phi$ 의 함수로 정의하여 성능지수를 최대로 하는 설계변수를 선택하는 방식을 사용하고 있다. 성능지수는 제어 시스템의 목적이나 특성에 따라서 다양하게 선정되므로 일반화시키기는 어려우며, 다음 장의 예제에서 설명하기로 한다.

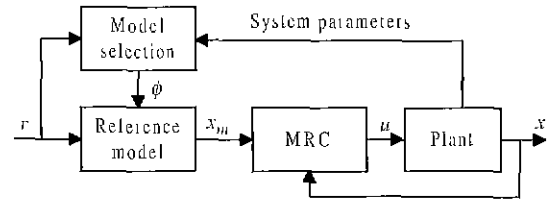


그림 4. 제안된 가변기준모델을 사용한 MRC. Fig. 4. Block diagram of MRC using proposed VRM.

그림 4는 가변기준모델을 적용한 MRC의 블록 선도를 나타낸다. 위의 VRM 알고리즘은 갱신주기  $T_n$ 마다 수행되어 기준모델이 갱신되므로, 이를 가변기준모델(variable reference model)이라 부른다. 또한,  $A_m$ 의 고유치가 항상 좌반 평면에 존재하도록 하는 것이 기준모델의 설계변수 선정에 있어서 전제 조건이므로 기준모델이 갱신되는 경우에도 기준모델의 안정성은 지속적으로 보장된다

IV. 가변기준모델의 예제

본 장에서는 지금까지 설명한 가변기준모델에 기초한 MRC 기법을 서보 모터 시스템에 적용한 예제를 통하여 상세히 설명하고자 한다. 이 때, 공칭제어입력을 2차 기준모델의 설계변수인 고유진동수의 함수로 나타내었으며, 공칭제어입력이 제한 범위를 넘지 않을 조건을 구하였다. 유도 과정은 다소 복잡하지만, 결과식은 비교적 단순하여 실시간으로 적용이 가능하며, 계단 형태의 기준입력에 대한 서보 시스템의 추적 성능을 향상시킬 수 있다.

1. 모터 위치제어 시스템을 위한 VRM의 유도

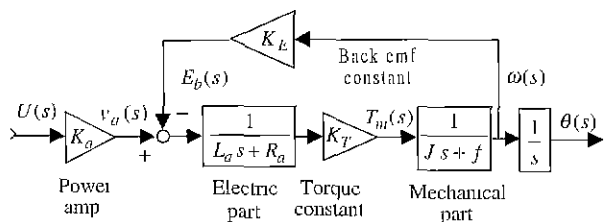


그림 5. DC 모터 시스템의 블록도. Fig. 5. Block diagram of DC motor system.

일반적인 DC모터 시스템은 선형 2차 시스템으로 모델링할 수 있으며, 상태공간에서 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ b \end{Bmatrix} u$$

$$\text{where } a = \frac{1}{J} \left( f + \frac{K_T K_E}{R_a} \right), \quad b = \frac{K_a K_T}{J R_a} \quad (13)$$

여기서, 상태변수  $x_1$ 과  $x_2$ 는 모터의 각위치와 각속도를 나타내고,  $J, f, K_T, K_E, R_a, K_a$ 는 관성모멘트, 점성마찰계수, 토크상수, 역기전력상수, 전기자저항, 증폭기이득을 각각 의미한다. 한편, 플렌트가 추종하여야 할 기준 모델은 플렌트와 같이 2차 선형시스템으로 선정한다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{m1} \\ \dot{x}_{m2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega^2 \end{Bmatrix} r \quad (14)$$

이 때, 계산 과정을 단순화하고, 오버슈트 없는 응답을 얻기 위하여 임계 감쇠( $\zeta=1$ )의 기준모델을 선정하였다. 따라서 기준모델의 설계변수는 단지 고유진동수  $\omega$ 뿐이다. 오차를

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 - x_{m1} \\ x_2 - x_{m2} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

로 정의하면, 오차 동역학은

$$\begin{Bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega^2 x_1 + (2\omega - a)x_2 - \omega^2 r + b u \end{Bmatrix} \quad (16)$$

이 된다. (6)로부터 제어법칙은

$$u(t) = \{ a x_2 - \omega^2 x_1 - 2\omega x_2 + \omega^2 r \} / b \quad (17)$$

으로 계산되며, 공칭제어입력은 (8)로부터 다음과 같이 계산된다.

$$u_n(t) = \{ a x_{m2} + \dot{x}_{m2} \} / b \quad (18)$$

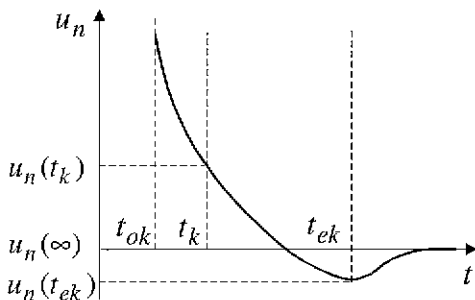


그림 6. 공칭제어입력.

Fig. 6. Schematic of nominal control input.

그림 6은 공칭제어입력의 개략적인 모양을 나타낸다. 위치 제어를 수행하므로 시간이 충분히 흐르면 제어입력이 0으로 수렴하게 된다는 점에 유의하여야 한다. 현재를 포함한 미래 시간에서 공칭입력의 최대 및 최소는 다음과 같다.

$$\bar{u}_n(t_k), \underline{u}_n(t_k) \in \{ u_n(t_k), u_n(t_{ek}), u_n(\infty) \} \quad (19)$$

여기서,  $t_k$ 는  $k$ 번째 갱신 시점,  $t_{ek}$ 는 공칭제어입력이 극값(extreme value)을 갖는 시점을 나타낸다 이 때,  $t_{ek}$ 에

서의 공칭제어입력은  $t_{ek} > t_k$ 일 때에만 의미를 갖는데, 이는  $t_{ek} < t_k$ 인 경우에  $t_{ek}$ 는 이미 지나간 과거 시점이기 때문이다.

이제 (18)을 사용하여  $u_n(t_k), u_n(t_{ek}), u_n(\infty)$ 를  $\omega$ 의 함수로 나타내기 위해서 앞에서 설명한 가상기준모델을 사용한다. 그림 3에서와 같이 갱신 시점  $t_k$ 에서 기준모델의 상태 및 기준입력이 각각  $x_{m1} = r, x_{m2} = v, r_k$ 이며, 설계변수가  $\omega(t_k)$ 이라 하자. 그러면 (11)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_{m1}(t, \omega) = r_k - \{ 1 + \omega(t - t_{ok}) \} e^{-\omega(t - t_{ok})} (r_k - r_{ok}) \quad (20a)$$

$$x_{m2}(t, \omega) = \omega^2 (t - t_{ok}) e^{-\omega(t - t_{ok})} (r_k - r_{ok}) \quad (20b)$$

$$\dot{x}_{m2}(t, \omega) = \omega^2 \{ 1 - \omega(t - t_{ok}) \} e^{-\omega(t - t_{ok})} (r_k - r_{ok}) \quad (20c)$$

다음은 (20)의 가상 기준모델을 사용하여 고유진동수의 함수로 나타낸  $u_n(t_k), u_n(t_{ek}), u_n(\infty)$ 이다.

$$u_n(t_k, \omega) = \{ (r_k - p)\omega^2 - 2v\omega + av \} / b \quad (21a)$$

$$u_n(t_{ek}, \omega) = \frac{1}{b} \{ -2(r_k - p)\omega^2 + (2v + a(r_k - p))\omega - av \} \exp\left( \frac{v}{(r_k - p)\omega - v} - \frac{2\omega - a}{\omega - a} \right) \quad (21b)$$

$$u_n(\infty) = 0 \quad (21c)$$

(21)에서  $\omega$ 를 제외한 모든 변수는 시점  $t_k$ 에서 알고 있으므로 (21)은  $\omega$ 만의 함수가 된다. 따라서, (21)에서 공칭제어입력의 최대 및 최소가 제어입력의 제한을 넘지 않으면서 성능지수를 최대로 만드는  $\omega$ 가 선정되어 기준 모델을 갱신하게 된다.

이번에는 성능지수의 선정에 대해서 살펴보도록 하자. 성능지수는 설계변수의 함수로 표현되어야 하고, 시스템의 성능을 나타낼 수 있어야 한다. 동일한 기준입력에 대하여  $\omega$ 가 커질수록 기준모델의 대역폭이 커지므로,  $\omega$  자체를 성능지수로 선택하기로 한다.

$$P(\omega) = \omega \quad (22)$$

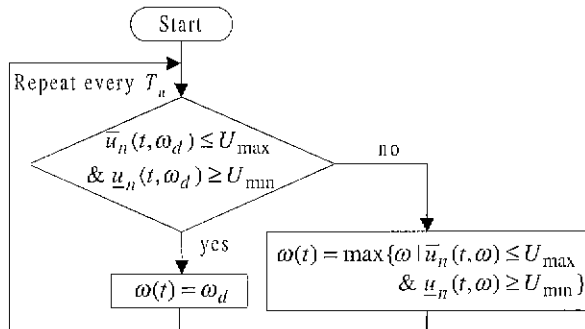


그림 7. 예제에 대한 VRM 갱신 알고리즘의 순서도.

Fig. 7. Flow chart of VRM update algorithm for the example.

그림 7은 이 예제에 대한 VRM 갱신 알고리즘의 순서

도를 나타낸다. 설계자에 의해서 주어진 설계변수  $\omega_d$ 가 기본적으로 사용된다. 그러나 만약  $\omega_d$ 에 근거한 기준모델의 공칭제어입력이 제한범위를 벗어난다면, 새로운 설계변수  $\omega$ 를 계산하여 새 기준모델을 결정하게 된다.

2. 시뮬레이션 결과

이 절에서는 제안된 가변기준모델을 적용하여 다양한 시뮬레이션을 수행한 결과를 고찰해 보기로 한다. 시뮬레이션은 MATLAB/SIMULINK를 사용하여 수행하였는데, 제어기의 샘플링 주기는 1msec로 선정하였으며, 시뮬레이션에 사용된 파라미터의 값은 다음과 같다.

$$a = 13.4, b = 592.4, U_{\min} = -5V, U_{\max} = 5V \quad (23)$$

많은 시뮬레이션 중에서 여기서는 대표적인 세 경우인 그림 8, 9, 10에 대해서만 고찰하기로 한다. 대체적으로 기준입력의 변화량이 크면 작은 고유진동수를, 변화량이 작으면 큰 고유진동수를 산출하는 등 가변기준모델을 사용함으로써, 제어 동작 내내 고정된 기준모델을 사용한 그림 1의 경우보다 빠른 응답을 보이게 된다. 즉, 갱신주기마다 공칭제어입력이 제한 범위를 넘지 않는 범위 내에서 최대값을 갖도록 설계변수  $\omega$ 가 갱신된다. 이 때, 이 공칭입력은 단지 설계변수의 결정에만 사용되며, 실제 플랜트에 입력되는 제어입력은 (17)의 제어법칙에 따라서 산출된다는 점에 유의하여야 한다. 세 경우 모두 원하는 설계변수로  $\omega_d = 150\text{rad/s}$ 를 선택하였는데, 이는 VRM 알고리즘에서  $\omega_d$ 가 설계변수의 상한으로 사용되므로 가능한 한 큰 값으로 선정한 것이다. 한편, 기준입력은 150msec마다 새로이 주어진다 가정하지만, 기준모델의 갱신주기가 성능에 미치는 영향을 고찰하기 위하여  $T_u = 150, 15, 1\text{msec}$ 로 각각 다르게 설정하였다.

그림 8의 경우에는 기준입력의 변화 주기와 기준모델의 갱신주기가 150msec로 일치한다. 하지만 갱신 시점 초기에 선정된 기준모델이 비교적 긴 갱신주기 동안에 고정되어 있으므로, 더 빠른 추적성능을 얻을 수 없다. 그림 9의 경우에는 15msec의 갱신주기마다 공칭제어입력이 제어입력의 제한 범위를 넘지 않는 범위

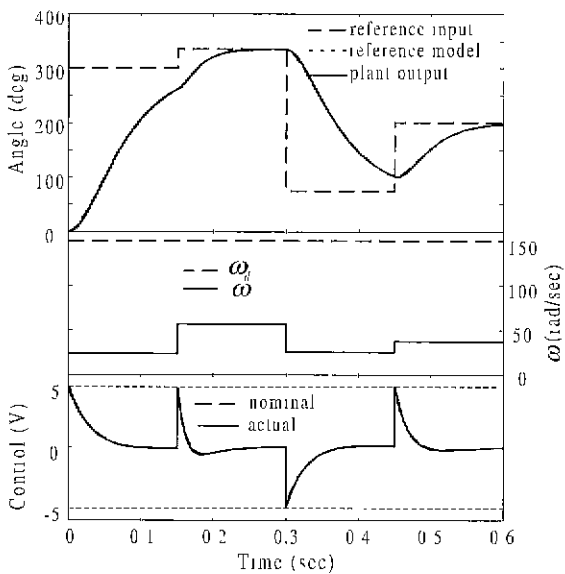


그림 8. VRM에 기초한 MRC를 사용한 모터의 위치 제어 응답( $\omega_d = 150\text{rad/s}$ ,  $T_u = 150\text{msec}$ ).  
Fig. 8 Time responses of motor position control system during MRC with VRM( $\omega_d=150\text{rad/s}$ ,  $T_u=150\text{msec}$ ).

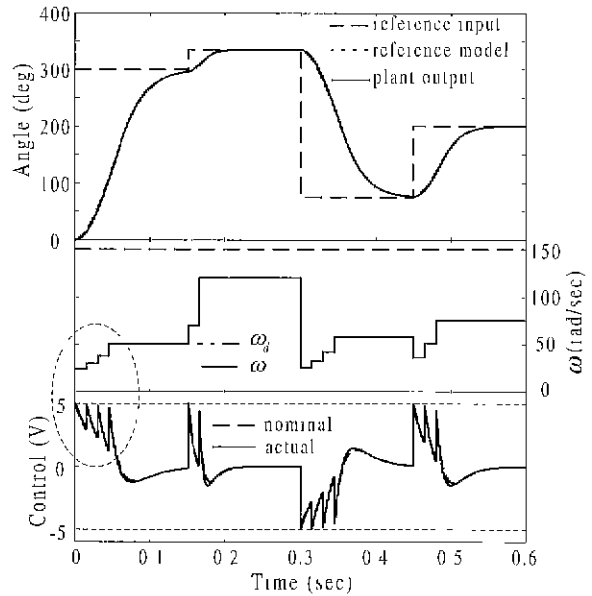


그림 9. VRM에 기초한 MRC를 사용한 모터의 위치 제어 응답( $\omega_d = 150\text{rad/s}$ ,  $T_u = 15\text{msec}$ ).  
Fig. 9. Time responses of motor position control system during MRC with VRM( $\omega_d=150\text{rad/s}$ ,  $T_u=15\text{msec}$ )

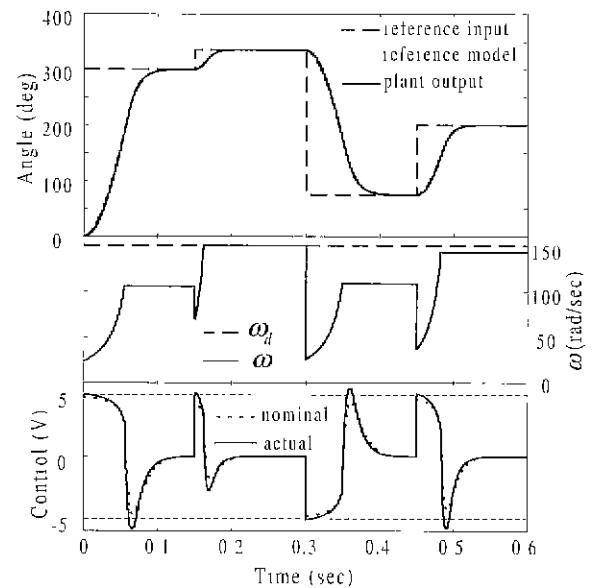


그림 10. VRM에 기초한 MRC를 사용한 모터의 위치 제어 응답( $\omega_d = 150\text{rad/s}$ ,  $T_u = 1\text{msec}$ ).  
Fig. 10. Time responses of motor position control system during MRC with VRM( $\omega_d=150\text{rad/s}$ ,  $T_u=1\text{msec}$ )

내에서  $\omega$ 가 갱신된다. 즉, 제어입력을 최대한 활용하기 위하여 기준입력이 변화되지 않더라도 제어입력을 자주 갱신시킴으로써, 그림 8의 경우보다 빠른 응답을 얻을 수 있다. 그림 9의 점선 부분의 거동을 살펴보면, VRM 알고리즘에 따라서 기준모델이 갱신되면, 제어입력 또한 그에 따라서 변화하게 된다. 갱신된 기준모델의 고유진동수는 다음 갱신주기까지 고정되므로 갱신 시점에서 다음 갱신 시점까지의 제어입력은 그림 6의 일부분으로서 반복적으로 나타나게 된다. 즉, 갱신 시점마다 제어입력이 최대한으로 증가됨으로써 보다 빠른 응답 성능을 얻을 수 있다.

그림 10의 경우는 기준모델의 갱신주기를 1msec로 감소시킨 경우로서, 제어입력이 완만하게 변화하는 것을 볼 수 있다. 일부 구간에서는 실제 제어입력이 제한 범위를 약간 넘는 것이 관찰되는데, 이는 실제 제어입력과 공칭제어입력 간의 차이에 기인하는 현상으로서 제어 성능에는 거의 영향을 주지 않는다.

#### V. 결론

본 논문에서는 제한된 제어입력을 갖는 선형 시스템에 적용되는 MRC의 기준모델의 설계 방법에 대하여 연구하였다. 우선 플랜트가 기준모델을 완벽하게 추종한다고 가정한 공칭제어입력이 주어진 제어입력의 제한을 넘지 않는 범위 내에서 최대가 되도록 하는 방식으로 기준모델의 설계변수를 선정하였다. 그리고 제어 수행 중에 설계자가 원하는 시점마다 기준모델을 갱신하는 가변기준모델을 제안하였다. 이 연구를 통해서 다음과 같은 결론을 얻게 되었다.

1 설계자가 선정한 설계변수에 기초한 기준모델의 공칭제어입력이 제한을 넘지 않을 경우에는 설계자가 선정한 설계변수가 적용되고, 벗어나는 경우에만 가변기준모델을 적용함으로써, 설계자의 의지를 최대한 반영하면서도 주어진 제어입력의 제한 범위를 만족하는 제어를 설계할 수 있다.

2. 제안된 알고리즘을 적용한 시뮬레이션 결과에서 가변기준모델을 사용하는 경우가 고정된 기준모델을 사용하는 경우보다 기준입력에 대한 우수한 추종 성능을 나타내었다. 즉, 기준입력의 변화가 큰 경우에는 느린 기준모델이, 작은 경우에는 빠른 기준모델이 자동으로 채택됨으로써 응답의 신속성과 정확성을 만족시킬 수 있었다.

3. 가변기준모델의 갱신주기는 성능에 영향을 미치게 되는데, 갱신주기가 작을수록 우수한 추종 성능을 나타낸다.

#### 참고문헌

- [1] A. Ogata, *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, 2nd Ed., 1990.
- [2] J. J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991.
- [3] Z. Qu, J. Dorsey, and D. Dawson, "Model reference robust control of class of SISO systems," *IEEE Trans. on Automatic control*, vol. 39, no. 11, pp. 2219-2234, 1994.
- [4] H. Ambrose and Z. Qu, "Model reference robust control for MIMO systems," *International Journal of Control*, vol. 68, no. 3, pp. 599-623, 1997.
- [5] C. C. Cheah and D. Wang, "A model reference learning scheme for a class of nonlinear systems," *International Journal of Control*, vol. 66, no. 2, pp. 271-287, 1997.
- [6] K. Youcef-Toumi and O. Ito, "A time delay controller for systems with unknown dynamics," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 112, no. 1, pp. 133-142, 1990.
- [7] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Oxford, 1984.
- [8] H. J. Sussmann, E. D. Sontag, and Y. Yang, "A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls," *IEEE Trans. on Automatic Control* vol. 39, no. 12, pp. 2411-2425, 1994.
- [9] Y. S. Lu and J. S. Chen, "Design of a global sliding mode controller for a motor drive with bounded control," *International Journal of Control*, vol. 62, no. 5, pp. 1001-1019, 1995.
- [10] A. Bemporad, "Reference governor for constrained nonlinear systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 43, no. 3, pp. 415-419, 1998.
- [11] A. Bemporad, A. Casavola and E. Mosca, "Nonlinear control of constrained linear systems via prediction reference management," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 42, no. 3, pp. 340-349, 1997.
- [12] A. Bemporad and E. Mosca, "Fulfilling hard constraints in uncertain linear systems by reference managing," *Automatica*, vol. 34, no. 4, pp. 451-461, 1998.
- [13] J. B. Song and K. S. Byun, "Design of time delay controller based on variable reference model," *Proc. of American Control Conference*, vol. 6, pp. 3339 - 3343, 1998.
- [14] 송재복, 변경석, "제한된 제어입력을 갖는 시스템에 대한 시간지연제어의 설계" 제어·자동화 시스템공학 논문지, 제5권, 제2호, pp. 166-173, 1999.

#### 변경석

제어·자동화·시스템공학 논문지 제5권, 제2호, 참조

#### 송재복

제어·자동화·시스템공학 논문지 제5권, 제2호, 참조