

자기동조 경계층 범위를 갖는 적응 슬라이딩모드 제어

Adaptive Sliding Mode Control with Self-Tuning the Boundary Layer Thickness

박재삼
(Jae-Sam Park)

Abstract : In this paper, three adaptive sliding mode control algorithms, which self-tune both the sliding mode gain and the boundary layer thickness, are proposed. The first algorithm uses a gain adaptation algorithm that satisfies the sliding mode condition. In the second algorithm, the sliding mode gain adaptation rule is combined with the boundary layer thickness adaptation rule to satisfy the sliding condition. In the third algorithm, the computation burden of the second algorithm is reduced further, and therefore no extra cost is required for real-time implementation. Due to the mixed sliding mode gain and the boundary layer thickness adaptation scheme, the tracking error and the chattering of the control input can be reduced greatly.

Keywords : sliding mode control, adaptive control, gain adaptation

I. 서론

불확실성이 포함된 비선형 플랜트에 대한 강인한 제어 기 설계의 한 방법으로 1950년대부터 가변구조제어(VSC, Variable Structure Control) 방법이 연구되어 왔다. 가변구조제어 이론은 불연속적인 제어입력을 이용하여 시스템의 구조를 의도적으로 가변시킴으로써 슬라이딩모드(sliding mode)라는 독특한 동특성으로 인하여 강인한 제어특성을 얻는 제어기법으로서 슬라이딩모드제어(SMC; Sliding Mode Control)는 가변구조제어의 한 형태이다. 가변구조시스템의 슬라이딩모드에 대한 연구는 1970년대부터 Utkin[10,11]등에 의하여 활발히 연구가 진행되어왔다.

이러한 슬라이딩모드 제어기법은, [10]에서 보는 바와 같이, 모델의 불확실성에 대한 강인성은 있지만, 스위칭평면에서의 불연속성으로 인하여 제어신호에 채터링(chattering)현상이 발생하여 적용에 한계가 있었다. 1980년대 중반, Slotine[6,7,8]은 스위칭평면에 경계층(boundary layer)을 도입하여 채터링을 없애는 방법을 보였다. 최근에는 적응제어, 최적제어등과 결합한 형태의 제어이론들이 제시되었다. 이들의 연구동향은 Hung, *et. al.* [4]에 상세하게 나와 있다.

이들은 대부분 Lyapunov 안정성에 근거를 두고 슬라이딩모드가 이루어지도록 제어법칙을 설정하고 있으며, 안정성을 만족시키기 위하여 슬라이딩모드 이득을 모델의 불확실성이나 외란을 충분히 보상할 수 있는 크기로 설정하고 있다. 이 이득의 크기의 결정은 슬라이딩모드 제어기 설계시 중요하다. 시스템이 슬라이딩 평면에 도달할 때까지의 도달모드(reaching mode)에서는 시스템은 불확실성에 대하여 민감하며, 슬라이딩 평면에 도달 후부터의 슬라이딩모드에서는 시스템은 불확실성에 대하여 둔감하게 된다. 따라서, 이득을 크게하여 슬라이딩 평면에 도달하는 시간을 줄일 수 있지만, 큰 이득을 적용하면 포화(saturation) 문제와 채터링 현상이 증가하게 되므로, 시스템의 상태에

따라 슬라이딩모드이득을 변화시키는 효과를 가지거나 적절한 값을 선택하는 여러 방법이 연구되었다[2,5,9]. 본 논문에서는 슬라이딩모드이득과 경계층범위를 실시간으로 계산하여 적용시키는 세 종류의 적응슬라이딩모드 제어기 설계방법을 제시한다. 제시된 방법은 슬라이딩모드이득과 경계층범위를 동시에 적용시킴으로써 비선형시스템에 적용시 제어신호의 채터링을 없애고, 시스템 불확실성에 대하여 강인하며, 추적오차를 더욱 개선시킬 수 있다.

본 논문은 2장, 슬라이딩모드 제어의 배경 설명; 3장, 세 종류의 적응제어 알고리즘 제시, 4장, MIMO (multi-input-multi-output)시스템에 적용 방법 제시; 5장, 적용설계의 예 및 컴퓨터 시뮬레이션; 6장, 결론으로 구성된다.

II. 슬라이딩모드 제어의 배경

다음과 같은 SISO(single-input-single-output) 2차 동적시스템을 고려하여 보자.

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u, \quad \mathbf{x} = [x \ \dot{x}]^T \quad (1)$$

여기서 u 는 제어입력이고, $\mathbf{x} = [x \ \dot{x}]^T$ 는 상태벡터이며, $f(\mathbf{x})$ 를 \hat{f} 로 추정할 때, 다음과 같이 함수 F 내에 존재한다고 가정할 수 있으며,

$$|\hat{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq F(\mathbf{x}) \quad (2)$$

$b(\mathbf{x})$ 를 \hat{b} 로 추정할 때 다음과 같이 나타낼 수 있다[8].

$$0 < b_{\min} \leq b(\mathbf{x}) \leq b_{\max}, \quad \hat{b} = (b_{\min} b_{\max})^{1/2}, \quad B^{-1} = b_{\min} \quad (3)$$

$\mathbf{x}_d = [x_d \ \dot{x}_d]^T$ 를 목표경로라 하면, $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$ 는 변수 x 에서의 추적오차가 되며, 다음과 같이 추적오차 벡터로 표현할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = [\tilde{x} \ \dot{\tilde{x}}]^T \quad (4)$$

지금 $s(\mathbf{x}; t)$ 를 다음과 같이 정의하고,

$$s(\mathbf{x}; t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) \tilde{\mathbf{x}}, \quad \lambda > 0 \quad (5)$$

(5)에서 $s(\mathbf{x};t)=0$ 일때의 시변(time-varying)평면을 $S(t)$ 라 정의하면, 모든 $t>0$ 에 대하여 시스템 궤적이 슬라이딩평면 $S(t)$ 상에 남아 있도록 하는 슬라이딩 조건은 다음과 같다[8].

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|, \eta > 0 \quad (6)$$

(1)의 시스템에 대한 공칭제어 입력 \hat{u} 는 (5)로부터 $s=0$ 를 만족시키는 제어법칙을 구함으로써 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\hat{u} = \delta^{-1}(-\hat{f} + \hat{x}_d - \lambda \dot{\hat{x}}) \quad (7)$$

여기서 f 와 δ 는 각각 f 와 b 의 공칭값이다. (1)에 대하여 슬라이딩 조건 (6)을 만족시키는 제어법칙은 다음과 같이 구할 수 있다[8].

$$u = \hat{u} - k \operatorname{sgn}(s), \operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} +1 & \text{if } s > 0 \\ -1 & \text{if } s < 0 \end{cases} \quad (8)$$

여기서 k 의 크기는 다음과 같다.

$$bk - \eta \geq |f - b \delta^{-1} \hat{f} + (1 - b \delta^{-1})(-\dot{x}_d + \lambda \dot{\hat{x}})|, \eta > 0 \quad (9)$$

(8)에서 k 가 (9)를 만족하도록 충분히 크게 선택하면, 슬라이딩조건 (6)이 만족한다는 것을 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 &= [(f - b \delta^{-1} \hat{f}) + (1 - b \delta^{-1})(-\dot{x}_d + \lambda \dot{\hat{x}}) \\ &\quad - bk \operatorname{sgn}(s)] \cdot s \end{aligned} \quad (10)$$

$$\leq -\eta |s|$$

(8)의 제어입력은 시스템의 불확실성이나 외란등으로 인하여 슬라이딩평면 $S(t)$ 와 교차되는 제어불연속성을 가지고 있다. 이 제어불연속으로 인하여 제어입력에서 발생되는 채터링 현상은 경계층을 도입하여 없앨 수 있다 경계층범위를 ϕ 라 하면 (8)의 제어법칙은 다음과 같이 표현된다[8].

$$u = \hat{u} - k \operatorname{sat}(s/\phi), \phi > 0$$

$$\operatorname{sat}(s/\phi) = \begin{cases} s/\phi & \text{if } |s/\phi| \leq 1 \\ \operatorname{sgn}(s/\phi) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

여기서 $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 의 의미는 (8)과 같고, k 는 (9)와 같다.

III. 적응슬라이딩모드 제어기의 설계

1. Algorithm 1 : 적응 슬라이딩모드 제어

(1)과 같은 시스템을 위하여 제시하는 적응슬라이딩모드 제어법칙은 다음과 같다.

$$u = \hat{u} - u_{as}$$

$$u_{as} = k \cdot \operatorname{sat}(s/\phi), \quad 1 > \phi > 0 \quad (12)$$

$$\dot{\hat{k}} = -\alpha \hat{k} + \beta |s|, \quad 1 > \alpha > 0, \beta > 0, \hat{k}(0) > 0$$

여기서 s 는 (5)와 같고 $\operatorname{sat}(\cdot)$ 의 의미는 (11)와 같다. (12)에서 보면, \hat{u} 는 공칭제어입력으로서 (7)과 같고, u_{as} 는 슬라이딩평면을 s 로 하고 슬라이딩모드이득 \hat{k} 의 값을 적응법칙을 통하여 구하는 적응슬라이딩모드 제어입력이다. (12)의 제어법칙을 고려할 때 다음 결과를 얻을 수 있다.

정리 1. (12)의 제어법칙과 (1)의 플랜트로 구성되는 페루프 시스템에서 \bar{k} 의 크기는 한계를 가지고 있고 s 는 다음의 한계 내에 존재하며,

$$|s| \leq \phi \cdot \operatorname{pos}(k - \bar{k} + 1) \leq \phi \quad (13)$$

추적오차 $\dot{\hat{x}}$ 는 다음의 한계 내에 존재한다.

$$|\dot{\hat{x}}| \leq \frac{\phi}{\lambda} \cdot \operatorname{pos}(k - \bar{k} + 1) \leq \frac{\phi}{\lambda} \quad (14)$$

여기서 $\operatorname{pos}(\cdot)$ 는 다음을 뜻한다.

$$\operatorname{pos}(k - \bar{k} + 1) = \begin{cases} k - \bar{k} + 1, & \text{if } k - \bar{k} + 1 > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (15)$$

증명 : 다음의 함수를 Lyapunov 함수로 선정하자.

$$V = \frac{1}{2} \left(s \cdot s + \frac{1}{B\beta} \hat{k} \cdot \hat{k} \right), \quad \hat{k} = \bar{k} - k \quad (16)$$

여기서 B 는 (3)과 같다. (16)을 미분하고 여기에 (12)에서 정의한 제어법칙을 대입하면, $|s| > \phi$ 일 때는 $u = \hat{u} - \bar{k} \operatorname{sgn}(s/\phi)$, $\lambda > 0, \phi > 0$ 이므로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [f + bu - \dot{x}_d + \lambda \dot{\hat{x}}]s + (-\alpha \bar{k} + \beta |s|) \hat{k} \frac{1}{B\beta} \\ &\leq -b(\bar{k} - k)|s| - \eta |s| - B^{-1} \beta^{-1} \alpha \bar{k}(\bar{k} - k) \\ &\quad + B^{-1}(k - \bar{k})|s| \end{aligned} \quad (17)$$

(17)에서 보면, (3)으로부터 $b \geq B^{-1}$ 이고, $B^{-1} \beta^{-1} \alpha \bar{k} > 0$ 이므로, \bar{k} 가 적응을 하여 $\bar{k} \geq k$ 를 만족시키도록 α, β 를 선정하면, (17)은 항상 $V \leq -\eta |s|$ 이 되어 슬라이딩 조건 (6)을 만족함을 알 수 있다. 이는 즉, 정상응답 후에 시스템은 $|s| \leq \phi$ 를 유지하게 되며, \bar{k} 는 한계를 가지고 있음을 보여준다.

$|s| \leq \phi$ 일 때는 (12)로부터, $u = \hat{u} - \bar{k} s/\phi$, $\phi > 0$ 이므로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [(f - b \delta^{-1} \hat{f}) + (1 - b \delta^{-1})(-\dot{x}_d + \lambda \dot{\hat{x}}) \\ &\quad - b \bar{k}(s/\phi)]s + (-\alpha \bar{k} + \beta |s|) \cdot \hat{k} \frac{1}{B\beta} \\ &\leq b \bar{k} |s| \left(1 - \frac{|s|}{\phi} \right) - B^{-1} \beta^{-1} \alpha \bar{k}(\bar{k} - k) - \eta |s| \end{aligned} \quad (18)$$

(18)을 보면, $B^{-1} \beta^{-1} \alpha \geq b |s|$ 가 되도록 선정하면,

$$1 - \frac{|s|}{\phi} < \bar{k} - k \Rightarrow |s| < (k + 1 - \bar{k})\phi \quad (19)$$

일 때는 $\dot{V} \leq -\eta |s|$ 이 되므로, 이는 즉 $|s|$ 는 다음 범위 내에 존재하게 됨을 알 수 있다.

$$|s| \leq \phi \cdot \operatorname{pos}(k - \bar{k} + 1) \leq 1 \quad (20)$$

여기서 $\operatorname{pos}(\cdot)$ 는 (15)를 뜻한다. 따라서 (13)이 성립함이 증명된다.

스윗칭 평면의 정의 (5)에 의하여, 추적오차 $\dot{\hat{x}}$ 는 s 로부터 1차 필터의 연계를 통하여 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$\dot{\hat{x}}(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} s(\tau) d\tau \quad (21)$$

(20)으로 부터, $|s| \leq \phi \text{pos}(k - \bar{k} + 1)$ 이므로 (21)은 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\begin{aligned} |\dot{\tilde{x}}(t)| &\leq \frac{\phi}{\lambda} \text{pos}(k - \bar{k} + 1)(1 - e^{-\lambda t}) \\ &\leq \frac{\phi}{\lambda} \text{pos}(k - \bar{k} + 1) \end{aligned} \quad (22)$$

따라서 (14)가 성립함이 증명된다 ■

고찰 1 : (12)에서 $\beta|s| > \alpha\bar{k}$ 일 경우 \bar{k} 는 증가하며, 반대일 경우 \bar{k} 는 감소하게 된다. $|s|$ 는 (20)의 범위 내에 존재하므로 이때 $\beta|s| < \alpha\bar{k}$ 가 되도록 α, β 를 선정한다.

2. Algorithm 2 : 경계층범위(boundary layer thickness) 적응방법

이 절에서는 Algorithm 1의 경계층범위 ϕ 를 시간에 따라 변화시킴으로써 채터링을 제거하고 추적오차를 더욱 줄이는 방법을 제시한다. 이제부터는 ϕ 가 변화를 하므로 추정된(estimated) 범위(thickness) 라는 의미로 $\hat{\phi}$ 을 사용한다. 먼저, $|s| \geq \hat{\phi}$ 의 경우, s 로부터 경계층까지의 거리가 항상 감소하도록 할 필요가 있으므로 다음 조건이 만족되어야 한다[8].

$$|s| \geq \hat{\phi} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq (\hat{\phi} - \eta)|s| \quad (23)$$

(23)과 (6)을 비교하여 보면, (12)의 슬라이딩모드이득 \bar{k} 가, (23)에 의하여 다음과 같이 변형되어야 함을 알 수 있다.

$$\hat{k} = \bar{k} - B\hat{\phi} \quad (24)$$

(24)를 보면 경계층범위 $\hat{\phi}$ 의 변화율은 \hat{k} 의 변화와 밀접한 관계가 있다는 것을 알 수 있다. 이에 따라 다음의 제어법칙 및 적응법칙을 제시한다

$$\begin{cases} u = \hat{u} - \hat{k} \text{sat}(s/\hat{\phi}) \\ \dot{\hat{k}} = -\alpha_1 \hat{k} + \beta_1 |s| \\ \begin{cases} \dot{\hat{\phi}} = \hat{\phi}(0), B\dot{\hat{\phi}} = -\alpha_2 \hat{\phi} + \beta_2 \hat{k}, & \text{if } \hat{\phi} > \hat{\phi}(0) \\ B\dot{\hat{\phi}} = -\alpha_2 \hat{\phi} + \beta_2 \hat{k}, & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases} \quad (25)$$

여기서 $\hat{\phi}(0) > 0, 1 > \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \hat{k}(0) > 0, 1 > \alpha_2 > 0, \beta_2 > 0$ 이고, $\text{sat}(\cdot)$ 의 의미는 (11)과 같다.

정리 2 : (25)의 제어법칙과 (1)의 플랜트로 구성되는 페루프 시스템에서 \hat{k} 및 $\hat{\phi}$ 의 크기는 한계를 가지고 있고 s 는 다음의 한계 내에 존재하며,

$$|s| \leq \hat{\phi} \text{pos}[k - (1 + \beta_2)\hat{k} + 1 + \alpha_2 \hat{\phi}] \leq \hat{\phi} \quad (26)$$

추적오차 \tilde{x} 는 다음의 한계 내에 존재한다.

$$|\tilde{x}| \leq \frac{\hat{\phi}}{\lambda} \text{pos}[k - (1 + \beta_2)\hat{k} + 1 + \alpha_2 \hat{\phi}] \leq \frac{\hat{\phi}}{\lambda} \quad (27)$$

여기서 $\text{pos}(\cdot)$ 는 (15)와 같다.

증명 : Lyapunov 함수는 정리1과 같다. 여기서 \hat{k} 는 (24)에 의하여 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \left(s \cdot s + \frac{1}{B\beta_1} \hat{k} \cdot \hat{k} \right) \\ \dot{\hat{k}} &= \bar{k} - k = \hat{k} + B\hat{\phi} - k \\ &= (1 + \beta_2)\hat{k} - \alpha_2 \hat{\phi} - k \end{aligned} \quad (28)$$

(25)에서 $\hat{\phi}$ 는 \hat{k} 를 입력으로 하는 1차 필터의 응답임을 볼 수 있다. $\hat{\phi} \approx 0$ 가 되도록(즉, $\hat{\phi}$ 가 급속하게(drastically) 변화하지 않도록) α_2, β_2 를 선정하면, $\hat{k} = \hat{k}$ 가 된다. (28)을 미분하고 여기에 (25)에서 정의한 제어법칙을 대입하면, $|s| > \hat{\phi}$ 일 때는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [(f - b\hat{b}^{-1})\hat{f}] + (1 - b\hat{b}^{-1})(-\dot{\tilde{x}}_d + \lambda\tilde{x}) \\ &\quad - b\hat{k} \text{sgn}(s/\hat{\phi})|s| + \hat{k} \cdot \hat{k} \frac{1}{B\beta_1} \\ &\leq (B^{-1} - b)(\hat{k} - k)|s| - \eta|s| \\ &\quad - B^{-1}\beta^{-1}\alpha_1 \hat{k} [(1 + \beta_2)\hat{k} - \alpha_2 \hat{\phi} - k] + \hat{\phi}|s| \end{aligned} \quad (29)$$

(29)는, (3)으로부터 $b \geq B^{-1}$ 이고, $(B^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1 \hat{k}) \geq 0$ 이므로, \hat{k} 가 적응을 하여 $\hat{k} \geq k$ 를 만족하도록 α_1, β_1 를 선정하고 $\hat{k} \geq (k + \alpha_2 \hat{\phi}) / (1 + \beta_2)$ 를 만족시키도록 α_2, β_2 를 선정하면 $|s| > \hat{\phi}$ 일 때는 항상 $\dot{V} \leq (\hat{\phi} - \eta)|s|$ 이 되어 (23)을 만족하게 되며, \hat{k} 는 한계를 가지고 있음을 보여준다. 또한 $\hat{\phi} > \hat{\phi}(0)$ 이면 $\dot{\hat{\phi}} = \hat{\phi}(0)$ 로 제설정 되므로 $\hat{\phi}$ 의 크기 역시 한계를 가지고 있음을 알 수 있다

$|s| \leq \hat{\phi}$ 일 경우, s 의 변화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [(f - b\hat{b}^{-1})\hat{f}] + (1 - b\hat{b}^{-1})(-\dot{\tilde{x}}_d + \lambda\tilde{x}) - \\ &\quad b\hat{k}(s/\hat{\phi})|s| + \hat{k} \cdot \hat{k} \frac{1}{B\beta_1} \\ &\leq b\hat{k}|s|(1 - |s|/\hat{\phi}) \\ &\quad - B^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1 \hat{k} [(1 + \beta_2)\hat{k} - \alpha_2 \hat{\phi} - k] + (\hat{\phi} - \eta)|s| \end{aligned} \quad (30)$$

(30)을 보면, $B^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1 \geq b|s|$ 가 되도록 선정하면,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{|s|}{\hat{\phi}} &< (1 + \beta_2)\hat{k} - \alpha_2 \hat{\phi} - k \\ \Rightarrow |s| &> [k - (1 + \beta_2)\hat{k} + 1 + \alpha_2 \hat{\phi}]\hat{\phi} \end{aligned} \quad (31)$$

일 때는 $\dot{V} \leq (\hat{\phi} - \eta)|s|$ 이 되므로 (23)을 만족함을 볼 수 있다. 이는 즉 $|s|$ 는 다음 범위 내에 존재하게 됨을 알 수 있다.

$$|s| \leq \hat{\phi} \cdot \text{pos}[k - (1 + \beta_2)\hat{k} + 1 + \alpha_2 \hat{\phi}] \leq 1 \quad (32)$$

여기서 $\text{pos}(\cdot)$ 는 (14)를 뜻한다. 따라서, 정리 2 (26)이 성립함이 증명되고, 스윙칭 평면의 정의 (6)에 의하여, 추적오차 \tilde{x} 는 s 로부터 1차 필터의 연계를 통하여 (22)와 같이 얻어질 수 있으므로, (27)이 성립함이 증명된다. ■

고찰 2 : (25)로부터, $|s|$ 가 (32)의 범위 내에 존재할 때 $\beta_1|s| < \alpha_1 \hat{k}$ 가 되도록 β_1, α_1 를 선정한다.

3. Algorithm 3 : 제어법칙의 간략화

대부분의 시스템 특히 MIMO 시스템의 경우 공칭제어 입력 \hat{u} 를 구하는 자체가 용이하지 않으므로 Algorithm 2를 사용하는데 어려움이 따른다. Algorithm 3에서는, \hat{u} 계산을 생략함으로써 계산시간이 적고 실시간제어에 적용이 용이하도록 하는 방법을 제시한다. 이때 Algorithm 2보다 추적오차는 약간 증가할 수 있다. 제어법칙을 유도하기 위하여 먼저 다음의 정리를 고려하여 보자.

보조정리 1 : (7)로 부터 다음을 만족하는 상수 $\Psi > 0$ 이 존재한다.

$$b^{-1}(\lambda \dot{\hat{x}} - \dot{\hat{x}}_d + f) \leq \zeta \Psi, \quad \forall x, \dot{x} \quad (33)$$

$$\zeta = 1 + |s| + |s|^2$$

증명 : (2) 및 (3)에서 보는 바와 같이 f 및 b 는 한계를 가진 미분가능한 함수이다 (5)로 부터 $|\dot{\hat{x}}|$ 는 $|s|$ 에 의하여 한계를 가지고 있음을 알 수 있다. x_d 와 \dot{x}_d 의 크기는 한계를 가지고 있으므로, (7)을 다음과 같이 한계를 가진 (bounded) 비선형 함수 $\theta(t), r_1(t), r_2(t)$ 로 나타낼 수 있다.

$$b^{-1}(\lambda \dot{\hat{x}} - \dot{\hat{x}}_d + f) \leq \theta + r_1|s| + r_2|s|^2 \quad (34)$$

(34)에서 $\Psi = \max \{ \sup_t |\theta(t)|, \sup_t |r_1(t)|, \sup_t |r_2(t)| \}$ 라 하면, (33)이 만족한다. ■

제어법칙은 다음과 같다.

$$\begin{cases} u = -k_1 s - \zeta \hat{k} \text{sat}(s/\hat{\phi}), & k_1 > 0 \\ \dot{\hat{k}} = -\alpha_1 \hat{k} + \zeta \beta_1 |s| \\ \begin{cases} \dot{\hat{\phi}} = \hat{\phi}(0), & B \dot{\hat{\phi}} = -\alpha_2 \hat{\phi} + \zeta \beta_2 \hat{k}, & \text{if } \hat{\phi} > \hat{\phi}(0) \\ B \dot{\hat{\phi}} = -\alpha_2 \hat{\phi} + \zeta \beta_2 \hat{k}, & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases} \quad (35)$$

여기서 $\hat{\phi}(0) > 0, 1 > \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \hat{k}(0) > 0, 1 > \alpha_2 > 0, \beta_2 > 0$ 이고, ζ 는 (33)과 같고 $\text{sat}(\cdot)$ 의 의미는 (11)과 같다. (35)에서는 (25)의 공칭제어입력 \hat{u} 대신 궤환오차입력 (feedback error input) $-k_1 s$ 을 사용하므로 시스템 불확실성이 (25)보다 커지게 되지만 \hat{k} 의 값이 실시간으로 적용되므로 실제 적용시 무리가 없다 (35)의 제어법칙을 고려할 때 다음 결과를 얻을 수 있다.

정리 3 : (35)의 제어법칙과 (1)의 플랜트로 구성되는 페루프 시스템에서 \hat{k} 및 $\hat{\phi}$ 의 크기는 한계를 가지고 있고 s 는 다음의 한계 내에 존재하며,

$$|s| \leq \hat{\phi} \cdot \text{pos}[\Psi - (1 + \beta_2)\hat{k} + 1 + \zeta^{-1}\alpha_2\hat{\phi}] \leq \hat{\phi} \quad (36)$$

추적오차 $\dot{\hat{x}}$ 는 다음의 한계 내에 존재한다.

$$|\dot{\hat{x}}| \leq \frac{\hat{\phi}}{\lambda} \cdot \text{pos}[\Psi - (1 + \beta_2)\hat{k} + 1 + \zeta^{-1}\alpha_2\hat{\phi}] \leq \frac{\hat{\phi}}{\lambda} \quad (37)$$

여기서 $\text{pos}(\cdot)$ 의 의미는 (15)와 같다.

증명 : 정리 2와 유사하게, 다음의 함수를 Lyapunov 함수로 선정한다

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \left(s \cdot s + \frac{1}{B\beta_1} \hat{k} \cdot \hat{k} \right), \\ \dot{\hat{k}} &= \zeta \hat{k} - B \dot{\hat{\phi}} \Rightarrow \overline{\hat{k}} = \hat{k} + \zeta^{-1} B \dot{\hat{\phi}}, \\ \hat{k} &= \overline{\hat{k}} - \Psi = \hat{k} + \zeta^{-1} B \dot{\hat{\phi}} - \Psi \\ &= (1 + \beta_2)\hat{k} - \zeta^{-1}\alpha_2\hat{\phi} - \Psi \end{aligned} \quad (38)$$

(38)을 미분하고 여기에 (35)에서 정의한 제어법칙을 대입하면, $|s| > \hat{\phi}$ 일 때는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [f - \dot{\hat{x}}_d + \lambda \dot{\hat{x}} - b k_1 s - \zeta b \hat{k} \text{sgn}(s/\hat{\phi})]s \\ &\quad + \hat{k} \cdot \dot{\hat{k}} \frac{1}{B\beta_1} \\ &\leq -\zeta(b - B^{-1})(\hat{k} - \Psi)|s| - b k_1 |s|^2 - \\ &\quad B^{-1}\beta^{-1}\alpha_1 \hat{k} [(1 + \beta_2)\hat{k} - \zeta^{-1}\alpha_2\hat{\phi} - \Psi] + \dot{\hat{\phi}}|s| \end{aligned} \quad (39)$$

(39)에서, (3)으로부터 $b \geq B^{-1}$ 이고, $(B^{-1}\beta^{-1}\alpha_1 \hat{k}) \geq 0$ 이므로, \hat{k} 가 적용을 하여 $\hat{k} \geq \Psi$ 를 만족하도록 α_1, β_1 을 선정하고, $\hat{k} \geq (\Psi + \zeta^{-1}\alpha_2\hat{\phi})/(1 + \beta_2)$ 를 만족시키도록 α_2, β_2 를 선정하면 $|s| > \hat{\phi}$ 일 때는 항상 $\dot{V} \leq (\dot{\hat{\phi}} - b k_1 |s|)|s|$ 이 되어 (23)을 만족한다.

$|s| \leq \hat{\phi}$ 일 경우, $b \geq B^{-1}, \hat{k} \geq \Psi$ 이므로 s 의 변화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [f - \dot{\hat{x}}_d + \lambda \dot{\hat{x}} - b k_1 s - b \hat{k} s/\hat{\phi}]s + \hat{k} \cdot \dot{\hat{k}} \frac{1}{B\beta_1} \\ &\leq -b k_1 |s|^2 + \dot{\hat{\phi}}|s| + b \zeta \hat{k} s (1 - |s|/\hat{\phi}) \\ &\quad - B^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1 \hat{k} [(1 + \beta_2)\hat{k} - \zeta^{-1}\alpha_2\hat{\phi} - \Psi] \end{aligned} \quad (40)$$

(40)을 보면, $B^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1 \geq b \zeta |s|$ 가 되도록 선정하면.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{|s|}{\hat{\phi}} &< (1 + \beta_2)\hat{k} - \zeta^{-1}\alpha_2\hat{\phi} - \Psi \\ \Rightarrow |s| &> [\Psi - (1 + \beta_2)\hat{k} + 1 + \zeta^{-1}\alpha_2\hat{\phi}]\hat{\phi} \end{aligned} \quad (41)$$

일 때는 $\dot{V} \leq (\dot{\hat{\phi}} - b k_1 |s|)|s|$ 이 되므로 (23)을 만족함을 볼 수 있다. 이는 즉 $|s|$ 는 다음 범위 내에 존재하게 됨을 알 수 있다.

$$|s| \leq \hat{\phi} \cdot \text{pos}[\Psi - (1 + \beta_2)\hat{k} + 1 + \zeta^{-1}\alpha_2\hat{\phi}] \leq 1 \quad (42)$$

여기서 $\text{pos}(\cdot)$ 는 (15)를 뜻한다. 따라서, (36)이 성립함이 증명되고, 스위칭 평면의 정의 (6)에 의하여, 추적오차 $\dot{\hat{x}}$ 는 s 로부터 1차 필터의 연계를 통하여 (22)와 같이 얻어질 수 있으므로, (37)이 성립함이 증명된다. ■

IV. MIMO 시스템에의 적용

3장에서 제시한 적응슬라이딩모드 제어 알고리즘은 편의상 2차 SISO 시스템을 대상으로 한 것이지만, 이들 알고리즘은 MIMO 시스템에도 쉽게 적용이 가능하다. 이 장에서는, Algorithm 3을 선택하여 MIMO 시스템에 적용하는 방법을 설명한다.

다음과 같은 Euler-Lagrange 공식에 의하여 모델링 되어진 n-link rigid body 로봇 매니퓰레이터를 고려하여 보자[1].

$$\begin{aligned} M(q) \ddot{q} + h(q, \dot{q}) + \tau_d(t) &= \tau(t) \\ h(q, \dot{q}) &= V(q, \dot{q}) + D \dot{q} + G(q) \end{aligned} \quad (43)$$

여기서 $q \in \mathbf{R}^n$ 는 조인트 각도, $M(q) = M^T(q) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 는 이너서 행렬, $V(q, \dot{q}) \in \mathbf{R}^n$ 는 원심력 및 코리올리(coriolis) 항, $D \dot{q} \in \mathbf{R}^n$ 는 점성마찰항, $G(q) \in \mathbf{R}^n$ 는 중력항, $\tau_d \in \mathbf{R}^n$ 는 알려지지 않은 외란, $\tau \in \mathbf{R}^n$ 는 입력 트오크 벡터를 나타낸다.

각 링크(link)의 목표 경로(angle)를 $q_d(t) \in \mathbf{R}^n$ 라 하면,

경로오차는 다음과 같이 나타낼 수 있고,

$$\tilde{q} = q - q_d, \quad \dot{\tilde{q}} = \dot{q} - \dot{q}_d$$

시스템 (43)을 고려할 때, (5)에 대응하는 슬라이딩 평면은 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$z = \tilde{q} + \lambda \dot{\tilde{q}} \quad (44)$$

여기서 $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \lambda_i > 0$ 가 된다. (5)에서 λ 는 스칼라(scalar)이고 (44)에서 λ 는 대각선행렬이 되며, (5)에서와 구분하기 위하여 s 대신 z 를 사용하였음에 주지하자

(43)과 (44)로부터 다음을 구할 수 있다.

$$M\dot{z} = M(\lambda \dot{\tilde{q}} - \ddot{q}_d) + \tau - \dot{h} - \tau_d \quad (45)$$

이제, 보조정리 1에서와 같이 다음정리를 고려하여 보자.

보조정리 2 : $M > 0$ 이 한계를 가진 미분가능한 q 의 함수로 이루어진 행렬이라 할 때 다음을 만족하는 상수 $\Psi > 0$ 이 존재한다.

$$z^T [M(\lambda \dot{\tilde{q}} - \ddot{q}_d) - \dot{h} - \tau_d] + \frac{1}{2} z^T Mz \leq \xi \Psi \|z\|, \quad \forall q, \dot{q} \quad (46)$$

$$\xi = 1 + \|z\| + \|z\|^2 \quad (47)$$

여기서 Ψ, ξ 는 3장에서와 다음에 주의하여야 한다. $\|\cdot\|$ 은 노름(norm)을 뜻한다.

증명 : 보조정리 1에서와 같이 증명할 수 있다. ■

이제 Algorithm 3을 응용하면 (43) 시스템에 대한 제어법칙 및 적응법칙을 다음과 같이 제시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau &= -k_1 z - u_s \\ u_s &= \begin{cases} \xi \hat{k} \frac{z}{\|z\|} & \text{if } \|z\| > \hat{\phi} \\ \xi \hat{k} \frac{z}{\hat{\phi}} & \text{otherwise} \end{cases} \\ \dot{\hat{k}} &= -\alpha_1 \hat{k} + \xi \beta_1 \|z\| \\ \begin{cases} \dot{\hat{\phi}} = \hat{\phi}(0), \dot{\hat{\phi}} = -\alpha_2 \hat{\phi} + \xi \beta_2 \hat{k}, & \text{if } \hat{\phi} > \hat{\phi}(0) \\ \dot{\hat{\phi}} = -\alpha_2 \hat{\phi} + \xi \beta_2 \hat{k}, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (48)$$

여기서 $\hat{\phi}(0) > 0, 1 > \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \hat{k}(0) > 0, 1 > \alpha_2 > 0, \beta_2 > 0$ 이며, ξ 는 (47)과 같다.

(48)이 슬라이딩조건을 만족하는가는 다음의 Lyapunov 함수를 선정하여 증명할 수 있다. 증명과정은 3장의 Algorithm 3과 유사하므로 생략한다.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \left(z^T Mz + \frac{1}{\beta_1} \hat{k} \cdot \hat{k} \right), \\ \dot{V} &= \dot{\hat{k}} + \xi^{-1} \dot{\hat{\phi}} - \Psi = (1 + \beta_2) \dot{\hat{k}} - \xi^{-1} \alpha_2 \dot{\hat{\phi}} - \Psi \end{aligned} \quad (49)$$

고찰 3 : [3]에서 설명한 바와 같이, 디지털 제어에 적용시 $\hat{\phi} > T, \forall t, T$ 는 샘플링시간(sampling time). 가 되도록 하여야 한다.

V. 설계의 예

이 절에서는 [8]에서 예로써 제시된 다음과 같은 시스템

을 선택하여, 본 논문에서 제시된 적응제어법칙의 설계와 컴퓨터 시뮬레이션 결과를 보인다.

$$\ddot{x} + a(t)x^2 \cos 3x = bu \quad (50)$$

여기서 $a(t)$ 및 $b(t)$ 를 정확하게는 알 수 없지만 다음의 범위 내에서 변화한다고 가정하자.

$$1 \leq a(t) \leq 3, \quad 0.5 \leq b(t) \leq 1.5$$

이때, (3)으로부터 $b_{\min} = 0.5, b_{\max} = 1.5, \hat{b} = (0.5 \times 1.5)^{1/2} = 0.8660$ 이 되고, (2)의 \hat{f} 및 F 는 다음과 같이 결정된다.

$$\hat{f} = -2.0 x^2 \cos 3x \quad F = 1.0 x^2 |\cos 3x|$$

(50)의 시스템에서 $a(t)$ 및 $b(t)$ 의 실제 값이 $a(t) = |\sin t| + 2$ 및 $b(t) = \cos(5t) * 0.5 + 1.0$ 로 각각 변화하는 시스템을 고려하여 본 논문에서 제시된 적응제어법칙을 적용, 비교하여 본다. 여기서 목표경로는 $x_d = \sin(\pi t/2)$ 으로 한다.

먼저 슬라이딩모드 제어법칙 (8)을 사용하였을 경우 $\lambda = 20, \eta = 0.1$ 로 하면 제어법칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= \hat{u} - k \text{sgn}(s) \\ \hat{u} &= (1/0.866)(2.0 x^2 \cos 3x + \ddot{x}_d - 20 \dot{x}) \\ k &= (1/0.866) [(1.5/0.5)^{1/2} * (1.0 x^2 |\cos 3x| + 0.1) \\ &\quad + (1.5/0.5)^{1/2} - 1] * |\hat{u}| \end{aligned} \quad (51)$$

이때의 추적오차와 제어신호를 보면, 추적성능은 우수하지만 제어입력의 채터링이 심하게 발생하는 것을 알 수 있다. (그림 생략)

다음, 제어법칙 (11)을 사용할 경우 $\phi = 0.02$ 로, $\eta = 0.1$ 로 하면 제어법칙은 다음과 같다.

$$u = \hat{u} - k \text{sat}(s/\phi) = \hat{u} - k \text{sat}[\tilde{x} + 20 \tilde{x}/0.1] \quad (52)$$

여기서 \hat{u} 및 k 는 (51)에서와 같다. 이때의 시뮬레이션 결과 그림 1을 보면, 제어입력의 채터링은 사라졌지만 경계층을 사용하지 않을 때 보다 추적오차가 증가한 것을 알

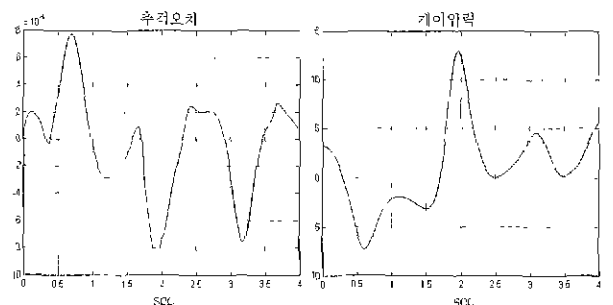


그림 1. 경계층을 적용한 경우의 추적성능 및 제어입력.

Fig. 1. Tracking performance and control input with boundary layer implemented.

수 있다.

다음, 본 논문에서 제시한 Algorithm 2의 적응제어법칙 (25)를 $\lambda=20$, $\alpha_1=0.004$, $\beta_1=14$, $\hat{k}(0)=2$, $\alpha_2=0.002$, $\beta_2=0.05$, $\hat{\varphi}(0)=0.0035$ 의 값을 사용하여 적용하였을 경우 추적오차, 제어입력, \hat{k} 의 변화 및 경계층범위의 변화를 그림 2에 보인다. 시뮬레이션 결과를 보면, 제어입력의 채터링이 발생하지 않고, \hat{k} 및 경계층범위의 적응으로, 입

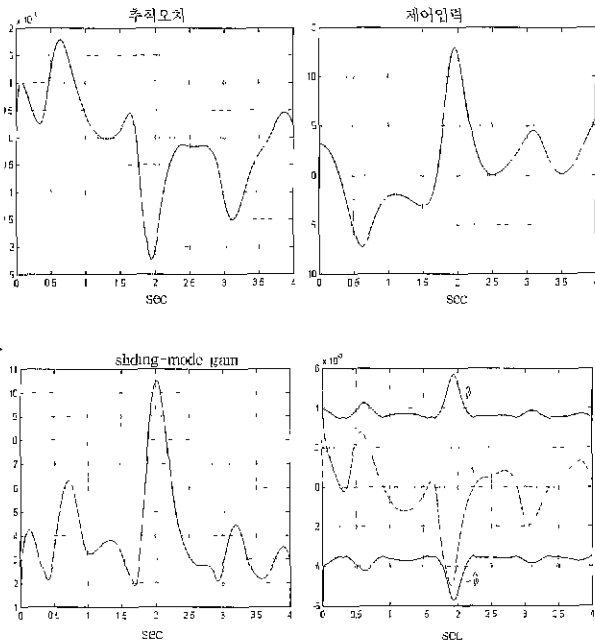


그림 2. Algorithm 2의 시뮬레이션 결과.
Fig. 2. Simulation results under Algorithm 2.

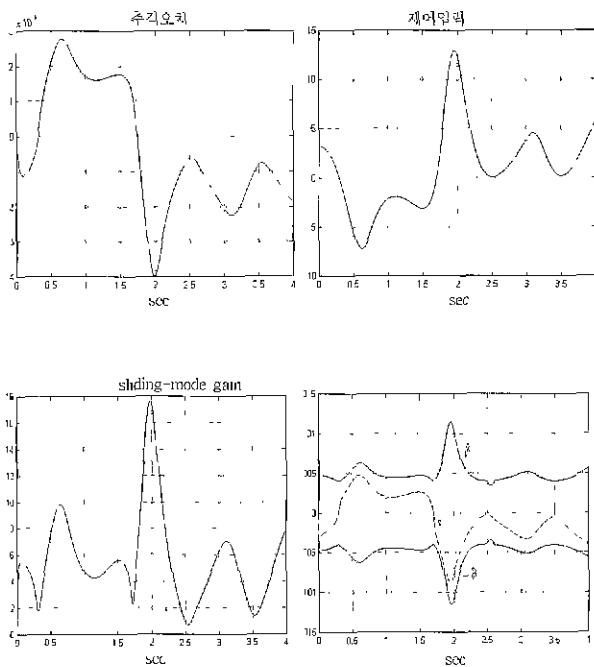


그림 3. Algorithm 3의 시뮬레이션 결과.
Fig. 3. Simulation results under Algorithm 3.

력신호의 채터링이 일어나지 않으면서도 추적성능이 현저하게 향상된 것을 볼 수 있다.

다음, Algorithm 3의 적응제어법칙 (35)를 $\lambda=20$, $\alpha_1=0.021$, $\beta_1=45$, $\hat{k}(0)=3$, $\alpha_2=0.005$, $\beta_2=0.05$, $\hat{\varphi}(0)=0.004$ 의 값을 사용하여 적용하였을 경우 추적오차, 제어입력, \hat{k} 의 변화 및 경계층범위의 변화를 그림 3에 보인다. 이 경우는 추적오차가 Algorithm 2에서 보다는 약간 증가하였지만, Algorithm 2와는 달리 공칭제어입력을 사용하지 않으므로 계산이 현저하게 간단하면서도 좋은 추적성능 결과를 얻을 수 있다. 따라서 Algorithm 3는 복잡한 시스템이나 불확실한 시스템, 또는 MIMO시스템 등에 쉽게 적용이 가능할 것이다.

VI. 결론

본 논문에서는 슬라이딩모드이득과 경계층범위 (boundary layer thickness)를 실시간으로 계산하여 적응시키는 세 종류의 적응슬라이딩모드 제어기 설계방법을 제시하였으며, MIMO시스템에 적용 방법을 보였다.

제시된 알고리즘의 특징은 공칭제어입력을 사용하지 않도록 함으로써 복잡한 시스템이나 불확실한 시스템, MIMO 시스템에 적용시에도 계산이 현저하게 간단하여, 실시간제어가 쉽도록 하였다는 것과, 슬라이딩모드이득과 경계층범위를 동시에 적응시킴으로써 비선형시스템에 적용시 제어신호의 채터링을 없애고, 시스템 불확실성에 대하여 강인하며, 추적오차를 더욱 개선시킬 수 있다는 것이며, 이를 컴퓨터시뮬레이션을 통하여 보였다.

참고문헌

- [1] J. J. Craig, *Introduction to Robotics Mechanics and Control*, Addison Wesley, 1986.
- [2] C. Edwards and S. K. Spurgeon, "Sliding mode control: theory and applications," Taylor & Francis, 1998.
- [3] K. Furuta, "Sliding mode control of a discrete system", *Sys. & Cont. Letters*, vol. 14, pp. 145-152, 1990
- [4] J. Y. Hung, W. Gao and J. C. Hung, "Variable structure control: a survey," *IEEE Tran. Indust. Elec.*, vol. 40, no. 1, pp. 2-22, 1993
- [5] J. S. Park, "Application of fuzzy logic to sliding mode control for robot manipulators", *Journal of Elec. Eng. and Inf. Sci.*, vol. 2, no. 6, pp. 14-19, 1997.
- [6] J. J. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators," *Int. Journal. of Control.* vol. 38, no. 2, pp. 465-492, 1983.
- [7] J. J. Slotine, "Sliding controller design for nonlinear systems," *Int. Journal. Control.* vol. 40, no. 2, pp. 421-434, 1984.
- [8] J. J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear*

Control, Prentice Hall, 1991.

- [9] S. K. Spurgeon, "Choice of discontinuous control components for robust sliding mode performance", *Int. Journal. Control* vol. 53, pp. 163-179, 1991.
- [10] V. I. Utkin, "Variable structure systems with

sliding modes", *IEEE Trans. on Aut. Cont.* vol. AC-22, pp. 212-222, 1977.

- [11] V. I. Utkin, *Sliding Modes in Control Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.



박 제 삼

1961년 7월 18일생. 1983년 충북대 전기과 졸업. The University of New South Wales, Australia 석사(1986) 및 박사(1995). 대우중공업 주임연구원(1987~1989), 호주 Scientia Systems 컴퓨터분석가/프로그래머(1989~1992). 1994~현재 시립인천전문대 전자과 부교수. 관심분야는 비선형 제어, 로보틱스, 퍼지 및 신경망 응용