Journal of Control, Automation and Systems Engineering, Vol. 6, No. 1, January, 2000

입력 시간지연 시스템의 한켈 연산자와 지연특성에 관한 연구

A Study on the Delay-Characteristics and Hankel Operators of Input Delay Systems

하 희 권, 황 이 철, 이 만 형
(Hee-Kwon Ha, I-Cheol Hwang, and Man-Hyung Lee)

Abstract : This paper studies the delay-characteristics using the singular values and vectors of Hankel operators for input delay systems. First, the computational method of Hankel singular values and their corresponding singular vectors are introduced, and then it is analytically provea that all the Hankel singular values have a monotone increasing properties as the length of delay time increases. Furthermore, through a simple numerical example, it is shown that the Hankel singular values are dependent only on the ratio of the time constant of a lumped parameter system to the length of delay, and in case that the time constant is relatively larger than the delay time, the lumped parameter characteristic has a great influence on the input delay systems.

Keywords : input delay system, Hankel operator, Hankel singular value, Hankel singular vector

I. 서론

본 논문에서는 한켈 연산자의 특이치, 특이벡터 계산법을 간단히 소개하고, 이들을 이용하여 입력 시간지연 시스템의 시간지연 특성을 연구한다.

유한차원 선형 시불변 시스템의 H^∞ 최적제어 및 모델 근사화 문제에서 한켈 연산자는 매우 중요한 역할을 하고 있다. 무한차원인 입력 시간지연 시스템의 한켈 연산자에 대해서도 본 논문의 저자를 포함한 다수의 연구자에 의하여 많은 연구가 수행되었다[1-4]. 특히 본 논문의 저자는 입력에 복수의 시간지연을 포함한 시스템의 한켈 특이치 및 그에 상응하는 특이벡터의 계산법을 제안하고, 그 결과가 시스템의 한켈 근사화에 많은 유용성이 있음을 확인하였다[4,5,6]. 그러나 기존의 연구결과들에서는 집중 파라미터 시스템의 시정수나 시간지연의 크기가 변동함에 따라 입력 시간지연 시스템의 한켈 특이치 및 특이벡터가 정량적으로 어떻게 변화하는지에 대한 연구는 아직 수행되어 있지 않다. 즉 무한개의 한켈 특이치를 크기의 순으로 순번을 매겼을 때, 시간지연 크기가 증가함에 따라 모두 단조적으로 증가하는지에 관한 고찰은 한켈 근사화에 있어 중요한 이론적인 연구과제라고 할 수 있다. 그리고 집중 파라미터 시스템 부분의 입력에 포함된 시간지연의 크기가 입력 시간지연 시스템의 한켈 특이치 및 특이벡터에 미치는 영향을 정량적으로 해석한다는 것은 입력 시간지연 시스템의 특성 해석에 있어 필요한 연구과제라 사료된다. 따라서 본 논문에서는 입력 시간지연 시스템의 한켈 특이치와 특이벡터의 계산법을 간단히 설명하고, 시간지연 크기가 증가함에 따라 한켈 특이치가 단조적으로 증가하는 성질을 해석적으로 증명한다. 그리고 단조증가성에 대한 결과를 통하여 모든 한켈 특이치의 상·하한을 구한다. 동시에 간단한 수치예제를 통하여 한켈 특이치의 크기는 집중 파라미터 시스템의 시정수와 시간지연 크기의 비에 의존하고 있음을 확인한다. 특히 한켈 특이벡터가 가지는 에너지를 통하여 시정수가 시간지연의 크기에 비하여 상대적으로 매우 클 경우에는 집중 파라미터 시스템의 특성이 입력 시간지연 시스템에 지배적으로 나타나고 있음을 보인다. 그 반대일 경우에는 시간지연의 효과가 매우 크게 나타남을 보인다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 단일 입력 시간지연 시스템의 그라미언 계산법을 소개하고, 그라미언의 고유치 문제를 통하여 한켈 특이치와 특이벡터 계산법과 한켈 특이치의 단조증가성을 제 3장에서 설명한다. 제 4장에서는 간단한 수치예제를 통하여 시간지연의 크기와 집중 파라미터 시스템의 시정수의 변화가 한켈 특이치에 미치는 영향을 고찰한다. 끝으로 본 논문의 결론과 향후 연구과제를 제 5장에서 간략히 설명한다.

II. 한켈 연산자와 그라미언

입력에 단일 시간지연을 가지는 선형 시불변 시스템을 고려한다

$$G(s) = \exp(-sL)F(s) \tag{1}$$

여기서 $L>0$는 시간지연의 크기를 나타내는 실수이며, $F(s)$는 안정이며 엄밀하게 프로퍼(proper)인 유리 전달함수로 주어지는 집중 파라미터 시스템을 나타내며 $G(s)$의 차분-미분 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t-L) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $x(t)\in\mathcal{R}^n$, $u(t)\in\mathcal{R}^m$ 및 $y(t)\in\mathcal{R}^p$는 각각 적절한

접수일자 : 1999. 2. 1., 수정완료 : 1999. 9. 22.
하희권 부산대학교 기계공학과 대학원
황이철 · 동의대학교 기계·산업시스템공학부
이만형 부산대학교 기계공학부, 정밀정형 및 금형가공연구소
※ 본 논문은 부산대학교 정밀정형 및 금형가공 연구소와 POSCO 석좌교수 연구기금의 지원하에 연구되었습니다.

차원을 가지는 상태, 제어입력, 관측 출력변수이며 $\mathcal{R}^i$는 i차원 실 유클리드 공간을 나타낸다. $[A,B,C]$는 집중 파라미터 시스템 $F(s)$의 n차원 최소실현이며, (A,B)는 가제어, (C,A)는 가관측이라고 가정한다. 그리고 시스템 (2)의 임펄스 응답 $h(t)$와 한켈 연산자 Γ_h는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$h(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le L\\ Ce^{A(t-L)}B, & L<t\end{cases}$$
$$(\Gamma_h u)(t)=\int_0^\infty h(t+s)u(s)ds \qquad (3)$$
$$=\begin{cases}\int_{L-t}^\infty Ce^{A(t-L+s)}Bu(s)ds, & 0\le t\le L\\ \int_0^\infty Ce^{A(t-L+s)}Bu(s)ds, & L<t\end{cases}$$

여기서 $h(t)\in\mathcal{L}_1[0,\infty]\cap\mathcal{L}_2[0,\infty]$이며, $\Gamma_h:\mathcal{L}_2[-\infty,0]\to\mathcal{L}_2[0,\infty]$, $\|\Gamma_h\|\le|h(t)|_1$이고, 컴팩터(compact)연산자이다. 이때 가제어 및 가관측 그라미언은 정리 1과 같다.

정리 1 : 시스템 (1)의 가제어, 가관측 그라미언 $\tilde{P},\tilde{Q}$는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\tilde{P}=\begin{bmatrix}P & 0\\ 0 & I\end{bmatrix},\quad \tilde{Q}=\begin{bmatrix}Q & K_1^*\\ K_1 & K\end{bmatrix} \qquad (4)$$

여기서 P,Q는 다음의 선형 행렬 방정식을 만족하며,

$$AP+PA^*+BB^*=0 \qquad (5)$$
$$QA+A^*Q+C^*C=0 \qquad (6)$$

그리고 $z\in\mathcal{R}^n, u\in\mathcal{L}_2[0,\infty]$일 때 $K_1:\mathcal{R}^n\to\mathcal{L}_2[0,L]$, $K_1^*:\mathcal{L}_2[0,L]\to\mathcal{R}^n$ 및 $K:\mathcal{L}_2[0,L]\to\mathcal{L}_2[0,L]$는 다음과 같다.

$$(K_1z)(t)=F_1(t)z$$
$$K_1^*u=\int_0^L G_2(s)u(s)ds \qquad (7)$$

$$(Ku)(t)=F_1(t)\int_0^t G_1(s)u(s)ds-F_2(t)\int_0^t G_2(s)u(s)ds \qquad (8)$$

위의 식에서 $F_i(t), G_i(t), (i=1,2)$는 각각 아래와 같다.

$$F_1(t)=B^*Qe^{At},\quad G_1(t)=e^{-At}B$$
$$F_2(t)=B^*e^{-A^*t},\quad G_2(t)=e^{A^*t}QB \qquad (9)$$

정리 1에 대한 구체적인 증명은 문헌[9]을 참고하기 바란다. 문헌[9]에서는 위의 가관측 그라미언은 컴팩터하며, 특히 (2,2)블록은 준-분리 가능한 핵 함수를 가지는 적분 연산자[8]임을 보이고, 그러한 준-분리성으로부터 한켈 연산자의 특이치 계산을 그라미언의 고유치 문제로 해석하였다. 다음 장에서는 그라미언의 고유치 계산을 통하여 한켈 특이치와 특이벡터 계산법을 간단히 설명한다.

III. 한켈 특이치와 특이벡터

본 절에서는 시스템 (1)의 한켈 특이치 및 특이벡터의 계산법 및 한켈 특이치의 단조 증가성을 증명하고, 한켈 특이치의 상 · 하한을 구한다.

1. 한켈 특이치 및 특이벡터 계산

시스템 (1)의 한켈 특이치를 $\sigma(G)$, 그에 상응하는 한켈 특이벡터 혹은 슈미트 쌍을 $\{f(t),g(t)\}$라고 하면, 이들은 다음 관계를 만족한다.

$$(\Gamma_h f)(t)=\sigma g(t),\quad (\Gamma_h^* g)(t)=\sigma f(t)$$

위의 식에서 한켈 특이치 계산은 그라미언의 고유치 문제로 귀착되며[1,7], 즉 고유치 λ는 $(I_{2n}-\mu\tilde{P}\tilde{Q})$의 비 가역성에 대한 필요충분조건으로부터 얻을 수 있다. 다음의 정리 2는 그들의 계산 결과를 설명한다.

정리 2 : $\mu\in\mathcal{R}^n$에 대하여 한켈 특이치 λ는 $\tilde{P}\tilde{Q}$의 고유치로부터 다음 조건을 만족한다.

$$\det\left(\mu^{-1}U_{22}(L;\mu)P^{-1}(I_n-\mu PQ)+U_{21}(L;\mu)\right)=0 \qquad (10)$$

여기서 P,Q는 각각 (5), (6)에서 주어진 선형 행렬 방정식의 해이며, $U(t)(0\le t\le L)$는 1계 미분 제차 행렬방정식의 기본해로서 다음과 같다.

$$U(t;\mu)=I_{2n}+\mu\int_0^t\tilde{S}(s)U(s;\mu)ds$$

여기서 I_{2n}은 $2n\times2n$차원 단위행렬이고, $\tilde{S}(t)$는 $0\le t\le L$구간에서 Lebesgue 적분가능한 $2n\times2n$크기의 정방 행렬로 정의된다.

$$\tilde{S}(t)=\begin{bmatrix}G_1(t)F_1(t) & G_1(t)F_2(t)\\ -G_2(t)F_1(t) & -G_2(t)F_2(t)\end{bmatrix}$$

각 블록 요소는 (9)와 같이 주어진다. 따라서 기본 해 $U(t;\mu)$는 2×2블록으로 분할되어,

$$U(t;\mu)=\begin{bmatrix}U_{11}(t;\mu) & U_{12}(t;\mu)\\ U_{21}(t;\mu) & U_{22}(t;\mu)\end{bmatrix}$$

(10)의 $U_{21}(L,\mu), U_{22}(L,\mu)$가 주어진다. 그리고 한켈 연산자의 특이벡터 $\{f(t),g(t)\}$는 각각 다음과 같다.

i) $0\le t\le L$일때

$$\sigma f(L-t)=B^*x_2(t)$$
$$\sigma g(t)=Cx_1(t) \qquad (11\text{-}1)$$

ii) $t>L$일때

$$\sigma f(t)=B^*e^{-A^*(t-L)}x_2(0)$$
$$\sigma g(t)=Ce^{A(t-L)}x_1(L) \qquad (11\text{-}2)$$

위의 식에서 상태변수 $x_1(t), x_2(t)$는 각각 다음 미분 방정식의 기본해를 나타낸다.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & \sigma^{-1}BB^*\\ -\sigma^{-1}C^*C & -A^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} \qquad (12)$$

위의 정리 2에 대한 구체적인 증명은 문헌[9]를 참고하기 바라며, 문헌[9]에서는 (10)에서 주어진 한켈 특이치에 대한 수치계산은 2분법을 통하여 수행하고 있다.

2. 한켈 특이치의 단조증가성

본 절에서는 컴팩터하고 음이 아닌 자기수반(self-adjoint) 연산자의 최소최대(minimax) 정리로부터 고유치의 하한과 상한을 구한다. 이로부터 한켈 특이치의 단조

증가성을 해석적으로 증명한다.

M을 힐버트(Hilbert) 공간 H상에서의 선형 유계 연산자라 하면, $x\in H$에 대해 $\langle Mx, x\rangle \geq 0$일때 M은 음이 아닌 연산자로 정의된다. 이는 고유치가 음이 아니기만 하면 컴팩터한 자기수반 연산자인 M은 음이 아니다. 그리고 힐버트 공간 H상에서 컴팩터한 자기수반 연산자의 모든 고유치는 음이 아닌 실수이며, 셀수 있는 집합을 가지게 된다. 먼저 자기수반 연산자의 고유치에 대한 최소최대 정리를 간단히 소개한다. 이는 연산자에 대한 스펙트럴(spectral) 정리로부터 유도된다.

보조정리 1[8] : M이 힐버트 공간 H상에서 컴팩터이면서 음이 아닌 자기수반 선형 연산자로서, 고유치를 크기의 순으로 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$와 같이 정의한다. 이때 양의 정수 i에 대하여 다음 관계가 성립한다.

$$\lambda_i(M) = \min_{\substack{S \\ \dim S = i-1}} \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x\perp S}} \langle x, Mx\rangle \tag{13}$$

보조정리 2[9] : 힐버트 공간 H에서 H_1으로 사상되는 음이 아니고 컴팩터한 자기수반 선형 연산자를 M이라고 정의한다. 여기서 H_1을 H의 부분공간으로 가정하면 $M_1 = \Pi M|_{H_1}$을 만족하는 $M_1 : H_1 \to H_1$이 존재하며, Π는 H에서 H_1로의 직교사영 연산자이다. 이때 $\lambda_i(M)$과 $\lambda_i(M_1)$을 각각 크기가 감소하는 차순으로 정렬한 M 및 M_1의 고유치라고 할 때 아래 식 (14)가 성립한다.

$$\lambda_i(M) \geq \lambda_i(M_1) \tag{14}$$

위의 보조정리 1,2를 이용하여 한켈 특이치의 상·하한을 구하고 단조증가성을 간단히 증명한다. 먼저 $\tilde{P}\tilde{Q}$는 자기수반연산자가 아니므로, 보조정리 1과 2를 적용하기 위해서 $\tilde{P}\tilde{Q}$의 고유치 문제 ($\tilde{P}\tilde{Q}x_f = \lambda x_f$)를 (15)와 같이 변환한다.

$$\tilde{P}^{1/2}\tilde{Q}\tilde{P}^{1/2} z_f = \lambda z_f, \quad x_f = \tilde{P}^{1/2} z_f \tag{15}$$

단, 집중 파라미터 시스템의 가제어성으로부터 $\tilde{P}^{-1}$가 존재함에 주의하자. 따라서 $\tilde{P}^{1/2}\tilde{Q}\tilde{P}^{1/2}$는 컴팩터이면서 음이 아닌 자기수반 선형 연산자임을 알 수 있으며, $\tilde{P}^{1/2}\tilde{Q}\tilde{P}^{1/2}$를 Γ_G라고 정의하면 두개의 자기수반 선형 연산자 Γ_F와 Γ_P의 합으로 표시된다.

$$\Gamma_G = \Gamma_F + \Gamma_P \tag{16}$$

$$\Gamma_F = \begin{bmatrix} P^{1/2}QP^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_P = \begin{bmatrix} 0 & P^{1/2}K_1^{-} \\ K_1 P^{1/2} & K \end{bmatrix} \tag{17}$$

여기서 Γ_P는 시스템 (1)에서 집중 파라미터 시스템의 그라미언을 나타내며, Γ_P는 입력 시간지연 시스템의 그라미언 Γ_G에서 Γ_F를 뺀, 즉 시간지연 특성이 포함된 부분이라 해석할 수 있다. 그리고 $\lambda_F(\mu_F^{-1} \neq 0)$ 및 $\lambda_P(\mu_P^{-1} \neq 0)$를 각각 Γ_F 및 Γ_P의 고유치라고 하면, 이들은 각각 (16)과 (17)로부터 계산된다.

$$\det[\mu_F^{-2}(I_n - \mu_F PQ)] = 0 \tag{18}$$

$$\det[\mu_P^{-1} U_{22}(L;\mu_P)P^{-1} + U_{21}(L;\mu_P)] = 0 \tag{19}$$

이때 보조정리 1과 2로부터 다음 정리와 같이 한켈 특이치의 상한과 하한을 얻게 된다.

정리 3 : $\lambda_i(\Gamma_G)$, $\lambda_i(\Gamma_F)$, $i=1,2,\cdots$를 크기가 큰 것부터 순서대로 나열한 Γ_G, Γ_F의 고유치라고 하면 다음 관계가 성립한다.

$$\lambda_i(\Gamma_F) \leq \lambda_i(\Gamma_G) \leq \lambda_i(\Gamma_F) + \|\Gamma_P\| \tag{20}$$

증명 : $\lambda_i(\Gamma_F) = \lambda_i(P^{1/2}QP^{1/2})$, $i=1,2,\cdots,n$을 Γ_F의 고유치, Π를 $\mathcal{R}^n \times \mathcal{L}_2(0,L)$에서 $\mathcal{R}^n$으로의 직교사영 연산자라 할 때, $\Pi\Gamma_G|_{\mathcal{R}^n} = P^{1/2}QP^{1/2}$이 성립된다. 이것과 보조정리 2를 이용하면 하한이 주어진다. 그리고 보조정리 1로부터 다음과 같이 상한을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\lambda_i(\Gamma_G) &= \min_{\substack{S \\ \dim S = i-1}} \max_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi\perp S}} \langle \xi, \Gamma_G \xi\rangle \\
&= \min_{\substack{S \\ \dim S = i-1}} \max_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi\perp S}} (\langle \xi, \Gamma_F \xi\rangle + \langle \xi, \Gamma_P \xi\rangle) \\
&\leq \min_{\substack{S \\ \dim S = i-1}} (\max_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi\perp S}} \langle \xi, \Gamma_F \xi\rangle + \|\Gamma_P\|) \\
&= \min_{\substack{S \\ \dim S = i-1}} \max_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi\perp S}} (\langle \xi, \Gamma_F \xi\rangle + \|\Gamma_P\|) \\
&= \lambda_i(\Gamma_F) + \|\Gamma_P\|
\end{aligned}$$

여기서 $\|\cdot\|$는 연산자 노음을 표시한다.

정리3의 상한에서 힐버트-슈미트 노음 $\|\Gamma_P\|_{HS}$과의 관계 즉, $\|\Gamma_P\| \leq \|\Gamma_P\|_{HS}$로부터 유한의 크기를 가진다. 정리 3은 크기의 순서가 붙여진 시간지연 시스템의 모든 한켈 특이치는 집중 파라미터 시스템의 고 유치보다 항상 크다는 것을 의미하고 있다. 다음에는 지연시간의 크기가 $L' \leq L$인 경우를 생각한다. 이때 각 지연시간의 크기에 대한 한켈 연산자는 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma_G(L') : \mathcal{R}^n \times \mathcal{L}_2[0,L'] \to \mathcal{R}^n \times \mathcal{L}_2[0,L'],$$
$$\Gamma_G(L) : \mathcal{R}^n \times \mathcal{L}[0,L] \to \mathcal{R}^n \times \mathcal{L}_2[0,L]$$

다음의 정리 4는 시간지연 크기에 따른 한켈 특이치의 단조증가성을 보이고 있다.

정리 4 : $\lambda_i(\Gamma_G(L'))$ 및 $\lambda_i(\Gamma_G(L))$를 크기가 작아지는 순서로 정렬한 $\Gamma_G(L')$ 및 $\Gamma_G(L)$의 고유치라고 할 때, 다음 관계가 성립한다.

$$\lambda_i(\Gamma_G(L')) \leq \lambda_i(\Gamma_G(L)) \tag{21}$$

증명 : $\mathcal{R}^n \times \mathcal{L}_2[0,L]$로부터 $\mathcal{R}^n \times \mathcal{L}_2[0,L']$로 직교 사영하는 연산자를 Π라 둘 때 아래의 식이 성립한다.

$$\Pi\Gamma_G(L)|_{R^n>L_2[0,L]} = \Gamma_G(L')$$

따라서 보조정리 2로부터 (21)을 얻는다. ■

위의 정리 4는 시간지연의 크기가 증가할수록 모든 한켈 특이치는 단조적으로 증가함을 의미하고 있다. 즉 집중 파라미터 시스템에 시간지연의 크기가 다른 두 입력 시간지연 시스템을 동일 차수의 유한차원 시스템으로 한켈 근사화할 경우, 시간지연의 크기가 증가할수록 근사화 오차가 증가함을 의미한다.

다음 장에서는 간단한 수치 예제를 통하여 2, 3장의 결과를 고찰하기로 한다. 특히 한켈 특이치의 단조증가성과 특이벡터의 성질로부터 시간지연의 크기와 집중 파라미터 시스템의 시정수가 시간지연 시스템에 미치는 영향을 고찰한다.

IV. 수치 예제

1차 집중 파라미터 시스템의 입력에 시간지연이 포함된 시스템을 아래와 같이 고려한다.

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1} e^{-sL} \tag{22}$$

위의 식에서 T는 집중 파라미터 시스템의 시정수이며, L은 시간지연을 나타낸다. (22)에 대한 미분-차분 방정식은 (23)과 같으며, 집중 파라미터 시스템의 가제어, 가관측 그라미언 $\tilde{P}, \tilde{Q}$는 $\tilde{P} = \tilde{Q} = \frac{1}{2}$이 된다

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{1}{T} x(t) + \frac{1}{\sqrt{T}} u(t-L) \\ y(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} x(t) \end{aligned} \tag{23}$$

그리고 시스템 (23)의 한켈 특이치와 특이벡터는 정리 2로부터 얻어진다.

이 장에서는 각각의 한켈 특이치 $\sigma_i, i=1,2,\cdots$에 대하여 i) L을 고정하고 T의 변화, T를 고정하고 L의 변화에 따른 한켈 특이치의 특성 ii) σ_i에 상응하는 한켈 특이벡터 $\{f_i(t), g_i(t)\}$ (슈미트 쌍)의 특성 iii) T의 극한치에 따른 한켈 특이벡터의 에너지에 관한 고찰을 통하여, 시간지연의 크기와 시정수가 시스템에 미치는 영향을 설명한다.

1. 한켈 특이치의 특성

위의 정리 2로부터 다음 방정식의 기본해를 구한다.

$$\frac{d}{dt} U(t,\mu) = \mu \tilde{S}(t) U(t;\mu)$$

여기서 $\tilde{S}(t)$는 다음과 같이 주어진다.

$$\tilde{S}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2T} & \frac{e^{-\frac{2}{T}t}}{T} \\ -\frac{e^{\frac{2}{T}t}}{4T} & -\frac{1}{2T} \end{bmatrix}$$

이때 기본해 $U(t;\mu)$는 2×2크기의 행렬로서 각 요소는 다음과 같이 얻어진다.

$$U_{11}(t;\mu) = e^{\frac{1}{T}}\left(\cos\omega t - \frac{\mu-2}{2\omega T}\sin\omega t\right),$$

$$U_{12}(t,\mu) = \frac{\mu}{\omega T} e^{\frac{t}{T}} \sin\omega t$$

$$U_{21}(t,\mu) = -\frac{\mu}{4\omega T} e^{-\frac{t}{T}} \sin\omega t$$

$$U_{22}(t;\mu) = e^{-\frac{t}{T}}\left(\cos\omega t - \frac{\mu-2}{2\omega T}\sin\omega t\right)$$

여기서 $\omega = \frac{\sqrt{\mu-1}}{T}$, $\mu = \sigma^{-2} > 1$을 만족한다. 따라서 (10)으로부터 한켈 특이치는 다음의 초월방정식을 만족한다.

$$\frac{1}{\mu} e^{-\frac{L}{T}}\left(\cos\omega L - \frac{\mu-2}{2\omega T}\sin\omega L\right)\left(2-\frac{\mu}{2}\right) - \frac{\mu}{4\omega T} e^{-\frac{L}{T}} \sin\omega L = 0 \tag{24}$$

위의 식에 대한 수치계산 알고리즘은 2분법을 통해 실현되며, μ의 초기치는 집중 파라미터 시스템의 최대 특이치로부터 주어진다. 먼저 시간지연의 크기를 $L=1.0$으로 고

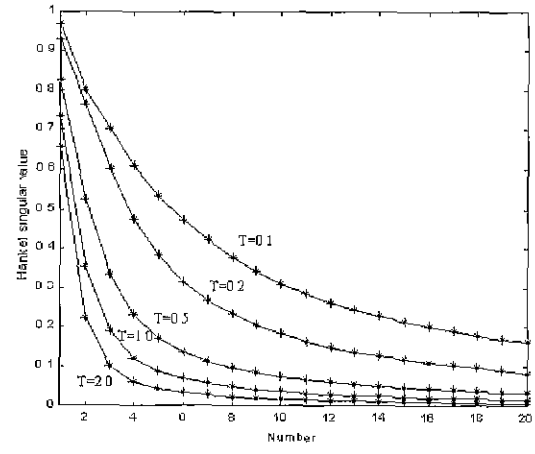

그림 1. L=1.0으로 고정하고 T를 변화시켰을 때 한켈 특이치의 변화.

Fig. 1. Change of the Hankel singular value with fixed L(=1.0) and varied T.

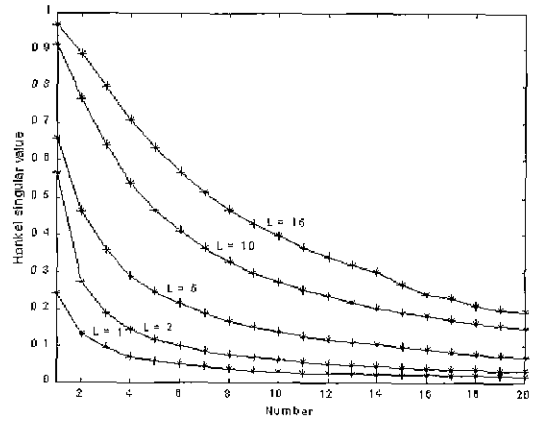

그림 2. T=1.0으로 고정하고 L을 변화시켰을 때 한켈 특이치의 변화.

Fig. 2. Change of the Hankel singular value with fixed T(=1.0) and varied L.

정하고 집중 파라미터 시스템의 시정수 T를 변화시켰을 때 한켈 특이치가 어떻게 변화하는지를 확인한다. 그림 1에서 T가 감소함에 따라 한켈 특이치는 단조증가함을 알 수 있다. 이것은 시정수가 작을수록 시간지연 특성이 크게 나타남을 의미한다.

한편 $T=1.0$으로 고정하고 L을 증가시키면 그림 2에서와 같이 모든 한켈특이치가 단조적으로 증가함을 볼 수 있다. 따라서 시정수가 고정된 시스템에서 시간지연의 크기를 증가할수록 지연요소의 영향이 큼을 알 수 있다. 특히 (24)에서 L/T을 고정하면 한켈 특이치는 거의 변동이 없게 된다. 따라서 시간지연 크기 L이 큰 경우일지라도 시정수 T의 크기가 크면 집중 파라미터 시스템에 미치는 시간지연 영향이 상대적으로 작음을 알 수 있다. 즉 시간지연의 크기가 매우 큰 시스템의 근사화 문제에서 시정수가 클 경우에도 즉 응답이 느린 시스템일 경우에는 상대적으로 낮은 차수의 유한 시스템으로 근사화할 수 있게 된다.

2. 한켈 특이벡터의 특성

각각의 한켈 특이치에 상응하는 한켈 특이벡터는 (11)로부터 다음과 같이 주어진다.

i) $0 \le t \le L$일때

$$f_i(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\Big(2\cos\omega_i(L-t) + \frac{1}{\omega_i T}\Big(2-\frac{1}{\sigma_i^2}\Big)\sin\omega_i(L-t)\Big) \tag{25-1}$$

$$g_i(t)=\frac{1}{\sigma_i\sqrt{T}}\Big(\cos\omega_i t+\frac{1}{\omega_i T}\sin\omega_i t\Big) \tag{25-2}$$

ii) $L<t$일때

$$f_i(t)=\frac{2}{\sqrt{T}}e^{-\frac{t-L}{T}} \tag{25-3}$$

$$g_i(t)=\frac{1}{\sigma_i\sqrt{T}}\Big(\cos\omega_i L+\frac{1}{\omega_i T}\sin\omega_i L\Big)e^{-\frac{t-L}{T}} \tag{25-4}$$

위의 식에서 한켈 특이치 $\sigma_i\ (i=1,2,\cdots)$에 상응하는 특이벡터 $\{f_i(t), g_i(t)\}$의 진동수는 $[0,\ L]$에서 $\omega_i = \frac{1}{T}\sqrt{\frac{1}{\sigma_i^2}-1}$임을 알 수 있다. 그림 3과 그림 4는 각각 $L=1.0$, $T=1.0$일 경우에 있어 정규화 특이벡터 $f_i(t)$를 나타내며(단 $g_i(t)$는 유사하므로 생략) 한켈특이치가 작아짐에 따라 그에 상응하는 특이벡터의 진동수는 증가하여 고주파 신호로 변화함을 알 수 있다.즉 한켈 근사화에 있어 저차 시스템으로 근사화할수록 고주파 성분의 근사화 오차가 증가함을 알 수 있다. 이에 대한 근사화 결과는 문헌[6]을 참고하기 바란다.

3. 시정수의 극한치에 대한 한켈 특이벡터

이 절에서는 시간지연의 크기 L을 1.0으로 고정시키고, T의 극한치에 대한 한켈 특이치 및 특이벡터의 특성으로부터 시간지연 요소의 영향을 고찰한다.

표 1은 T를 매우 큰값으로 증가시켰을 경우에 대한 한켈 특이치를 나타내며, 여기서 T가 무한대의 값으로 증가시키면 한켈 특이치는 $\sigma_1 \to 0.5$, $\sigma_i \to 0$ $(i=2,3,\cdots)$에 수렴하게 된다. 즉 T가 무한대의 값으로 증가하면 입력 시간지

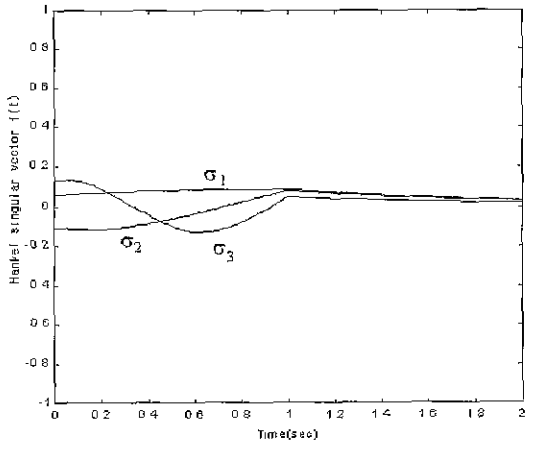

그림 3. 한켈 특이벡터 $f_i(t)(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Fig. 3. Hankel singular vector $f_i(t)$ (with respect to $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$).

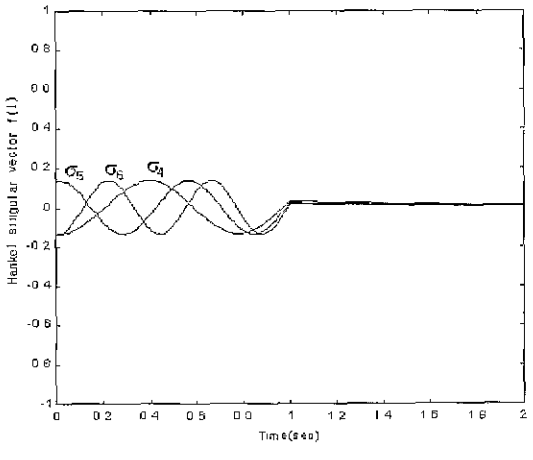

그림 4. 한켈 특이벡터 $f_i(t)(\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$.

Fig. 4. Hankel singular vector $f_i(t)$ (with respect to $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$).

표 1 T에 따른 한켈 특이치의 분포(L=1.0 일때).

Table 1. Distribution of Hankel singular values according to T (with respect to L=1.0).

	T=5	T=10	T=50	T=100
σ_1	5.7898×10^{-1}	5.4386×10^{-1}	5.0971×10^{-1}	5.0497×10^{-1}
σ_2	1.0537×10^{-1}	5.7286×10^{-2}	1.2436×10^{-2}	6.2905×10^{-3}
σ_3	4.1318×10^{-2}	2.0937×10^{-2}	4.2327×10^{-3}	2.1192×10^{-3}
σ_4	2.5214×10^{-2}	1.2670×10^{-2}	2.5440×10^{-3}	1.2726×10^{-3}
σ_5	1.8097×10^{-2}	9.0717×10^{-3}	1.8180×10^{-3}	9.6736×10^{-4}
σ_6	1.4103×10^{-2}	7.0628×10^{-3}	1.4143×10^{-3}	8.7421×10^{-4}
σ_7	1.1551×10^{-2}	5.7816×10^{-3}	9.7239×10^{-4}	8.1728×10^{-4}
σ_8	9.7796×10^{-3}	4.8935×10^{-3}	8.9525×10^{-4}	7.6524×10^{-4}
σ_9	8.4788×10^{-3}	4.2418×10^{-3}	8.2573×10^{-4}	7.2351×10^{-4}
σ_{10}	7.4831×10^{-3}	3.7432×10^{-3}	7.6731×10^{-4}	6.8919×10^{-4}

연 시스템 (22)의 한켈 특이치는 집중 파라미터 시스템의 한켈 특이치로 수렴함을 보인다. 즉 시간지연의 크기에 비해서 시정수가 매우 큰 시스템에서는 시간지연 영향이 그다지 크지 않음을 알 수 있다.

다음에는 시정수 T의 극한값에 대한 한켈 특이벡터의 극한 거동을 고찰한다. 먼저 집중 파라미터 시스템의 정규화된 한켈 특이벡터 $\{f(t), g(t)\}$는 아래와 같다.

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{T}} e^{-\frac{t}{T}}, \quad g(t) = \frac{2}{\sqrt{T}} e^{-\frac{t}{T}} \qquad (26)$$

위의 식에서 $T \to \infty$로 하면 각각의 한켈 특이벡터는 0 으로 수렴한다

그림 5, 6은 T를 크게 하였을 때 최대 한켈 특이치 σ_1에 상응하는 특이벡터를 나타낸다. 여기서 실선과 점선은 각각 입력 시간지연 시스템과 집중 파라미터 시스템의 특이벡터를 나타낸다. T를 크게 할수록 입력 시간지연 시스템의 특이벡터가 집중 파라미터 시스템의 특이벡터에 접근하면서 0으로 수렴함을 알수 있다. 이는 한켈 특이치와 유사한 극한 거동이다.

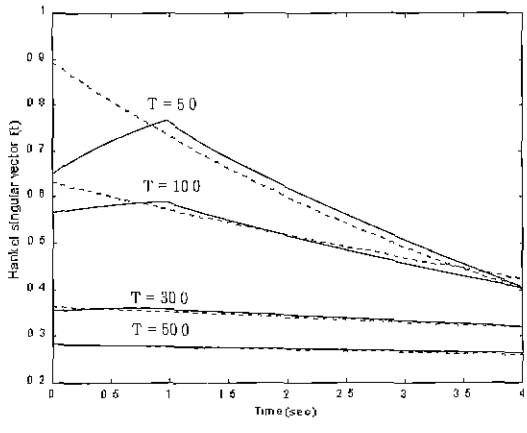

그림 5. T가 클 경우의 특이벡터 $f(t)$(σ_1).

Fig. 5. Distribution of singular vector $f(t)$ in the case of large T(with respectto σ_1).

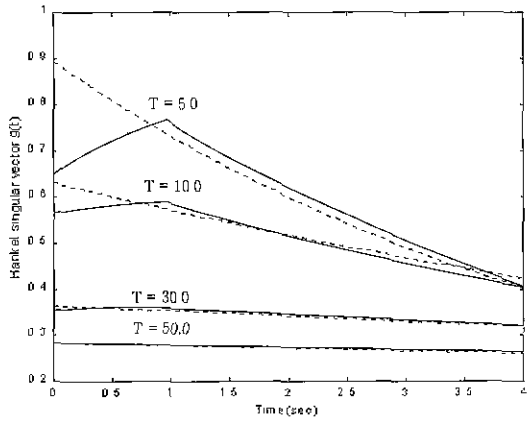

그림 6. T가 클 경우의 특이벡터 g(t)(σ_1).

Fig. 6. Distribution of singular vector g(t) in the case of large T (with respect to σ_1).

한편, 시정수의 극한값에 따른 한켈 특이벡터의 거동을 해석적으로 설명하기 위하여 특이벡터의 에너지를 도입한다. 일반적으로 임의의 함수공간에서 정의되는 신호 $\phi(t)$의 에너지는 다음과 같이 정의된다.

$$E = \int_0^\infty \phi^*(t)\phi(t)dt \qquad (27)$$

입력 시간지연 시스템의 한켈 특이벡터 (25)와 집중 파라미터 시스템의 한켈 특이벡터 (26)가 가지는 에너지를 각각 $E_{fL}, E_{gL}, E_{fT}, E_{gT}$로 정의하면 다음과 같이 주어진다.

$$E_{fL} = \frac{\Theta_{fL}}{2+\Theta_{fL}}, \quad E_{gL} = \frac{\Theta_{gL}}{\Theta_{gL}+\Theta_{gT}},$$
$$E_{fT} = \frac{2}{2+\Theta_{fL}}, \quad E_{gT} = \frac{\Theta_{gT}}{\Theta_{gL}+\Theta_{gT}}$$

여기서 Θ_{fL}, Θ_{gL}, Θ_{gT}는 각각 다음과 같다.

$$\Theta_{fL} = \frac{1}{T}\left(2L(1+\frac{\sin 2\omega L}{2\omega L}) + \frac{1}{\omega^2 T}(2-\frac{1}{\sigma^2})(1-\cos 2\omega L) + \frac{L}{2\omega^2 T^2}(2-\frac{1}{\sigma^2})^2(1-\frac{\sin 2\omega L}{2\omega L})\right)$$
$$\Theta_{gL} = \frac{1}{\sigma^2 T}\left(\frac{L}{2}(1+\frac{\sin 2\omega L}{2\omega L}) + \frac{1}{2\omega^2 T}(1-\cos 2\omega L) + \frac{L}{2\omega^2 T^2}(1-\frac{\sin 2\omega L}{2\omega L})\right)$$
$$\Theta_{gT} = \frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{1}{\omega T}\sin\omega L + \cos\omega L\right)^2$$

여기서 T가 무한대로 되면 입력 시간지연 시스템의 최 대 한켈특이치 σ_1이 0.5에 수렴하므로 $\Theta_{fL}, \Theta_{gL}, \Theta_{gT}$는 각각 $0, 0, 1/(2\sigma_1^2)$에 수렴하게 된다. 즉 각각의 한켈 특이벡터의 에너지는 $E_{fL}\to 0, E_{gL}\to 0, E_{fT}\to 1, E_{gT}\to 1$이 된다. 결과적으로 시간지연 크기에 비하여 시정수가 상대적으로 매우 크면, 시간지연 시스템의 특이벡터 에너지는 집중 파라미터 시스템에 집중됨을 알 수 있다. 이는 시간지연의 크기에 비하여 시정수가 매우 클 경우는 시간지연의 영향이 미미함을 알 수 있다.

IV. 결론

본 연구에서는 입력 시간지연 시스템의 한켈 특이치 및 특이벡터의 계산법을 제안하고, 시간지연과 시정수의 증가에 따른 한켈 특이치의 단조증가성 및 시간지연 특성을 고찰하였다. 한켈 특이치는 시간지연의 크기와 시정수가 증가함에 따라 단조적으로 증가함을 알 수 있었고, 특히 시정수 T와 시간지연 L의 비에 따라 한켈 특이치의 크기가 변화함을 알았다. 즉 시간지연이 클 경우에도 집중 파라미터 시스템의 시정수가 크면 시간지연의 영향이 작아짐을 확인하였다. 그리고 한켈 특이벡터는 고유진동수를 가지며 한켈 특이치의 크기가 작아질수록 그에 상응하는 특이벡터의 진동수가 증가하여 고주파 성분이 됨을 보였다. 그리고 시간지연의 크기를 고정시킨 후 T를 무한대의 극한값으로 증가시키면 입력 시간지연 시스템의 특성은 집중 파라미터 시스템의 특성으로 수렴함을 보였다. 본 논문의 결과는 입력 시간 지연 시스템의 근사화에 있어 집중 파라미터 시스템의 시정수와 시간지연 크기와의 관계, 그

리고 한켈 특이치와 특이벡터를 통하여 유한차원 근사시스템의 차수를 최적적으로 결정하는데 그 유용성을 가질 것으로 사료된다. 향후 본 연구의 내용을 보다 일반적으로 도출하는 것이 필요하며, 제어기 설계와의 관계에 대한 연구를 수행하는 것이 필요하다.

참고문헌

[1] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their $\mathcal{L}^{\infty}$-error bounds," *Int. J. Control*, vol. 39, no. 6, pp. 1115-1193, 1984.

[2] K. Glover, J. Lam and J. R. Partington, "Rational approximation of a class of infinite-dimensional systems I:Singular values of Hankel operators," *Math. Control Signals Systems*, vol. 3, no. 4, pp. 325-344, 1990.

[3] M. C. Smith, "Singular values and vectors of a class of Hankel operators,"*System & Control Letters*, vol. 8, pp. 159-165, 1988.

[4] I. C. Hwang, H. Nishino and Y. Ohta, "On the Hankel singular values of input time delay systems." *Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers(SICE)*, vol 31, no. 10, pp. 1650-1657, 1995.

[5] I. C. Hwang and Y. Ohta, "Hankel singular values of commensurate delay systems." *Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers (SICE)*, vol. 32, no. 2, pp. 188-196, 1996.

[6] 황이철, 하희권, 이만형, "입력 시간지연 시스템의 한켈 근사화에 관한 연구," 제어·자동화·시스템 공학회 논문집, 제4권, 제3호, pp. 308-314, 1998.

[7] R. F. Curtain, "Robust stabilizability of normalized coprime factors : the infinite dimensional case," *Int. J. Control*, vol. 51, no. 6, pp. 1173- 1190, 1990.

[8] I. Goldberg, S. Goldberg and M. A. Kaasheok, *Classes of linear operators, vol. I, Operator Theory : Advances and Applications*, 49, Birk- häuser, 1990.

[9] I. C. Hwang, "Studies on the Hankel singular value for rational approximation of input delay systems," Doctoral Thesis of Osaka University, 1996.

하 희 권

1959년 6월 28일생. 1982년 및 1987년 부산대학교 기계공학과 및 동 대학원 졸업(공학석사). 1982년~현재 국방품질관리소 선임연구원. 1994년~현재 부산대학교 기계공학과 대학원 박사과정 재학중. 관심분야는 견실제어 및 모델규명.

황 이 철

1961년 10월 28일생. 1987년 부산대학교 기계설계공학과 졸업(공학사). 1991년 동 대학원 기계설계공학과 졸업(공학석사). 1996년 일본 오사카대학교 전자제어기계공학과 박사). 1986년~1988년 삼성중공업 플랜트 사업부 근무. 1996년~1998년 부산대학교 기계공학부 국책교수 근무. 1998년 3월~현재 동의대학교 기계·산업시스템공학부 교수. 관심분야는 견실제어 및 모델규명 이론과 응용, 무한차원 시스템의 모델 근사화 및 제어, 프로세스 제어.

이 만 형

1946년 10월 18일생. 1969년 부산대학교 전기공학과 졸업(공학사). 1971년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학석사). 1983년 오리건 주립대학교 전기·컴퓨터공학과 졸업(공학박사). 1975년~현재 부산대학교 기계공학부 교수, POSCO 석좌교수. 관심분야는 데카트로닉스, 확률제어, 견실제어 이론 및 응용, 랜덤 프로세스 및 파라미터 추정기법, ITS.