

# 원판내 고유치 배정 조건을 갖는 불확정성 선형 시스템의 $H_\infty$ 제어기 설계

論 文

49D-9-4

## Design of $H_\infty$ Control for Uncertain Linear Systems with Eigenvalue Assignment Constraint in a Disk

馬 三 善\* · 金 鎮 勳\*\*

(Sam-Sun Ma · Jin-Hoon Kim)

**Abstract** - This paper deals with the design of  $H_\infty$  control for uncertain linear systems with the regional eigenvalue assignment constraint. The considered region is a disk in the left half plane and the two types of time-varying uncertainties are considered. We presents a state feedback control that minimize the  $L_2$  gain from the disturbance to the measured output as well as it guarantees that all eigenvalues of closed loop are inside a disk. The state feedback control is obtained by checking the feasibility of linear matrix inequalities(LMI's) which are numerically tractable. Finally, we give an example to show the applicability and usefulness of our results.

**Key Words** :  $H_\infty$  Control, Eigenvalue Assignment, Uncertainty, Disk, LMI

### 1. 서 론

선형 시불변 시스템의 극점(pole)은 시스템의 안정성뿐만 아니라 시스템의 동적 특성과 밀접한 관계가 있으므로, 페루프 시스템의 극점을 원하는 위치에 위치하도록 하는 극점배치는 제어 이론에서 중요한 주제 중의 하나이다. 또한 제어 가능한 시스템의 경우 페루프 시스템의 극점을 원하는 곳에 배정하도록 하는 제어기를 항상 구할 수 있음은 잘 알려진 사실이다. 그러나 시스템에 잘 알려지지 않은 불확정성이 있는 경우 극점을 원하는 곳에 엄밀히 위치하도록 하는 것이 불가능하므로, 적당한 영역을 설정하여 불확정성에도 불구하고 모든 극점이 이 영역 내에 존재하도록 하는 영역 극점 배치가 필요하게 되어 많은 연구가 진행중이다[3,5-7]. 여기서 대상으로 하는 영역으로는 원판(disk)[1,5,6], 부채꼴(sector)[2,4], 원뿔(conic sector)[7], 타원(ellipse)[4], 수직 띠(vertical strip)[7], 환형(corona)[3] 등이 대표적이다. 극점의 영역 배정에 있어 Furuta[1]와 Haddad[4]는 불확정성이 없는 선형시스템의 극점배치 해석과 극점배치 제어기 설계를 다루었고, Juang [2]과 Rachid[3]는 섭동 즉 시불변(time-invariant) 불확정성이 있는 선형시스템에 대한 영역 극점배치문제를 다루었다. 잘 알려진 바와 같이 시스템이 시불변이면 페루프 시스템의 극점(pole)은 이 페루프 시스템의 고유치(eigenvalue)와 동일하나 시스템이 시변이면 더 이상 극점의 개념은 없으며

고 고유치의 개념만이 남게된다. 만약 대상으로 하는 시스템이 선형 시불변 시스템임에도 여기에 시변 불확정성이 존재하는 경우에 이 페루프 시스템의 성능은 시변 불확정성을 고려한 전체 시스템의 고유치와 밀접한 관계가 있으리라 생각하는 것은 자연스러운 것이다. 이러한 이유로 불확정성이 시변인 경우 페루프 시스템의 고유치를 정하여진 영역에 위치하도록 하는 제어기의 설계가 요구되어 진다. 이러한 시변 불확정성에 대한 영역 극점 배치를 다룬 대표적인 결과로는 Garcia[5]에 의한 시스템 행렬에만 불확정성이 존재할 때의 영역 극점 배치 해석과 Moheimani[6]에 의한 시스템 행렬뿐만 아니라 입력 행렬에도 불확정성이 존재할 때의 영역 극점 배치 해석 및 설계를 들 수 있다.

그러나 지금까지의 영역 극점 배치의 대부분의 결과들은 행렬이나 스칼라들의 파라미터에 의존하는 이산 Riccati 형식의 행렬식으로 표현되어있고, 이들 파라미터를 일반적으로 찾는 방법이 없어 시행착오 방법으로 구하여야하는 부담이 있어 사용에 한계가 있었다. 다음으로 우리는 극점을 정하여진 영역에 배치하도록 하는 제어기가 존재한다면 유일한 것이 아니고 많이 존재하게 되는 것이 일반적이라는 사실에 주목을 하여, 이러한 여유도를 줄이기 위해 외란으로부터 측정대상 출력까지의  $L_2$ 이득이 최소가 되도록 하는  $H_\infty$  제어기 설계 방법의 도입이 필요하게 된다. 즉, 시변 불확정성을 가지는 선형 시스템의 모든 고유치가 원하는 영역에 존재하면서 외란으로부터 측정대상 출력까지의  $L_2$  이득이 최소가 되도록 하는  $H_\infty$  제어기를 설계하고자 한다.

본 논문에서,  $(\cdot)^T$ 는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)를 의미하고  $(\cdot)^{-1}$ 은 역행렬을 나타낸다. 대칭(symmetric) 행렬  $X, Y \in R^{n \times n}$ 에 대하여  $X > Y$  또는  $X \geq Y$ 는 각

\* 正 會 員 : 韓 電 力 研 究 院 先 任 研 究 員

\*\* 正 會 員 : 忠 北 大 工 大 制 御 計 測 工 學 科 副 教 授 · 工 博  
接 受 日 字 : 2000年 5月 24日  
最 終 完 了 : 2000年 8月 28日

행렬  $(X - Y)$  가 양확정(positive definite) 또는 준양확정(semi-definite) 행렬임을 나타낸다. 그리고  $\lambda_{\max}(\cdot)$ 는 대칭행렬의 최대 고유치를 의미하고,  $I_n$ 은  $n \times n$ 항등(identity)행렬이다. 끝으로,  $\|\cdot\|$ 는 Euclidean 벡터 노름을 의미하며, 연속적인 벡터  $w(t)$ 에 대한  $l_2$ 노름은

$$\|w(t)\|_2 := \left( \int_0^\infty w^T(\tau)w(\tau)d\tau \right)^{1/2} \quad \text{으로}$$

정의된다.

### 2. 문제기술 및 예비 결과

다음으로 기술되는 시변 불확정성을 갖는 선형 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_\infty x(t) + D_\infty w(t), \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $x(t) \in R^n$ 은 상태를 나타내고,  $u(t) \in R^m$ 은 제어를 나타내며,  $z \in R^p$ 는 측정된 출력이고,  $w(t) \in R^r$ 는 외란을 나타낸다. 또한,  $A, B, B_2, C_\infty, D_\infty$ 는 적당한 차수를 가진 상수행렬들이다. 불확정성  $\Delta A(t), \Delta B(t)$ 는 여러 가지 형태가 있을 수 있으나 여기서는 다음의 2가지만 고려한다.

$$\Delta A(t) = DF(t)E_1, \Delta B(t) = DF(t)E_2; F^T(t)F(t) \leq I \quad (2)$$

$$\Delta A(t) = DF(t)E_1, \Delta B(t) \in [B^- \ B^+] \quad (3)$$

여기서  $D, E_1, E_2, B^-, B^+$ 는 적당한 차원을 가진 상수행렬들이다. 특히, 불확정성 (2)은 정합조건(matching condition)을 만족하는 불확정성이고, (3)은 정합 조건을 만족하지 않는 불확정이다.

다음의 상태 궤환제어기를

$$u(t) = Kx(t) \quad (4)$$

불확정성 선형시스템 (1)에 인가하면 다음과 같은 폐루프 시스템을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A + \Delta A(t) + BK + \Delta B(t)K]x(t) + B_2 w(t) \\ z(t) &= C_\infty x(t) + D_\infty w(t), \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

본 논문의 주요목적은 다음의 두가지를 동시에 만족하도록 하는 상태 궤환 제어기 (4)를 구하는 것이다.

i) 폐루프 시스템의 고유치 (즉, 행렬  $A + \Delta A(t) + BK + \Delta B(t)K$ 의 고유치)가 모든 시간에 대하여 그림 1과 같은 원판 영역  $D(-a, \rho)$  내에 위치한다.

$$D(-a, \rho) := \{z \in R^n : |z + a| < \rho, \rho < a\} \quad (6)$$

ii) 외란  $w$ 로부터 출력  $z$ 까지의  $L_2$  이득이 최소가 되도록 한다.

다음의 보조정리들은 주요결과의 증명에 이용되는 정리들이다.

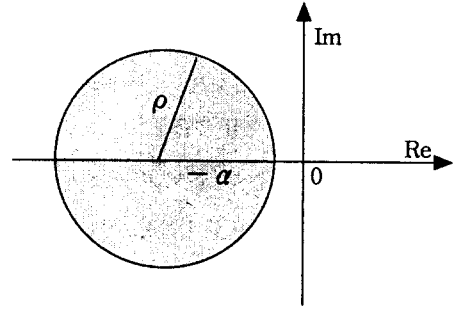


그림 1 원판  $D(-a, \rho)$   
Figure 1 A disk  $D(-a, \rho)$

보조정리 1 [8] : 임의의 대칭 행렬  $X$ 와  $Y$ 에 대하여 다음의 두 선형 행렬 부등식(LMI) i), ii)는 동치(equivalent)이다.

$$\begin{aligned} \text{i)} & \begin{bmatrix} X & S \\ S^T & Y \end{bmatrix} > 0, \\ \text{ii)} & Y > 0, \quad X - SY^{-1}S^T > 0. \end{aligned}$$

보조정리 2 : 다음과 같은 시변 선형시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B_2 w(t) \\ z(t) &= C_\infty x(t) + D_\infty w(t), \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

만약 다음을 만족하는 양확정행렬  $P = P^T > 0$ 가 존재하면

$$\begin{aligned} \text{i)} & [A(t)P + aP]^T P^{-1} [A(t)P + aP] - \rho^2 P < 0 \\ \text{ii)} & A(t)P + PA(t)^T + PC_\infty^T C_\infty P \\ & + (B_2 + PC_\infty^T D_\infty)(\gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty)^{-1} (B_2 + PC_\infty^T D_\infty)^T < 0, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

각 시간에서 행렬  $A(t)$ 의 모든 고유치는 규정된 원판  $D(-a, \rho)$ 에 위치하며,  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$ 이득은  $\gamma$ 와 같거나 적게된다. 즉,  $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma$ 이다.

증명: 참고문헌 [9]에 의해 다음을 만족하는 행렬  $Q = Q^T > 0$ 가 존재할 때

$$[A(t) + aI]^T Q [A(t) + aI] - \rho^2 Q < 0$$

모든 고유치가 원판  $D(-a, \rho)$ 에 위치하고, 이는 다음과 동치이다.

$$[A(t)Q^{-1} + aQ^{-1}]^T Q [A(t)Q^{-1} + aQ^{-1}] - \rho^2 Q^{-1} < 0$$

여기서  $Q^{-1} = P > 0$ 라 하면 조건 i)이 된다. 즉, 조건 i)를 만족하면 (7)의 모든 고유치가  $D(-a, \rho)$ 내 위치하게 되는 것이다. 그리고 다음을 만족하는

$$V(x) = x^T Q x; \quad Q = P^{-1} > 0 \text{이 존재하면}$$

$$\frac{dV(x)}{dt} + z^T z - \gamma^2 w^T w < 0$$

$w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$  이득이  $\gamma$ 보다 적거나 같게 된다.

그런데 다음에서

$$\frac{dV(x)}{dt} + z^T z - \gamma^2 w^T w$$

$$= [x^T P^{-1} : w^T] \begin{bmatrix} A(t)P + PA^T + PC_\infty^T C_\infty & B_2 + PC_\infty^T D_\infty \\ B_2^T + D_\infty^T C_\infty P & D_\infty^T D_\infty - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1}x \\ w \end{bmatrix}$$

조건 ii)와 보조정리 1을 적용하면

$$\frac{dV(x)}{dt} + z^T z - \gamma^2 w^T w < 0$$

가 된다. 따라서, 조건 ii)를 만족하는 행렬  $Q > 0$ 가 존재하면  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$  이득이  $\gamma$ 보다 적거나 같게 된다. 따라서 조건 (i)과 (ii)를 동시에 만족하는 행렬  $P > 0$ 가 존재하면 모든 극점은  $D(-\alpha, \rho)$ 에 존재하면서  $\frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \leq \gamma$  이다. 이것으로 증명을 마친다.

**Remark 1:** 시스템 (7)에서 유한한  $\gamma$ 에 대하여  $\frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \leq \gamma$ 이 성립하면 위의 보조정리 2의 증명 과정에서 알 수 있듯이 페루프 시스템은 당연히 안정하다.

**보조정리 3 [5] :** 행렬  $P = P^T > 0$ 와 양의 상수  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 > 0$ 에 대하여,  $\|F(t)\| \leq 1$ 일 때, 다음과 같은 행렬부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \text{i) } & [A + DF(t)E]P + P[A + DF(t)E]^T \\ & \leq AP + PA^T + \frac{1}{\epsilon_1} PE^T EP + \epsilon_1 DD^T \\ \text{ii) } & [A + DF(t)E]P[A + DF(t)E]^T \\ & \leq APA^T + APE^T(\epsilon_2 I - EPE^T)^{-1}EPA^T + \epsilon_2 DD^T. \\ \text{iii) } & [A + DF(t)E]P^{-1}[A + DF(t)E]^T \\ & \leq A(P - \epsilon_3 E^T E)^{-1}A^T + \frac{1}{\epsilon_3} DD^T \end{aligned}$$

여기서  $\epsilon_2 I - EPE^T > 0$ 이며  $P - \epsilon_3 E^T E > 0$ 이다.

**보조정리 4 :** 행렬  $X = \sum_{i=1}^N r_i X_i$ ;  $X_i = X_i^T, r_i \geq 0$ 라 하자. 만일  $X_i < 0, i = 1, 2, \dots, N$ 이면  $X < 0$ 이 된다.

**증명 :** 다음의 관계식으로부터

$$\lambda_{\max}(X) = \lambda_{\max}\left(\sum_{i=1}^N r_i X_i\right) \leq \sum_{i=1}^N r_i \lambda_{\max}(X_i) < 0$$

$X < 0$ 가 성립됨을 알 수 있다.

### 3. 주요 결과

이제부터는 불확정성 (2) 또는 (3)를 갖는 페루프 시스템 (5)의 모든 고유치가  $D(-\alpha, \rho)$ 에 위치하며,  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$  이득이 최소가 되도록 하는  $H_\infty$  제어의 설계에 대한 주요 결과를 보인다. 다음의 정리 1은 불확정성 (2), 그리

고 정리 2는 불확정성 (3)에 대한  $H_\infty$  제어기 설계에 대한 각각의 결과이다.

**정리 1 :** 불확정성 (2)를 가지는 페루프 시스템 (5)를 생각하자. 만일 다음의 LMI를 동시에 만족하는 행렬  $P = P^T \in R^{n \times n} > 0$ 과 행렬  $Y \in R^{m \times n}$ , 그리고 양의 상수  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ 이 존재하면

$$\text{i) } \begin{bmatrix} -P & (E_1 P + E_2 Y)^T & (A_\sigma P + BY)^T \\ (E_1 P + E_2 Y) & -\epsilon_1 I & 0 \\ (A_\sigma P + BY) & 0 & -\rho^2 P + \epsilon_1 DD^T \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$\text{ii) } \begin{bmatrix} \Pi & (E_1 P + E_2 Y)^T & PC_\infty^T & B_2 + PC_\infty^T D_\infty \\ (E_1 P + E_2 Y) & -\epsilon_2 I & 0 & 0 \\ C_\infty P & 0 & -I & 0 \\ (B_2 + PC_\infty^T D_\infty)^T & 0 & 0 & -(\gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty) \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

여기서 편의상  $\Pi = AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \epsilon_2 DD^T$ 로 한다.

다음의 상태제한 제어기는

$$u(t) = Kx(t) : K = YP^{-1} \quad (10)$$

불확정성 (2)를 가지는 페루프 시스템 (5)의 모든 고유치는  $D(-\alpha, \rho)$ 내에 위치함을 보장하고, 또한  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$  이득은  $\gamma$ 와 같거나 작음을 보장한다. 여기서  $A_\sigma = A + aI_n$ 이다.

**증명 :** 먼저, LMI (8)에 보조정리 1을 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (8) & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -P + \frac{1}{\epsilon_1}(E_1 P + E_2 Y)^T(E_1 P + E_2 Y) & (A_\sigma P + BY)^T \\ (A_\sigma P + BY) & -\rho^2 P + \epsilon_1 DD^T \end{bmatrix} < 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\rho^2 P + \epsilon_1 DD^T & (A_\sigma P + BY) \\ (A_\sigma P + BY)^T & -P + \frac{1}{\epsilon_1}(E_1 P + E_2 Y)^T(E_1 P + E_2 Y) \end{bmatrix} < 0 \\ & \Leftrightarrow (A_\sigma P + BY) \left( P - \frac{1}{\epsilon_1}(E_1 P + E_2 Y)^T(E_1 P + E_2 Y) \right)^{-1} (A_\sigma P + BY)^T \\ & \quad + \epsilon_1 DD^T - \rho^2 P < 0 \quad (11) \end{aligned}$$

다음으로, 위의 LMI에 보조정리 3의 iii)을 적용하고,  $Y = KP$ 를 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} (11) & \Rightarrow [A_\sigma P + BY + DF(t)(E_1 P + E_2 Y)]P^{-1}[A_\sigma P + BY + DF(t)(E_1 P + E_2 Y)]^T \\ & \quad - \rho^2 P < 0 \\ & \Leftrightarrow [A_\sigma P + BKP + DF(t)(E_1 + E_2 K)P]P^{-1}[A_\sigma P + BKP + DF(t)(E_1 + E_2 K)P]^T \\ & \quad - \rho^2 P < 0 \\ & \Leftrightarrow [A_\sigma P + BKP + \Delta A(t)P + \Delta B(t)KP]P^{-1}[A_\sigma P + BKP + \Delta A(t)P + \Delta B(t)KP]^T \\ & \quad - \rho^2 P < 0 \end{aligned}$$

따라서, 보조정리 2에 의해 제어 (10)을 가지는 페루프 시스템 (5)의 모든 고유치는  $D(-\alpha, \rho)$ 내에 위치한다.

다음으로 보조정리 1에 의하여 LMI (9)로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} (9) & \Leftrightarrow AP + BY + (AP + BY)^T + \epsilon_2 DD^T + \frac{1}{\epsilon_2}(E_1 P + E_2 Y)^T(E_1 P + E_2 Y) \\ & \quad + PC_\infty^T C_\infty P + (B_2 + PC_\infty^T D_\infty)(\gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty)^{-1}(B_2 + PC_\infty^T D_\infty)^T < 0 \quad (12) \end{aligned}$$

여기에 보조정리 3의 i)을 적용하고,  $Y=KP$ 를 적용하면 다음을 얻는다.

$$(12) \Rightarrow AP + BY + (AP + BY)^T + DF(t)(E_1P + E_2Y) + (E_1P + E_2Y)^T F^T(t)D^T + PC_\infty^T C_\infty P + (B_2 + PC_\infty^T D_\infty)(\gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty)^{-1}(B_2 + PC_\infty^T D_\infty)^T < 0$$

$$\Leftrightarrow [A + BK + DF(t)(E_1 + E_2K)]P + P[A + BK + DF(t)(E_1 + E_2K)]^T + PC_\infty^T C_\infty P + (B_2 + PC_\infty^T D_\infty)(\gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty)^{-1}(B_2 + PC_\infty^T D_\infty)^T < 0$$

$$\Leftrightarrow [A + BK + \Delta A(t) + \Delta B(t)K]P + P[A + BK + \Delta A(t) + \Delta B(t)K]^T + PC_\infty^T C_\infty P + (B_2 + PC_\infty^T D_\infty)(\gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty)^{-1}(B_2 + PC_\infty^T D_\infty)^T < 0$$

따라서, 보조정리 2에 의하여, 상태궤환 제어기 (10)은 페루프 시스템 (5)에서  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$ 이득이  $\gamma$ 보다 적거나 같음을 보장한다. 끝으로 LMI (8)과 (9)를 동시에 만족하는 행렬  $P = P^T \in R^{n \times n} > 0$ 과 행렬  $Y \in R^{m \times n}$ , 그리고 양의 상수  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ 이 존재하면 상태궤환 제어기 (10)은 페루프 시스템 (5)의 모든 고유치는  $D(-\alpha, r)$ 내에 위치함을 보장하고, 또한  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$ 이득은  $\gamma$ 와 같거나 작음을 보장한다. 이것으로 증명을 마친다.  $\triangle \triangle \triangle$

**정리 2 :** 불확정성 (3)을 가지는 페루프 시스템 (5)를 생각하자. 그리고  $H_i: i=1, 2, \dots, M$ 을 구간행렬  $[B^-, B^+]$ 의 꼭지점행렬(vertex matrix)이라 하자. 만약 다음의 LMI를 만족하는 양행렬 행렬  $P = P^T \in R^{n \times n} > 0$ 과 행렬  $Y \in R^{m \times n}$ , 그리고 양의 상수  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ 가 존재하면

$$i) \begin{bmatrix} -P & PE_1^T & (A_\alpha P + BY + H_i Y)^T \\ E_1 P & -\varepsilon_1 I & 0 \\ (A_\alpha P + BY + H_i Y) & 0 & -\rho^2 P + \varepsilon_1 DD^T \end{bmatrix} < 0, \quad i=1, 2, \dots, M \quad (13)$$

$$ii) \begin{bmatrix} \Gamma & PE_1^T & PC_\infty^T & (B_2 + PC_\infty^T D_\infty) \\ E_1 P & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ C_\infty P & 0 & -I & 0 \\ (B_2 + PC_\infty^T D_\infty)^T & 0 & 0 & -(\gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty) \end{bmatrix} < 0, \quad i=1, 2, \dots, M \quad (14)$$

여기서  $\Gamma = (AP + BY + H_i Y) + (AP + BY + H_i Y)^T + \varepsilon_2 DD^T$ 이다.

다음의 상태궤환 제어기는

$$u(t) = Kx(t) : K = YP^{-1} \quad (15)$$

불확정성 (3)을 가지는 페루프 시스템 (5)의 모든 고유치는  $D(-\alpha, r)$ 내에 위치함을 보장하고, 또한  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$ 이득은  $\gamma$ 와 같거나 작음을 보장한다. 여기서  $A_\alpha = A + \alpha I_n$ 이다.

**증명 :** 먼저 불확정성 (3)의 구간 행렬로 주어지는 불확정성  $\Delta B(t) = [B^-, B^+]$ 는 이의 꼭지점행렬  $H_i, i=1, 2, \dots, M$ 을 이용하여 다음으로 표시할 수 있다.

$$\Delta B(t) = \sum_{i=1}^M s_i(t) H_i ; \sum_{i=1}^M s_i(t) = 1, s_i(t) \geq 0 \quad (16)$$

다음으로 보조정리 1을 이용하면 모든  $i=1, 2, \dots, M$ 에서

LMI (13)과 동치인 다음을 얻는다.

$$(13) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -P + \frac{1}{\varepsilon_1} PE_1^T E_1 P & (A_\alpha P + BY + H_i Y)^T \\ (A_\alpha P + BY + H_i Y) & -\rho^2 P + \varepsilon_1 DD^T \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\rho^2 P + \varepsilon_1 DD^T & (A_\alpha P + BY + H_i Y) \\ (A_\alpha P + BY + H_i Y)^T & -P + \frac{1}{\varepsilon_1} PE_1^T E_1 P \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow (A_\alpha P + BY + H_i Y)(P - \frac{1}{\varepsilon_1} PE_1^T E_1 P)^{-1}(A_\alpha P + BY + H_i Y)^T + \varepsilon_1 DD^T - \rho^2 P < 0 \quad (17)$$

여기에 보조정리 2의 ii)를 적용하고,  $\Delta A(t) = DF(t)E_1$ 을 이용하면 다음을 얻는다.

$$(17) \Rightarrow (A_\alpha P + BY + H_i Y + DF(t)E_1 P)P^{-1}(A_\alpha P + BY + H_i Y + DF(t)E_1 P)^T - \rho^2 P < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\rho^2 P & (A_\alpha P + BY + H_i Y + DF(t)E_1 P) \\ (A_\alpha P + BY + H_i Y + DF(t)E_1 P)^T & -P \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\rho^2 P & (A_\alpha P + BY + H_i Y + \Delta A(t)P) \\ (A_\alpha P + BY + H_i Y + \Delta A(t)P)^T & -P \end{bmatrix} < 0$$

$$i=1, 2, \dots, M \quad (18)$$

다음으로,  $\sum_{i=1}^M s_i(t) = 1$ 인 스칼라  $s_i \geq 0, i=1, 2, \dots, M$ 에 대하여 보조정리 4에 의하여 다음이 성립한다.

$$(18) \Rightarrow \sum_{i=1}^M s_i(t) \begin{bmatrix} -\rho^2 P & (A_\alpha P + BY + H_i Y + \Delta A(t)P) \\ (A_\alpha P + BY + H_i Y + \Delta A(t)P)^T & -P \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\rho^2 P & (A_\alpha P + BY + \sum_{i=1}^M s_i(t) H_i Y + \Delta A(t)P) \\ (A_\alpha P + BY + \sum_{i=1}^M s_i(t) H_i Y + \Delta A(t)P)^T & -P \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\rho^2 P & (A_\alpha P + BY + \Delta B(t)Y + \Delta A(t)P) \\ (A_\alpha P + BY + \Delta B(t)Y + \Delta A(t)P)^T & -P \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow [A_\alpha P + BK P + \Delta B K Y + \Delta A(t)P]P^{-1}[A_\alpha P + BY + \Delta B K Y + \Delta A(t)P]^T - \rho^2 P < 0$$

따라서 보조정리 2에 따라 불확정성 (3)을 갖는 시스템 (1)에 제어 (15)를 가하여 얻어진 페루프 시스템 (5)의 모든 고유치는  $D(-\alpha, r)$ 에 위치함을 보장한다.

다음으로, 편의상  $X_{11} = AP + PA^T + BY + Y^T B^T$ 라고 하고, 보조정리 4,  $Y = KP$  그리고 (14)에 의해서 다음을 얻는다.

$$(14) \Rightarrow \sum_{i=1}^M s_i(t) \begin{bmatrix} X_{11} + H_i Y + Y^T H_i^T + \varepsilon_2 DD^T & PE_1^T & PC_\infty^T & B_2 + PC_\infty^T D_\infty \\ E_1 P & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ C_\infty P & 0 & -I & 0 \\ (B_2 + PC_\infty^T D_\infty)^T & 0 & 0 & -(\gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty) \end{bmatrix} < 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_{11} + \sum_{i=1}^M s_i(t) (H_i Y + Y^T H_i^T) + \varepsilon_2 DD^T & PE_1^T & PC_\infty^T & B_2 + PC_\infty^T D_\infty \\ E_1 P & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ C_\infty P & 0 & -I & 0 \\ (B_2 + PC_\infty^T D_\infty)^T & 0 & 0 & -(\gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty) \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow X_{11} + \sum_{i=1}^M s_i(t) (H_i Y + Y^T H_i^T) + \varepsilon_2 DD^T + \frac{1}{\varepsilon_2} PE_1^T E_1 P + PC_\infty^T C_\infty P + (B_2 + PC_\infty^T D_\infty)(\gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty)^{-1}(B_2 + PC_\infty^T D_\infty)^T < 0$$

$$\Rightarrow X_{11} + \sum_{i=1}^M s_i(t) (H_i Y + Y^T H_i^T) + DF(t)E_1 P + PE_1^T F^T(t)D^T + PC_\infty^T C_\infty P + (B_2 + PC_\infty^T D_\infty)(\gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty)^{-1}(B_2 + PC_\infty^T D_\infty)^T < 0$$

$$\Leftrightarrow (A + BK + \sum_{i=1}^M s_i(t) H_i K + DF(t)E_1)P + P(A + BK + \sum_{i=1}^M s_i(t) H_i K + DF(t)E_1)^T + PC_\infty^T C_\infty P + (B_2 + PC_\infty^T D_\infty)(\gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty)^{-1}(B_2 + PC_\infty^T D_\infty)^T < 0$$

$\Rightarrow (A+BK+\Delta B(t)K+\Delta A(t))P+P(A+BK+\Delta B(t)K+\Delta A(t))^T+PC_\infty^T C_\infty P$   
 $+ (B_2+PC_\infty^T D_\infty)(\gamma^2 I-D_\infty^T D_\infty)^{-1}(B_2+PC_\infty^T D_\infty)^T < 0$   
 따라서, 보조정리 2에 의하여, LMI (14)를 만족하는 상태궤환 제어기 (15)는 페루프 시스템 (5)에서  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$ 이득이  $\gamma$ 보다 적거나 같음을 보장한다. 끝으로 LMI (13)과 (14)를 동시에 만족하는 행렬  $P=P^T \in R^{n \times n} > 0$ 과 행렬  $Y \in R^{m \times n}$ , 그리고 양의 상수  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ 이 존재하면 상태궤환 제어기 (10)은 페루프 시스템 (5)의 모든 고유치는  $D(-\alpha, \rho)$ 내에 위치함을 보장하고, 또한  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$  이득은  $\gamma$ 와 같거나 작음을 보장한다. 이것으로 증명을 마친다.  $\triangle \triangle \triangle$

**Remark 2 :** 만일 LMI (9) 또는 LMI (14)를 만족하는 유한한  $\gamma$ 가 존재하면, 불확정성 (2) 또는 (3)을 가지는 페루프( $w(t)=0$ ) 시스템의 안정도를 각각 보장하게 된다.

**Remark 3 :** 불확정성 (2) 또는 (3)을 가지는 페루프 시스템 (5)에서, 페루프 시스템의 모든 고유치가  $D(-\alpha, \rho)$ 에 위치하면서 외란  $w$ 로부터 출력  $z$ 까지의  $L_2$ 이득을 최소로 하는 제어기  $u(t)=Kx(t); K=YP^{-1}$ 는 LMI로 표시된 (8), (9) 또는 (13), (14) 조건을 MATLAB<sup>TM</sup>의 LMI 툴박스를 사용하면 쉽게 구할 수 있다.

4. 수치 예제

주요결과에 대한 유용성과 응용성을 보이기 위하여 불확정성이 있는 다음과 같은 간단한 선형시스템을 고려한다.

$\dot{x}(t)=[A+\Delta A(t)]x(t)+[B+\Delta B(t)]u(t)+B_w w(t)$  (19-1)

$z(t)=C_\infty x(t)+D_\infty w(t), x(0)=0$  (19-2)

여기서 각각의 정규행렬은 다음과 같고

$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, C_\infty=[1 \ 1], D_\infty=0$

불확정성 (2), (3)은 각각 다음과 같이 주어진 경우를 생각하자.

i)  $\Delta A(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F(t) [0.1 \ 0.1], \Delta B(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F(t) 0.01$  (20)

ii)  $\Delta A(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F(t) [0.1 \ 0.1], \Delta B(t) \in \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ -0.01 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \end{bmatrix} \right]$  (21)

다음의 그림 1은 불확정성 (20)을 가지는 시스템 (19)는 정리 1, 불확정성 (21)을 가지는 시스템 (19)에 정리 2를 각각 적용하여, 페루프 시스템의 모든 고유치가  $D(-\alpha, \rho)$ 에 배치되도록 하면서  $L_2$  이득이 최소가 되도록 하는 제어기를 구한 결과 중의 일부로써, 그림에서는 고정된  $\alpha=3$ 에 대한 다양한  $\rho$ 에 따른 최소  $L_2$  이득을 표시한다. 그림에서 보듯이 고정된  $\alpha$ 에 대하여  $\rho$ 가 증가하면  $L_2$  이득  $\gamma$ 는 감소

한다.

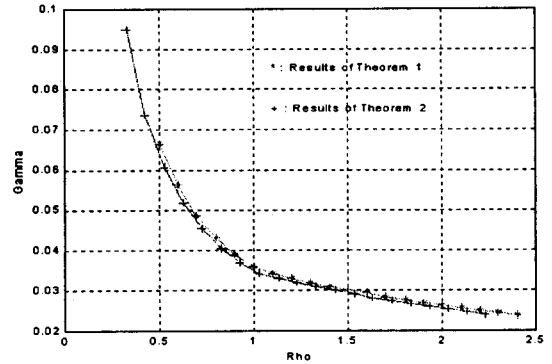


그림 2 원판반지름  $\rho$ 와  $L_2$  이득  $\gamma$ 와의 상관관계  
Fig. 2 The relation between  $\rho$  and  $\gamma$

다음의 표 1은 대표적으로 불확정성 (20)의 경우와 불확정성 (21)의 경우  $\alpha=2, \rho=0.5$ 일 때, 각각 정리 1과 정리 2에 따라 페루프 시스템의 모든 극점이  $D(-\alpha, \rho)$ 에 위치하면서  $L_2$  이득을 최소로 하는 제어기를 구한 결과이다. 관심있는 행렬은 양확정 행렬  $P$ 와 설계된 제어기 행렬  $K$ 이고, 또한 행렬  $A+BK$ 의 고유치와 최소  $L_2$  이득도 제시하였다.

표 1 행렬  $P$ , 제어기 행렬,  $(A+BK)$ 의 고유치

Table 1 Matrix  $P$ , Controller gain  $K$ , Eigenvalue of  $(A+BK)$

항목	정리1 $K$ ( $\alpha=2, \rho=0.8$ )	정리2 ( $\alpha=2, \rho=0.5$ )
양확정행렬 $P$	$\begin{bmatrix} 8.5220 & -11.5630 \\ -11.5630 & 17.6002 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.6202 & -6.3430 \\ -6.3430 & 11.7933 \end{bmatrix}$
제어기 이득 행렬 $K$	$\begin{bmatrix} -4.3069 & -4.9504 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4.6057 & -4.8516 \end{bmatrix}$
$(A+BK)$ 행 렬의 고유치	$\{-1.2041, -2.7462\}$	$\{-1.6047, -2.2469\}$
$L_2$ 이득 $\gamma$	0.0418	0.0734

5. 결 론

본 논문에서는 시변 불확정성을 포함하는 선형 시스템에서 페루프 시스템의 모든 고유치가 원판  $D(-\alpha, \rho)$ 에 존재하면서 외란으로부터 출력까지의  $L_2$ 이득을 최소로 하는 상태궤환 제어기의 설계 방법을 제시하였다. 제어기는 LMI의 만족 여부를 확인함으로써 구하여지는데 이는 잘 알려진 MATLAB

의 LMI 톨을 이용하면 쉽게 확인할 수 있다. 끝으로, 수치 예제를 통하여 제시된 결과의 유용성 및 응용성을 보였다.

참 고 문 헌

[1] K. Furuta and S.B. Kim, "Pole assignment in a specified disk", IEEE Trans. Automat. Contr., vol AC-32, pp.423-427, 1987.

[2] Y. T. Juang, Z. C. Hong and Y. T. Wang, "Lyapunov approach to robust pole-assignment analysis", Int. J. Contr., vol.49, pp.921-927, 1989

[3] A. Rachid, "Robustness of pole assignment in a specified region for perturbed system", Int. J. System Sci., v1o.21, pp.579-585, 1990.

[4] W.M. Haddad and D.S. Bernstein, "Controller design with regional pole constraints", IEEE Trans. Automat. Contr., vol.37, pp.54-69, 1992.

[5] G. Garcia and J. Bernussou, "Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback", IEEE Trans. Automat. Contr., vol.40, pp.184-189, 1995.

[6] S.O.R. Moheimani and I.R. Petersen, "Quadratic guaranteed cost control with robust pole placement", IEE Proc.- Control Theory Appl., vol. 143, pp.37-43, 1996.

[7] M. Chilali and P. Gahinet, " $H_\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach", IEEE Trans. Automat. Contr., vol.41, pp.358-367, 1996.

[8] S. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear matrix inequalities in system and control theory, SIAM, 1994.

[9] 김진훈, "시변 불확정성을 갖는 선형시스템의 강인 극점 배치", Trans. KIEE. Vol.48A. pp.31-35. 1999

저 자 소 개



마 삼 선 (馬 三 善)

1984년 부산대 기계공학과 졸업, 1988년 동대학원 기계공학과(동역학 및 제어전공) 졸업(석사), 충북대 대학원 전기공학과(제어전공) 박사과정 수료, 현재 한전 전력연구원 원전I&C그룹 선임연구원

김 진 훈 (金 鎭 勳)

1961년 10월 18일생. 1985년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1985년~1987년 신영전기 (주) 연구원. 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(석사). 1993년 동 전기 및 전자공학과 졸업(공학). 1993년~1994년 경상대 공대 제어계측공학과 전임강사. 현재 충북대학교 전기전자공학과 조교수