

## Hierarchical Optimal Control of Non-linear Systems using Fast Walsh Transform

鄭 堤 旭\* · 曹 永 鎬\*\* · 任 國 顯\*\*\* · 安 斗 守<sup>§</sup>  
(Je-Wook Chung · Young-Ho Cho · Kook-Hyun Yim · Doo-Soo Ahn)

**Abstract** - This paper presents a new algorithm for hierarchical optimal control of nonlinear systems. The proposed method is simple because the solutions are obtained by only exchanging informations of coefficient vector based on interaction prediction principle and FWT(fast Walsh transform) in upper and lower level. Since we solve two point boundary problem with Picard's iterative method and the backward integral operational matrix of Walsh function to obtain the optimal vector of each independent subsystem, the algorithm is simple and its operation is fast without inverse matrix and kronecker product operation. In simulation, the proposed algorithm's usefulness is proved by comparison with the global optimal control methods.

**Key Words** : FWT(고속 월쉬변환), Hierarchical optimal control(계층별 최적제어), Non-linear system(비선형시스템)

### 1. 서 론

현대 사회가 고도로 산업화됨에 따라 첨단기술이 복합된 시스템들이 운용되기 시작하면서 이들에 포함된 비선형 요소에 대한 정밀한 제어의 필요성이 대두되고 있다. 최근에 비선형 시스템에 대한 이론적인 연구가 많이 이루어지고 있는데 이중 대표적인 것이 시간영역에 바탕을 둔 최적제어 이론이다. 일반적으로 많이 이용되고 있는 비선형계의 최적제어기법은 수치 해석에 바탕을 둔 급경사법(steepest descent), 준선형화법(quasilinearization)등을 들 수 있는데, 이러한 방법들은 어느 한 경계조건으로 제적을 추측해서 해를 구하기 때문에 시스템의 차수가 높은 대규모 시스템의 경우는 높은 차수의 비선형 미분방정식을 동시에 적분해야 하므로 많은 계산량을 필요로 하게 되어 해를 구하기가 매우 어려워진다[1]. 이런 문제점을 해결하기 위해서 계층별 제어이론이 제시되었고, 이론적으로나 실용적으로 많은 성과를 거두었다. 이 중 가장 많이 이용되고 있는 계층별 제어 방법은 상호예측원리를 이용해서 조정자 변수를 조정하는 방법인데 이 기법은 선형 또는 비선형 대규모 시스템에 많이 응용되어 왔다[2-5].

1980년대 Singh과 Hassan은 상호 예측원리를 이용한 계층별 제어이론을 비선형 대규모 시스템에 확장시킨 2계층

상호상태(two-level costate coordination)기법을 제시하였다[5]. 2계층 상호상태 기법은 선형항과 비선형항을 분리하여 비선형 항만을 조정자에서 조정하는 형태이므로 비선형 대규모 시스템의 최적제어에 효과적인 것으로 알려져 있다. 그러나 2계층 상호상태 기법을 이용하기 위해서는 각각의 독립적인 부 시스템들에서 2점 경계치 문제를 해결해야 하는 문제점을 갖는다.

1973년 Corrington에 의해 월쉬함수(Walsh functions)의 적분을 처리하기 위한 적분 연산행렬이 도입된 이후 시스템 해석 및 제어기 설계 문제에 월쉬함수가 널리 이용되기 시작하였다. 그러나 기존에 많이 이용되던 월쉬함수 유한급수 전개를 이용한 선형계의 제어문제는 월쉬함수의 전개항수가 커지면 그에 상응하여 크로네커곱(kronecker product formula)에 의해 필연적으로 수반되는 고차 행렬의 반복 연산 및 역행렬을 구해야 하는 단점을 갖고 있었다[6-8]. 그 후 이런 문제점을 개선하기 위해서 월쉬함수 단일항 전개(STWS: single term Walsh series) 방법이 제시되었으나, STWS 기법은 월쉬함수의 제1항만을 이용하는데 모든 직교함수들의 제 1항은 같기 때문에 단일항만을 이용할 때는 직교함수의 종류에 관계없이 방법 및 결과가 서로 동일하게 되어 월쉬함수의 고유특성을 살릴 수 없었다.

본 연구에서는 고속 월쉬변환(fast Walsh transform)과 Picard의 반복 연산법을 이용한 상태벡터의 반복적인 수정을 통하여 해를 구함으로써 월쉬함수의 고유특성을 유지하면서 비선형계의 2계층 최적 제어문제를 해결할 수 있는 알고리즘을 제시하였다. 즉, 상위계층에서는 고속 월쉬변환에 의한 계수벡터의 단순한 치환연산만을 이용하였고, 하위계층의 독립적인 부시스템들에서는 Picard의 반복 연산법에 고속월쉬변환을 이용함으로써 기존의 직교함수를 이용한 최적

\* 正 會 員 : (株)광명制御 研究所 先任 研究員  
 \*\* 正 會 員 : 成均館大 電氣電子컴퓨터工學部 博士修了  
 \*\*\* 正 會 員 : LG 이노텍(주) 先任 研究員  
 § 正 會 員 : 成均館大 電氣電子컴퓨터工學部 教授 · 工博  
 接受日字 : 1999年 11月 8日  
 最終完了 : 2000年 7月 24日

제어 알고리즘에 동반되는 고차원의 역행렬 반복계산 및 크로네커곱 문제를 해결하였다.

### 2. 고속 월쉬변환(Fast Walsh Transform)

월쉬함수는 세가지의 그룹으로 분류되는데, 시퀀시(Sequency)배열, 팰리(Paley)배열, 하다마드(Hadamard)배열로 나뉜다. 본 연구에서 이용하는 시퀀시 배열 월쉬함수는 단위 시간당 영점 교차수의 증가 순서로 배열되며, Rademacher함수의 연속적인 곱으로 표현된다. 그리고 적분 가능한 임의의 함수  $x(t)$ 는 구간  $[0, T]$ 에서 월쉬함수로 다음과 같이 표현된다[7-8][11].

$$x(t) \approx \sum_{n=0}^{m-1} X_n \text{Wal}(n, t) = X \text{Wal}(t) \quad (2.1)$$

$$X_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \text{Wal}(n, t) dt \quad (2.2)$$

단,  $X$ 는  $X_n$ 로 구성되는  $n \times m$  계수행렬,  $\text{Wal}(t)$ 는  $\text{Wal}(n, t)$ 로 구성된  $m$ 벡터,  $\text{Wal}(n, t)$ 는  $n$ 번째 월쉬함수이다.

또한 적분 연산행렬과 역적분 연산행렬을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$P = \begin{bmatrix} P_{m/2} & -\frac{1}{2m} R_{m/2} \\ \frac{1}{2m} R_{m/2} & 0_{m/2} \end{bmatrix}, \quad P_1 = 1/2 \quad (2.3)$$

$$P_{inv} = \begin{bmatrix} P_{m/2} & -\frac{1}{2m} R_{m/2} \\ \frac{1}{2m} R_{m/2} & 0_{m/2} \end{bmatrix}, \quad P_1 = -1/2 \quad (2.4)$$

단,  $m$ 은 월쉬함수 전개항수이고  $P, R$ 은 정방행렬이며  $R$ 은 역대각 단위행렬이다.

위의 식(2.3)과 식(2.4)의 적분 연산행렬들은 미적분방정식을 대수방정식으로 변환하는 중요한 역할을 수행한다.

$i$ 번째 세부구간에서  $x(t)$ 의 평균값을  $x_i$ 라고 하면 식(2.1)과 식(2.2)는 다음과 같이 표현될 수 있다[8].

$$x_i = \sum_{n=0}^{m-1} \text{Wal}(i, n) X_n, \quad (i=0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (2.5)$$

$$X_n = \sum_{i=0}^{m-1} \text{Wal}(n, i) x_i \frac{1}{m}, \quad (n=0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (2.6)$$

위 식에서  $\text{Wal}(n, i)$ 는  $n$ 번째 월쉬함수에 대한  $i$ 번째 세부구간의 값을 나타낸다. 식(2.5)를 이산 월쉬 역변환이라 하며 식(2.6)을 이산 월쉬변환이라 한다. 또한 고속 월쉬변환과 역변환은 다음과 같다[8].

$$\text{Wal}(n, i) = \prod_{r=1}^n (-1)^{n_r \cdot (i_{r-1} + i_r)} \quad (2.7)$$

단  $i, n = 0, 1, 2, \dots, m-1$

여기서  $i_r$ 과  $n_r$ 은 각각  $i$ 와  $n$ 을 2진수로 표시할 때  $r$ 번째 비트값을 의미한다.

$$X_n = \frac{1}{m} \prod_{r=1}^n \sum_{i_{r-1}=0}^{1} (-1)^{n_r \cdot (i_{r-1} + i_r)} x_{(i_{r-1}, \dots, i_0)} \quad (2.8)$$

### 3. 비선형계의 계층별 최적제어

다음의 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (3.1)$$

단,  $x(t) \in R^n$ ,  $n$ 차 상태 벡터

$u(t) \in R^m$ ,  $m$ 차 제어 벡터

최소화할 평가함수는 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\|x(t)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2) dt \quad (3.2)$$

단,  $Q \geq 0, R > 0$  인 가중행렬이다.

식(3.1)의 비선형시스템의 평형점은 원점으로 가정하고, 테일러 급수로 전개한 후 2차항 이상의 고차항을 무시하고 선형화 행렬  $A^*, B^*$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$A^* \triangleq \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x(t), u(t)=0}, \quad B^* \triangleq \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{x(t), u(t)=0} \quad (3.3)$$

Hassan과 Singh은 위의 최적제어 문제가 식(3.4)~식(3.7)로 표현되는 최적제어 문제와 동가임을 밝혔다[2-3].

시스템의 상태방정식은

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D(x, u, t) \quad (3.4)$$

$$x(t_0) = x_0$$

단,  $A, B$ 는  $A^*, B^*$ 의 블록대각 행렬

$$D(x, u, t) = f(x, u, t) - Ax(t) - Bu(t)$$

부가적인 구속조건은 다음과 같이 주어진다.

$$x(t) = x^o(t) \quad (3.5)$$

$$u(t) = u^o(t) \quad (3.6)$$

또한 평가함수는 다음과 같다.

$$\text{Min} J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ \|x\|_Q^2 + \|u\|_R^2 + \|x - x^o\|_S^2 + \|u - u^o\|_H^2 \} dt \quad (3.7)$$

여기서  $Q, R, S, H$ 은  $N$ 개의 부시스템에 상응하는 블록대각 행렬이다.

Singh과 Hassan은 이 알고리즘의 수렴조건이 최적화구간의 길이,  $Q, R, S, H$  행렬에 영향을 받음을 밝혔고, 만약  $R$ 행렬의 원소들이 크고 최적화 구간이 짧으면 이 알고리즘은 수렴함을 증명하였다. 또한 수렴되는 최적화 구간을 증가시켜도  $H$ 와  $S$ 행렬을 조작함으로써 수렴시킬 수 있음을 보였다[1].

앞의 변형된 최적화 문제의 필요조건 식들로부터 상위계층의 조정법칙은 다음과 같이 주어진다.

$$x^o(t) = x(t) \quad (3.8)$$

$$u^o(t) = u(t) \quad (3.9)$$

$$\Pi(t) = -S(x(t) - x^o(t)) + \left\{ \left[ \frac{\partial f^T}{\partial x(t)} \right]_{x=x^o, u=u^o} - A^T \right\} \cdot \lambda(t) \quad (3.10)$$

$$\beta(t) = -H(u(t) - u^o(t)) + \left\{ \left[ \frac{\partial f^T}{\partial u(t)} \right]_{x=x^o, u=u^o} - B^T \right\} \cdot \lambda(t) \quad (3.11)$$

단,  $\Pi(t) \in R^n$ ,  $n$ 차 라그랑제 승수(Lagrange multipliers)

$\beta(t) \in R^m$ ,  $m$ 차 라그랑제 승수

식(3.4)의 비대각 항인  $D(x, u, t)$ 는 식(3.8), 식(3.9)로 고정되었으므로 전체 시스템의 최적화 문제는  $N$ (부시스템의 개수)개의 독립적인 최소화 문제로 분할할 수 있고 임의의  $i$ 번째 부시스템의 경우 최적화 문제는 다음으로 요약할 수 있다.

$$u_i(t) = -(R_i + H_i)^{-1} [B_i^T \lambda(t) - H_i u_i^o(t) + \beta_i(t)] \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & A_i x_i(t) - B_i (R_i + H_i)^{-1} B_i^T \lambda_i(t) \\ & + B_i (R_i + H_i)^{-1} [H_i u_i^o(t) - \beta_i(t)] \quad (3.13) \\ & + D_i(x_i^o, u_i^o, t) \end{aligned}$$

$$x_i(t_0) = x_{i0}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i(t) = & -(Q_i + S_i) x_i(t) - A_i^T \lambda_i(t) \\ & + S_i x_i^o(t) - \Pi_i(t) \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$\lambda_i(t_f) = 0$$

단,  $x_i(t)$  :  $i$  번째 부시스템의 상태벡터

$u_i(t)$  :  $i$  번째 부시스템의 제어벡터

$\lambda_i(t)$  :  $i$  번째 부시스템의 상호 상태벡터

상위단 조정자는  $L$  반복구간에서 부시스템으로부터 취합된  $x, u, \lambda$ 의 값들을  $L+1$  반복구간에서 순차적으로 대입하므로 조정법칙이 간단하고, 하위단에서는  $N$ 개의 독립적인 부시스템에 대한 낮은 차수의 최적화 문제를 해결하면 되므로 계산량이 매우 감소하는 장점을 갖는다[1][4].

#### 4. FWT를 이용한 비선형 시스템의 계층별 최적제어

본 연구에서는 비선형계의 계층별 최적제어를 위해 상위계층, 하위계층에 고속 윌쉬변환을 적용하여 계수벡터의 반복 연산만으로 비선형 계층별 최적제어를 수행하는 알고리즘을 제시하였다. 상위, 하위계층에 FWT를 적용하는 과정을 유도하면 다음과 같다.

##### 4.1 FWT 이용한 상위계층의 조정법칙

식(3.8), (3.9)으로 주어지는 상위계층 조정법칙 ( $x^o(t), x(t), u^o(t), u(t)$ )을 각각 윌쉬함수로 전개하면 다음과 같다.

$$x(t) = X Wal(t) \quad (4.1)$$

$$x^o(t) = X^o Wal(t) \quad (4.2)$$

$$u(t) = U Wal(t) \quad (4.3)$$

$$u^o(t) = U^o Wal(t) \quad (4.4)$$

$X, X^o, U, U^o$ 는 윌쉬함수 전개시의 계수행렬이고,  $Wal(t)$ 는  $m$ 개의 윌쉬함수로 구성되는  $m$ 차 윌쉬벡터를 나타낸다.

식(4.1)~(4.4)에 의해 식(3.8), (3.9)은 윌쉬함수로 변환된 형

태를 얻을 수 있다.

$$X^o = X \quad (4.5)$$

$$U^o = U \quad (4.6)$$

여기서  $X^o, U^o$ 의 값은  $L+1$ 번째 반복구간의 비선형항을 고정시키는데 이용된다. 또한 상위계층의 조정법칙인  $\beta(t), \Pi(t)$ 를 얻기 위하여 각각을 윌쉬함수로 전개하면 다음과 같다.

$$\beta(t) = \hat{B} Wal(t) \quad (4.7)$$

$$\Pi(t) = \hat{P} Wal(t) \quad (4.8)$$

$$\lambda(t) = \Lambda Wal(t) \quad (4.9)$$

식(3.10)의 [ ] 부분을 윌쉬함수로 전개하기 위해서 다음과 같은 함수들을 정의한다.

$$\left[ \frac{\partial f^T}{\partial x} \right]_{x=x^o, u=u^o} \triangleq \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{m1}(t) & f_{m2}(t) & \dots & f_{mn}(t) \end{bmatrix} \triangleq F(t) \quad (4.10)$$

$$\hat{F}_{xi} Wal(t) = F_{xi}(t) \triangleq F(t) \lambda(t) \quad (4.11)$$

식(3.11)의 [ ] 부분을 윌쉬함수로 전개하기 위해서 다음과 같은 함수들을 정의한다.

$$\left[ \frac{\partial f^T}{\partial u} \right]_{x=x^o, u=u^o} \triangleq \begin{bmatrix} e_{11}(t) & e_{12}(t) & \dots & e_{1n}(t) \\ e_{21}(t) & e_{22}(t) & \dots & e_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e_{m1}(t) & e_{m2}(t) & \dots & e_{mn}(t) \end{bmatrix} \triangleq E(t) \quad (4.12)$$

$$\hat{E}_{xi} Wal(t) = E_{xi}(t) \triangleq E(t) \lambda(t) \quad (4.13)$$

그러므로 윌쉬함수로 변환된 조정법칙을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[\hat{P}]^{L+1} = [-S(X - X^o) + (\hat{F}_{xi} - A^T \Lambda)]^L \quad (4.14)$$

$$[\hat{B}]^{L+1} = [-H(U - U^o) + (\hat{E}_{xi} - B^T \Lambda)]^L \quad (4.15)$$

식(4.14), (4.15)에서 알 수 있듯이  $L+1$ 번째 반복구간의  $\hat{P}$ 와  $\hat{B}$ 의 계수 벡터들은 바로 전 단계의 계수 값들의 단순한 대입만으로 얻을 수 있으므로 조정자의 조정법칙이 간단함을 알 수 있다.

##### 4.2 FWT를 이용한 부시스템의 최적제어

상위계층에서 얻어진  $X^o, U^o, \hat{B}, \hat{P}$ 을 이용해  $N$ 개의 독립된 부시스템의 해를 구하기 위해서 변형된 표준형 방정식과 상태천이행렬 특성에 윌쉬함수를 적용해 간단한 대수 방정식으로 바꿔 상위계층에 필요한 정보들 ( $x(t), u(t), \lambda(t)$ )을 얻을 수 있다. 단, 부시스템을 의미하는 첨자  $i$ 를 표기상 간편을 위해 생략하고 전개한다.

식(3.12)~(3.14)를 이용해  $i$ 번째 부시스템의 2점경계치문제(TPBVP)를 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\text{단, } L = \begin{bmatrix} A & -B(R+H)^{-1}B^T \\ -(Q+S) & -A^T \end{bmatrix}$$

$$w(t) = B(R+H)^{-1} [Hu^o(t) - \beta(t)] + D(x^o(t), u^o(t), t)$$

$$z(t) = Sx^o(t) - \Pi(t)$$

식(4.16)의 경계조건은 다음과 같다.

$$x(t_0) = x_0$$

$$\lambda(t_f) = 0$$
(4.17)

식(4.16)의 해를 구하기 위해서 상태전이행렬을 다음과 같이 정의하자.

$$\Phi(t_f, t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t_f, t) & \Phi_{12}(t_f, t) \\ \Phi_{21}(t_f, t) & \Phi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix}$$
(4.18)

이 상태전이 행렬의 특성은 다음과 같다.

$$\dot{\Phi}(t_f, t) = -\Phi(t_f, t)L$$
(4.19)

$$\Phi(t_f, t_f) = I$$
(4.20)

식(4.16)의 해를 구하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ \lambda(t_f) \end{bmatrix} = \Phi(t_f, t) \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}$$
(4.21)

$$\text{단, } \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} \triangleq \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \tau) \begin{bmatrix} w(\tau) \\ z(\tau) \end{bmatrix} d\tau$$
(4.22)

식(4.17)의 경계조건과 식(4.21)에 의해 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\lambda(t) = -\Phi_{22}^{-1}(t_f, t) \Phi_{21}(t_f, t) x(t) - \Phi_{22}^{-1}(t_f, t) g_2(t)$$
(4.23)

$$\dot{x}(t) = v(t) x(t) + k(t)$$
(4.24)

단,

$$v(t) = A + B(R+H)^{-1} B^T \Phi_{22}^{-1}(t_f, t) \Phi_{21}(t_f, t)$$

$$k(t) = w(t) + B(R+H)^{-1} B^T \Phi_{22}^{-1}(t_f, t) g_2(t)$$
(4.25)

또한 최적제어입력은 식(3.12)에서와 같이 표현된다.

이제 식(4.19)의 해를 얻기 위해  $\Phi(t_f, t)$ 을 월쉬함수로 전개하면 다음과 같다.

$$\Phi(t_f, t) = \Psi Wal(t)$$
(4.26)

$$\text{단, } \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix}$$

식(4.19)에 양변을 전치(transpose)하여 적분하면 다음과 같다.

$$\Phi^T(t_f, t) = I - \int_t^{t_f} L^T \Phi^T(t_f, \tau) d\tau$$
(4.27)

식(4.27)에 Picard 반복연산을 적용한 후 월쉬함수로 전개하면

$$\Psi^k Wal(t) = I Wal(t) - \int_t^{t_f} L^T \Psi^{k-1} Wal(\tau) d\tau$$
(4.28)

$$\text{단, } k = 1, 2, \dots \quad \Psi^0 Wal(t) = I$$

이고,  $k$ 는 Picard의 반복횟수다. 역적분 연산행렬  $P_{inv}$ 을 도입하면 다음과 같은 대수 방정식을 얻을 수 있다.

$$\Psi^k = I - L^T \Psi^{k-1} P_{inv}$$
(4.29)

위의 대수방정식으로부터  $\Psi^k$ 를 구할 수 있다. 그런데 역적

분 연산행렬  $P_{inv}$ 가 많은 0요소를 가지고 있으므로 이러한 특성을 이용하면 식(4.29)는 다음과 같이 이루어진다.

1)  $i=0$ 인 경우

$$\Psi_i^k = \Psi_{00} + \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^{j+1}} (L^T \Psi_{2^j-1}^{k-1})$$
(4.30)

2)  $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$  (단,  $n=1, \dots, p-1$ )인 경우

$$\Psi_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} [L^T \Psi_{2^n-1-i}^{k-1}] + \sum_{j=n+1}^k \frac{1}{2^{j+1}} (L^T \Psi_{2^j-1-i}^{k-1})$$
(4.31)

3)  $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$  (단,  $n=p$ )인 경우

$$\Psi_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} [L^T \Psi_{2^n-1-i}^{k-1}]$$
(4.32)

$\Psi^k$ 로부터 고속월쉬역변환을 이용하여  $\Phi^k(t_f, t)$ 를 구하고 다음과 같은 오차가 0으로 수렴할 때까지 위의 과정을 반복 수행한다.

$$e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi^k(t_f, t) - \Phi^{k-1}(t_f, t)\|$$
(4.33)

오차가 0으로 수렴하면  $\Phi^k(t_f, t)$ 는 식(4.19)의 해인  $\Phi(t_f, t)$ 이 된다[12].

식(4.16), 식(4.22), 식(4.25)에서  $w(t), z(t), g_2(t), v(t), k(t)$ 를 각각 월쉬함수로 전개하면 다음과 같다.

$$w(t) = M Wal(t)$$
(4.34)

$$z(t) = N Wal(t)$$
(4.35)

$$g_2(t) = G_2 Wal(t)$$
(4.36)

$$v(t) = \hat{F} Wal(t)$$
(4.37)

$$k(t) = \hat{K} Wal(t)$$
(4.38)

$$\text{식(4.22)에서 } \begin{bmatrix} \Phi_w(t) \triangleq \Phi_{21}(t_f, t) w(t) \\ \Phi_z(t) \triangleq \Phi_{22}(t_f, t) z(t) \end{bmatrix} \text{라 새로운 함수}$$

를 정의하고 월쉬함수로 전개하면

$$\Phi_w(t) = \Psi_w Wal(t)$$
(4.39)

$$\Phi_z(t) = \Psi_z Wal(t)$$
(4.40)

이고, 식(4.22)는 다음과 같은 대수방정식으로 변환된다.

$$G_2 = \int_t^{t_f} [\Psi_w + \Psi_z] d\tau = -(\Psi_w + \Psi_z) P_{inv}$$
(4.41)

$$\text{식(4.23)에서 } \begin{bmatrix} \Phi_p(t) \triangleq -\Phi_{22}^{-1}(t_f, t) \Phi_{21}(t_f, t) \\ \Phi_g(t) \triangleq -\Phi_{22}^{-1}(t_f, t) g_2(t) \end{bmatrix} \text{라 새}$$

로운 함수를 정의하고 월쉬함수로 전개하면

$$\Phi_p(t_f, t) = \Psi_p Wal(t)$$
(4.42)

$$\Phi_g(t_f, t) = \Psi_g Wal(t)$$

이고, 식(4.25)는 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\hat{F} = A + B R^{-1} B^T \Psi_p$$
(4.43)

$$\hat{K} = M + B R^{-1} B^T \Psi_g$$

식(4.24)에서  $v_x(t) \triangleq v(t) x(t)$ 라 하고 월쉬함수로 전개하면

$$v_x(t) = \hat{F}_x Wal(t) \quad (4.44)$$

이된다. 식(4.24)을 새로 정의된 함수를 이용하여 쓰면 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = v_x(t) + k(t) \quad (4.45)$$

양변을 적분하면

$$x(t) = x_0 + \int_0^t [v_x(\tau) + k(\tau)] d\tau \quad (4.46)$$

이고, Picard 반복연산을 적용한 후 월쉬함수로 전개하면 다음을 얻을 수 있다.

$$X^k Wal(t) = X_0 Wal(t) + \int_0^t (\hat{F}_x^{k-1} + \hat{K}^{k-1}) Wal(\tau) d\tau \quad (4.47)$$

단,  $k = 1, 2, \dots$

적분연산행렬  $P$ 을 도입하면 식(4.47)은 다음과 같이 된다.

$$X^k = X_0 - (\hat{F}_x^{k-1} + \hat{K}^{k-1}) P \quad (4.48)$$

식(4.47)에서 적분연산행렬  $P$ 는 많은 0요소를 가지고 있으므로 이러한 특성을 이용하면 다음과 같이  $X^k$ 를 구할 수 있다.

1)  $i=0$ 인 경우

$$X_i^k = X_{00} + \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^{j+1}} \hat{F}_x^{k-1} + \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^{j+1}} \hat{K}^{k-1} \quad (4.49)$$

2)  $i = 2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ (단,  $n=1, \dots, p-1$ )인 경우

$$X_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} [\hat{F}_x^{k-1} + \hat{K}^{k-1}] + \sum_{j=n+1}^k \frac{1}{2^{j+1}} [\hat{F}_x^{k-1} + \hat{K}^{k-1}] \quad (4.50)$$

3)  $i = 2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ (단,  $n=p$ )인 경우

$$X_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} [\hat{F}_x^{k-1} + \hat{K}^{k-1}] \quad (4.51)$$

$X^k$ 로부터 고속월쉬역변환을 이용하여  $x^k(t)$ 를 구하고 다음과 같은 오차가 0으로 수렴할 때까지 위의 과정을 반복한다.

$$e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k(t) - x^{k-1}(t)\| \quad (4.52)$$

위 오차가 0으로 수렴될 때의  $x^k(t)$ 가 식(4.45)의 해가 된다[12]. 식(4.23)에서  $\Phi_x(t) \triangleq \Phi_{22}^{-1}(t_f, t) \Phi_{21}(t_f, t) x(t)$ 라 하고 월쉬함수로 전개하면

$$\Phi_x(t) = \Psi_x Wal(t) \quad (4.53)$$

과 같이 된다. 그러므로 식(4.23)의 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A = -(\Psi_x + \Psi_g) \quad (4.54)$$

식(3.12)로부터 제어입력에 대한 계수값은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$U = -(R + H)^{-1} [B^T A - H U^0 + \hat{B}] \quad (4.55)$$

식(4.48), 식(4.55) 그리고 식(4.55)로부터 상위계층에 필요한 정보와 잠정적인 최적제어 벡터를 구할 수 있다.

그런데 각 부시스템이 잠정적인 최적제어 입력이 전체 시

스템의 최적제어 입력인가를 확인하기 위해서 오차 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$E_x = \left[ \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^m \{ (X_j)_j^{L+1} - (X_j)_j^L \}^T \{ (X_j)_j^{L+1} - (X_j)_j^L \} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$E_{\Pi} = \left[ \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^m \{ (\Pi_j)_j^{L+1} - (\Pi_j)_j^L \}^T \{ (\Pi_j)_j^{L+1} - (\Pi_j)_j^L \} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.56)$$

$$E = \frac{E_x + E_{\Pi}}{m} \quad (4.57)$$

단,  $i$  :  $i$ 번째 부시스템,  $j$  :  $j$ 번째 구간

$L+1$  :  $L$ 의 다음 단계

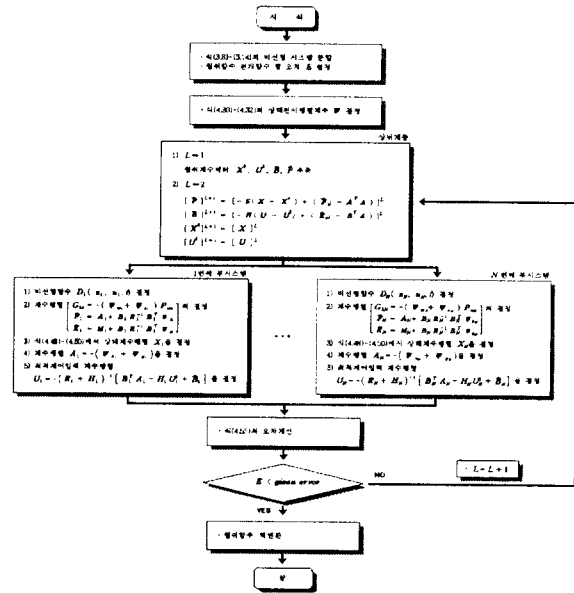


그림 1 제안한 알고리즘 순서도

Fig. 1 Flow chart of proposed algorithm

그림 1은 고속 월쉬변환을 이용한 비선형 대규모 시스템의 계층별 최적제어 기법의 순서도를 나타냈는데 각각의 계층에서 월쉬함수 계수벡터들의 대수연산만을 이용하였으므로 알고리즘이 간단함을 알 수 있다.

### 5. 시뮬레이션 및 고찰

Mukhopad에 의해 모델링된 무한 모선에 연결된 동기기 (Synchronous machine)의 비선형 시스템을 고려해 보자 [5][10].

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t)$$

$$\dot{y}_2(t) = 39.1892 - 0.2703 y_2(t) + 12.012 y_3(t) \sin y_1(t) + 24.024 \sin 2y_1(t)$$

$$\dot{y}_3(t) = u_1(t) - 0.3222 y_3(t) + 1.9 \cos y_1(t) \quad (5.1)$$

여기서,  $y_1$  : 회전자변위 [radians]  
 $y_2$  : 회전자속도 [rad/sec]  
 $y_3$  : 쇄교자속 [ $\Psi$ ]  
 $u_1$  : 동기기 계자전압 [ $v_f$ ]

식(5.1)의 구속조건하에 최소화 할 평가함수는 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \{ (y_1 - 0.7461)^2 + y_2^2 + (y_3 - 7.7438)^2 + 100(u_1 - 1.1)^2 \} dt \quad (5.2)$$

식(5.1)의 시스템의 평형점과 초기치는 다음과 같다.

$$y_e = [ 0.7461 \quad 0.0 \quad 7.7438 ]^T$$

$$u_e = 1.1 \quad (5.3)$$

$$y_0 = [ 0.6461 \quad 0.0 \quad 7.7438 ]^T$$

$y - y_e = x$ ,  $u_1 - u_e = u$ 로 정의하고 선형화된 행렬을 대각 행렬과 비대각 행렬로 분할하면 식(5.1)은 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + \{ f(x + y_e, u_e, t) - A x(t) \} \quad (5.4)$$

단,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -64.5348 & -0.2703 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3222 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

N개의 부시스템으로 분할하기 위해 비대각 비선형 부분을 상위계층에서 추측된  $x = x^o$ 을 이용해  $D(x^o, t)$ 을 정의하면 식(5.4)을 간단히 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + D(x^o, t) \quad (5.5)$$

또한, 식(5.2)의 평가함수는 다음과 같이 변형될 수 있는데

$Q, R, S$ 행렬은 시행 착오법에 의해 선정하였다.

$$\tilde{J} = \frac{1}{2} \int_0^T ( \|x(t)\|_{Q}^2 + \|u(t)\|_{R}^2 + \|(x(t) - x^o(t))\|_{S}^2 ) dt \quad (5.6)$$

단,  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $R = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$ ,  $S = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$

식(5.5), (5.6)을 2차와 1차 2개의 부시스템으로 분할하면 다음과 같다.

◎ 1번째 부시스템

$$\dot{x}_{s_1}(t) = A_{s_1} x_{s_1}(t) + B_{s_1} u_{s_1}(t) + D_{s_1}(x^o, t)$$

$$\tilde{J}_1 = \frac{1}{2} \int_0^T ( \|x_{s_1}(t)\|_{Q_{s_1}}^2 + \|u_{s_1}(t)\|_{R_{s_1}}^2 + \|(x_{s_1}(t) - x_{s_1}^o(t))\|_{S_{s_1}}^2 ) dt$$

단,  $Q_{s_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $R_{s_1} = 100$ ,  $S_{s_1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$

◎ 2번째 부시스템

$$\dot{x}_{s_2}(t) = A_{s_2} x_{s_2}(t) + B_{s_2} u_{s_2}(t) + D_{s_2}(x^o, t)$$

$$\tilde{J}_2 = \frac{1}{2} \int_0^T ( \|x_{s_2}(t)\|_{Q_{s_2}}^2 + \|u_{s_2}(t)\|_{R_{s_2}}^2 + \|(x_{s_2}(t) - x_{s_2}^o(t))\|_{S_{s_2}}^2 ) dt$$

단,  $Q_{s_2} = [1]$ ,  $R_{s_2} = 100$ ,  $S_{s_2} = [0.1]$

본 연구에서는 2개로 분할된 시스템에 윌쉬함수 전개함수(m)는 64항, 오차는  $E = 1.0 \times 10^{-3}$ 로 설정하여 시뮬레이션을 수행하였다. 그림 2~그림 4은 기존의 통합제어에 많이 이용되었던 준선형화법에 의한 결과와 본 연구 방법에 의해 얻어진 결과를 비교하였다. 그림에서 알 수 있듯이

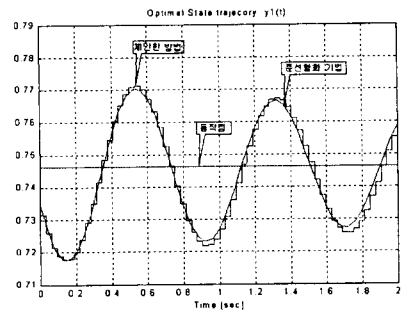


그림 2 최적상태  $y_1(t)$  의 비교  
Fig. 2 Comparison of optimal state  $y_1(t)$

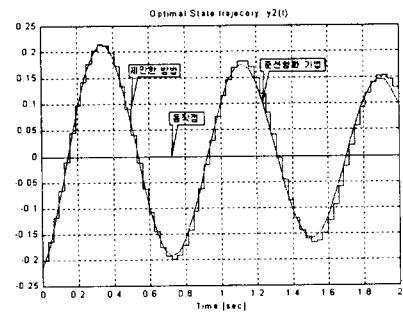


그림 3 최적 상태  $y_2(t)$  의 비교  
Fig. 3 Comparison of optimal state  $y_2(t)$

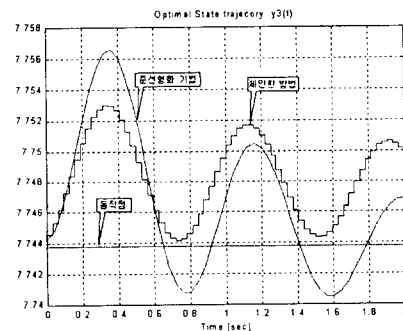


그림 4 최적 상태  $y_3(t)$  의 비교  
Fig. 4 Comparison of optimal state  $y_3(t)$

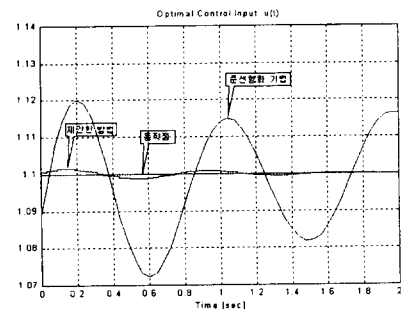


그림 5 최적 제어  $u(t)$  의 비교  
Fig. 5 Comparison of optimal control  $u(t)$

$y_3(t)$  와  $u(t)$  는 본 연구방법의 추종성능이 개선됨을 알 수 있다. 준선형화법은 최적의 해를 구하기 위해서 어느 한 경계조건으로 시스템의 상태와 상호상태(costate)의 궤적을 추측하여 구하는데 시스템의 상태는 제어 시스템 대상의 특성을 고려하여 추측할 수 있으나 상호상태의 궤적은 추측하기가 매우 어려운 것으로 알려져 있다. 표 1은 오차의 수렴 정도를 나타낸 것이다. 6번의 반복 수행에 원하는 오차값에 수렴됨을 알 수 있다.

표 1 오차의 수렴정도

Table 1 Convergence of error

반복 횟수	1	2	3	4	5	6
오차 값	0.756 E-01	0.220 E-02	0.650 E-02	0.240 E-2	0.440 E-02	0.325 E-03

Chen과 Hsiao에 제시된 알고리즘을 부시스템에 적용하였을 경우 연산량과 본 논문에서 제시된 방법을 이용하여 계산하였을 경우 연산량을 표 2에서 비교하였다. 표 2에서 보듯이 제안한 방법은 역행렬 연산이 수행되지 않음을 알 수 있다. 그러므로 역행렬의 존재조건에 의해 매 샘플 구간마다 제한이 있었던 기존의 알고리즘의 문제를 해결할 수 있음을 알 수 있다.

표 2 연산량 비교

Table 2 The computation comparison

	기존의 방법[7]	제안한 방법
월쉬변환	$m \times m$ 가감산 연산	$m \times \log m$ 가감산 연산
부시스템의 상태궤적 계산	매 샘플구간 마다 $2mn \times 2mn$ 역행렬 연산	역행렬 연산 없음
상태천이행렬 계산	매 샘플구간 마다 $4mn \times 4mn$ 역행렬 연산	역행렬 연산 없음

6. 결 론

본 연구에서는 FWT를 이용하여 새로운 비선형 계층별 최적제어 알고리즘을 제안했는데 얻어진 결론은 다음과 같다.

- (1) 제안된 알고리즘은 상호 예측원리를 기반으로 상위, 하위계층에 고속 월쉬변환을 취해 상위계층은 단순히 고속 월쉬변환에 의한 계수대입 연산이, 하위계층은 여러 개의 부시스템의 대수연산의 최적제어로 이루어 지기때문에 기존의 수치해석법에 비해 연산이 간단하고 계수 벡터들의 정보교환으로 전체 비선형시스템의 최적제어를 구현할 수 있다.
- (2) 시뮬레이션에서는 기존의 통합제어에 이용되어 왔던 준선형화법과 제안된 알고리즘을 비교해 본 결과 거의 일

치하고 있기 때문에 본 연구의 유용성을 입증할 수 있었다.

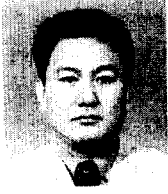
- (3) 일반적인 직교함수 방법은 많은 고차의 역행렬 연산이 필요하지만 본 연구방법에서는 이러한 역행렬의 연산이 필요없기 때문에 계층별 최적 제어문제를 보다 빠르고 쉽게 해결할 수 있다.

이상에서 얻어진 결론을 전력시스템, 수처리 시스템과 같은 비선형 대규모시스템에 적용한다면 빠르고 간단하게 최적제어를 수행할 수 있을 것으로 생각되며 평가함수를 덧셈의 형태로 분할할 수 없는 경우의 최적제어 문제는 향후 연구하고자 한다.

참 고 문 헌

- [1] M. F. Hassan and M. G. Singh, " Hierarchical Successive Approximation Algorithms for Non-linear Systems. Part I. Generalisation of the Method of Takahara ", Large Scale Systems, VOL. 2 , pp. 65-79, 1981.
- [2] M. F. Hassan and M. G. Singh, " Hierarchical Successive Approximation Algorithms for Non-linear Systems. Part II. Algorithms Based on Costate Coordination ", Large Scale Systems, VOL. 2, pp. 81-95, 1981.
- [3] 이한석, 조영호, 이명규, 안두수, "블리펄스 함수에 의한 비선형계 2계층 최적제어", 대한전기학회논문지, 제47권, 제4호, pp. 494-502, 1998.
- [4] N.J.Smith and A.P.Sage., "An introduction to hierarchical systems theory", COMP & ELECT. ENG., VOL. 1, pp. 55-71, 1973.
- [5] M. G. Singh and A. Titli, Systems : Decomposition, Optimisation and Control, Pergamon Press, 1978.
- [6] S. C. Tsay and T. T. Lee, "Analysis and Optimal Control of Linear Time-varying Systems via General Orthogonal Polynomials", Int. J. System Science, Vol. 18, No. 8, pp. 1579-1594, 1987.
- [7] C. F. Chen and C. H. Hsiao. "Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Control via Walsh Function", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 20, No. 5, pp. 596-602, 1975.
- [8] 이명규, "고속월쉬변환에 의한 선형시변계의 해석 및 최적제어를 위한 새로운 접근방법", 제47권, 제1호, pp. 75-82, 1998.
- [9] W. K. Pratt, "Transform Image Coding", Proc. IEEE, Vol. 57, pp. 58-68, 1969.
- [10] A. Ghandakly and P. Idowu, " Design of a Model Reference Adaptive Stabilizer for the Exciter and Governor Loops of Power Generators", IEEE Transactions on Power Systems, VOL. 5, NO. 3, pp. 887-893, 1990.
- [11] 안두수, Walsh함수와 시스템 제어, 복두출판사, 2000
- [12] Kreysig, Advanced engineering mathematics, Wiley, 1993

저 자 소 개



정 제 옥 (鄭 堤 旭)

1965년 8월 20일생. 1988년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전기공학과 졸업. 1999년 동 대학원 전기전자 컴퓨터 공학부 박사수료. 1990년~ 현재 (주)광명제어 선임 및 책임 연구원

Tel : 02-460-2280, Fax : 02-465-2700

E-mail : jewook@vitzrocom.com



임 국 현 (任 國 顯)

1968년 3월 12일생. 1992년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1999년 동 대학원 전기 전자컴퓨터공학부 박사과정 수료. 1991~1999년 (주)태산정밀 연구소 연구원. 1999년~현재 LG 이노텍(주) 연구소 선임연구원

Tel : 031-288-9215, Fax : 031-285-0199

E-mail : khyim@lginnotek.com



조 영 호 (曹 永 鎬)

1973년 8월 1일생. 1996년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전기공학과 졸업. 2000년 동 대학원 전기전자 컴퓨터공학부 박사수료. 현재 (주)광명제어 연구원

Tel : 0331-290-7167, Fax : 0331-290-7101

E-mail : choyh@ece.skku.ac.kr



안 두 수 (安 斗 守)

1937년 6월 9일생. 1960년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1991년~1992년 당학회 부회장 역임. 1997~1998년 Univ. of British Columbia 교환교수. 현재 성균관대 공대 전기전자 및 컴퓨터공학부 교수

Tel : 0331-290-7167, Fax : 0331-290-7101

E-mail : dsahn@nature.skku.ac.kr