

$H_\infty$  Controller Design of Linear Systems with Saturating Actuators

趙 炫 徹\* · 金 鎮 勳\*\*  
(Hyeon-Cheol Cho · Jin-Hoon Kim)

**Abstract** - In practical applications, we frequently encounter the actuator nonlinearity in control systems, and its representative nonlinearity is saturation. A controller designed without considering this saturation nonlinearity is often a source of degradation of performance. To treat the saturation nonlinearity more efficiently, we adopt the multiplicative decomposition and the additive decomposition. Based on these decompositions, we present two controller design methods in the LMI(Linear Matrix Inequality) form that guarantee the  $L_2$  gain, from the disturbance to the measured output, is less than or equal to a given value. Finally, we give two examples to show the applicability and usefulness of our results.

**Key Words** : Actuator saturation, Design,  $H_\infty$  control, Decomposition, LMI form

1. 서 론

제어 시스템에서 구동기는 필수적이며, 대부분의 구동기는 입력 값에 무관하게 일정한 출력이 나오는 포화 특성을 가진다. 이러한 포화 구동기를 갖는 선형 시스템에 관한 기존 연구들을 살펴보면[1]-[3], Popov의 안정성 정리에 의해서 포화 구동기를 갖는 선형 시스템의 안정성 문제를 다루었고[1], 비선형 구간과 Bellman의 정리를 이용하여 포화 구동기를 갖는 시스템의 안정성에 대한 충분 조건이 유도되었다[2],[3].

강인제어의 핵심이 되는 분야 중의 한 가지인  $H_\infty$  제어에 관한 기존 연구들을 살펴보면[4],[5], 두 개의 대수 Riccati 방정식을 기초로 하여 상태공간에서  $H_\infty$  제어기를 설계하는 방법을 제안되었고[4], 선형 행렬 부등식을 바탕으로 출력 궤환을 이용한  $H_\infty$  제어기가 설계되었다[5].

그리고, 최근에는 포화 구동기를 포함한 시스템에 대한  $H_\infty$  제어기 설계가 이뤄지고 있는데 이에 대한 기존 연구를 살펴보면[6]-[10], 비선형 구동기 포화가 있는 강인  $H_\infty$  상태 궤환 제어기의 안정성을 Lure system과 Lyapunov 함수를 통하여 증명하였으나, 수식이 복잡하게 표현되었고

[6],[7], 포화 함수가 있는 시스템에 대하여  $H_\infty$  제어기의 feasibility에 대한 충분 조건을 LMI에 의하여 표현하였으나, 꼭지점(vertex) 행렬을 사용하여 시스템이 커지면 많은 수의 LMI 식이 필요하게 된다[8]-[10]. 이러한 연구 배경 하에 본 논문에서는 수식 표현이 덜 복잡하고 적은 수의 LMI 식으로 포화 구동기를 갖는 시스템에의  $H_\infty$  제어기 설계, 즉, 외란(disturbance)으로부터 출력까지의  $H_\infty$  노음이 주어진 값 이하 또는 같도록 하는 제어기를 설계하는 문제를 다룬다. 일반적인 포화 특성과 그 비선형성인 포화 특성을 효과적으로 다루기 위하여 곱 분해 접근법 (Multiplicative Decomposition Approach)과 합 분해 접근법 (Additive Decomposition Approach)을 사용하였다[11]. 제어기는 강인 제어의 핵심이 되는 분야 중의 한 가지인  $H_\infty$  제어이론을 바탕으로 얻어진 LMI 조건들을 만족하는 해를 구하면 곧바로 얻어지게 되며, 또한, 이들 조건은 MATLAB™을 이용하면 쉽게 확인된다. 마지막으로 수치 예제를 통해 제시된 결과의 유용성을 보인다.

이 논문에서는  $|\cdot|$ 는 절대치를  $\|\cdot\|$ 는  $L_2$  노음을 의미한다. 또한,  $\lambda_{\max}(\cdot)$ 는 대칭(symmetric)행렬의 최대 고유치(maximum eigenvalue)이고 두 개의 대칭행렬  $V, W \in R^{n \times n}$ 에 대하여  $V < W$  또는  $V \leq W$ 는 각각 행렬  $W - V$ 가 양확정(positive definite), 준양확정(semi positive definite)행렬임을 나타낸다. 끝으로,  $I$ 는 적당한 차수의 항등(identity)행렬이다.

\* 準 會 員 : 忠 北 大 大 學 院 制 御 計 測 工 學 科 碩 士  
 \*\* 正 會 員 : 忠 北 大 工 大 制 御 計 測 工 學 科 副 教 授 · 工 博  
 接 受 日 字 : 1999年 10月 22日  
 最 終 完 了 : 2000年 3月 13日

2. 문제 기술 및 예비결과

다음으로 기술되는 포화 구동기를 갖는 선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 \text{Sat}(u(t)) + B_2 w(t) \\ z(x) &= Cx(t), \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $x(t) \in R^n$ 는 상태이고,  $u(t) \in R^m$ 는 제어를 나타내며,  $z(t) \in R^p$ 는 출력, 그리고, 외란은  $w^T w \leq w_{\max}^2$ 을 만족한다. 또한,  $\text{Sat}(u) = [\text{sat}(u_1), \text{sat}(u_2), \dots, \text{sat}(u_m)]^T$ 이며,

$$\text{sat}(u_i) = \begin{cases} u_i^{\lim}, & \text{if } u_i > u_i^{\lim} \\ u_i, & \text{if } |u_i| \leq u_i^{\lim} \\ -u_i^{\lim}, & \text{if } u_i < -u_i^{\lim} \end{cases} \quad (2)$$

,  $i = 1, 2, \dots, m$

로 주어진다.

본 논문에서는 외란  $w$ 로부터 출력  $z$ 까지  $L_2$  이득이 주어진  $\gamma > 0$ 보다 크지 않음을 보장하는, 즉,  $\frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \leq \gamma$ , 다음의 상태 제한 제어기

$$u(t) = -Kx(t) \quad (3)$$

를 설계하는 것을 주요 목적으로 한다. 여기서,  $\|w(t)\|_2^2 = \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt$ 이다.

또한, 앞으로의 편의를 위하여, 다음의 집합  $\Omega$ 를 정의하자.

$$\Omega := \{x \in R^n : x^T Q^{-1} x \leq w_{\max}^2\} \quad (4)$$

여기서,  $Q = Q^T > 0$ 이다.

다음의 보조정리들은 앞으로 제시되는 주요 결과의 증명에 사용된다.

**보조정리 1[12]:** 임의의 행렬  $S$ 와 대칭 행렬  $Q, R$ 에 대하여 다음은 동치이다.

- i)  $R > 0, \quad Q - SR^{-1}S^T > 0$
- ii)  $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0$

**보조정리 2[13]:** 임의의 두 행렬  $X, Y$ 와  $S > 0$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T S^{-1} X + Y^T S Y$$

**보조정리 3:** 행렬  $S \in R^{n \times n}, T = T^T \in R^{m \times m}$ 이고,  $X = \{x_{ij}\} = \{x_{ij} \in [x_{ij}^-, x_{ij}^+]\}$ 인  $X \in R^{n \times n}$ 는 구간(interval) 행렬이라 하자. 그리고,  $X_i, i = 1, 2, \dots, N$ 는  $X$ 의 꼭지점(vertex) 행렬이라 하고, 다음이 성립한다고 하자.

$$\begin{bmatrix} X_i + X_i^T & S \\ S^T & T \end{bmatrix} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

그러면, 다음이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} X + X^T & S \\ S^T & T \end{bmatrix} \leq 0$$

**증명:** 꼭지점 행렬의 성질에 의하여,  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0$

이라 하면, 모든 행렬  $X$ 는  $X = \sum_{i=1}^N \alpha_i X_i$ 으로 쓸 수 있다. 따라서, 다음이 된다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X + X^T & S \\ S^T & T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \alpha_i (X_i + X_i^T) & S \\ S^T & T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \alpha_i (X_i + X_i^T) & \sum_{i=1}^N \alpha_i S \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i S^T & \sum_{i=1}^N \alpha_i T \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \begin{bmatrix} X_i + X_i^T & S \\ S^T & T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

또한,  $A, B$ 가 대칭행렬이라면 다음이 성립하므로

$$\lambda_{\max}(A + B) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B)$$

위로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} \begin{bmatrix} X + X^T & S \\ S^T & T \end{bmatrix} &= \lambda_{\max} \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \begin{bmatrix} (X_i + X_i^T) & S \\ S^T & T \end{bmatrix} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_{\max} \begin{bmatrix} (X_i + X_i^T) & S \\ S^T & T \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned}$$



**보조정리 4:** 다음의 선형 시스템을 생각하자.

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad w^T w \leq w_{\max}^2$$

1)  $w^T w \leq w_{\max}^2$ 이라 하자. 만약,  $V(x) \geq w_{\max}^2$ 인 영역에서 항상  $\dot{V}(x) < 0$ 이 되게 하는 2차 함수(quadratic

function)  $V(\xi) = \xi^T Q^{-1} \xi$ ,  $Q > 0$ 가 존재한다면, 식 (4)에 정의된 집합  $\Omega$ 는 위의 시스템의 해  $x$ 의 reachable set이다. 즉,  $x(0) = 0$ 일 때, 위 시스템의 해  $x$ 의 궤적은 항상  $\Omega$ 내에 존재한다. 또한, 위 조건들은 S-procedure[7]를 이용하면 다음으로 표현된다.

$$\frac{dV(x)}{dt} + \alpha V(x) - \alpha w^T w \leq 0 \quad (5)$$

2) 다음 조건을 만족하는 2차 함수(quadratic function)  $V(\xi) = \xi^T Q^{-1} \xi$ ,  $Q > 0$ 가 존재한다면,

$$\frac{dV(x)}{dt} + z^T z - \gamma^2 w^T w \leq 0 \quad (6)$$

외란  $w$ 로부터 출력  $z$ 까지의  $L_2$  이득은  $\gamma$ 보다 크지 않게 된다.

**증명:** 2)는 참고문헌[7]에 의해서 알 수 있으므로 여기서는 1)에서 식 (5)를 만족하면  $\Omega$ 는  $x$ 의 reachable set임을 보인다. 조건  $w^T w \leq w_{\max}^2$ 을 이용하여, 조건 (5)를 다시 쓰면 다음이 되어

$$\frac{dV(x)}{dt} + \alpha V(x) \leq \alpha w^T w \leq \alpha w_{\max}^2$$

$\frac{dV(x)}{dt} + \alpha V(x) = \alpha w_{\max}^2 - a(t)$ 을 만족하는  $a(t) \geq 0$ 가 존재한다. 다음으로 이의 해를 구하면, 다음을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T Q^{-1} x = (1 - e^{-at}) w_{\max}^2 - e^{-at} * a(t) \\ &\leq (1 - e^{-at}) w_{\max}^2 \leq w_{\max}^2 \end{aligned}$$

여기서,  $e^{-at} > 0$ 이고  $a(t) \geq 0$ 이므로  $e^{-at} * a(t) \geq 0$ 이다. 따라서, 식 (5)를 만족하면 집합  $\Omega$ 는  $x$ 의 reachable set이 된다. 여기서, (\*)는 convolution을 나타낸다.



### 3. 주요 결과

비선형 함수  $Sat(u)$ 을 효과적으로 다루기 위해서 이 비선형 함수를 곱 분해와 합 분해로 분해하여[11] 외란  $w$ 로부터 출력  $z$ 까지의  $L_2$  이득이  $\gamma$ 보다 적게됨을 보장하는 제어를 설계하였다.

#### 3.1 곱 분해 접근법

포화 비선형 함수  $Sat(u)$ 를 좀 더 효과적으로 다루기 위하여 대각 행렬  $\Phi(\cdot)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\Phi = \Phi(x) := \text{Diag}\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)\} \quad (7)$$

여기서,  $\phi_i(\cdot)$ 는 다음으로 주어지고

$$\phi_i = \phi_i(x) = \begin{cases} \frac{\text{sat}(K_i x)}{K_i x}, & \text{if } |K_i x| \neq 0 \\ 1, & \text{기타} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$K_i$ 는 행렬  $K$ 의  $i$ 번째 행(row) 벡터이다. 그러면, 제어기 (3)을 가지는 비선형성 함수  $Sat(u)$ 는 위에서 정의된 행렬  $\Phi(\cdot)$ 을 이용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{Sat}(u(t)) = -\Phi Kx(t); \quad u(t) = -Kx(t) \quad (8)$$

여기서,  $Sat(\cdot)$ 을 행렬  $\Phi(\cdot)$ 과 행렬  $Kx$ 의 곱으로 표시하였으므로, 우리는 이를  $Sat(\cdot)$ 의 곱 분해(Multiplicative decomposition)라 말한다(그림 1 참조).

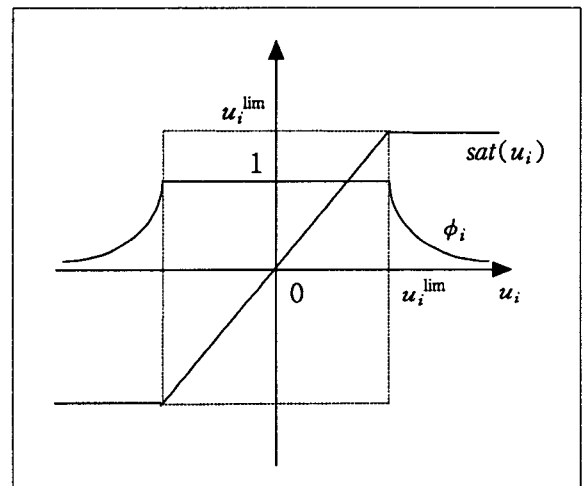


그림 1 곱 분해 함수  $\phi_i$

Fig. 1 Multiplicative decomposition function  $\phi_i$ .

따라서, 제어기 (3)을 가지는 시스템 (1)의 페루프 시스템은 다음으로 기술된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A - B\Phi K]x(t) + B_2 w(t) \\ z(x) &= Cx(t), \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

**보조정리 5:**  $Y_i$ 를  $Y = KQ$ 의  $i$ 번째 행(row) 벡터라 하고, 주어진  $\theta_i \in (0, 1]$ 에 대하여 다음의 LMI가 만족된다고 하자.

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{u_i^{\text{lim}}}{\theta_i \cdot w_{\max}} \right)^2 & Y_i \\ Y_i^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

그러면, 모든  $x \in \Omega$  에서 다음이 성립한다.

$$\min [1, \theta_i] \leq \phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

여기서,  $\phi_i(x)$  는 식 (7)에 정의되어 있다.

**증명:** 위의 LMI로부터 다음을 얻고

$$Y_i Q^{-1} Y_i^T \leq \left( \frac{u_i^{\lim}}{\theta_i \cdot w_{\max}} \right)^2, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

이로부터 다음을 얻는다.

$$\theta_i^2 \leq \left( \frac{u_i^{\lim}}{w_{\max}} \right)^2 / (Y_i Q^{-1} Y_i^T) \quad (11)$$

$$, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

다음으로,  $x \in \Omega$  일 때 스칼라인  $K_i x$ 의 상한(upper bound)을 구한다.  $Q^{-1/2} x = y$ 라 하면 다음이 성립하므로

$$\lambda_{\max}(y y^T) = \lambda_{\max}(y^T y) = y^T y = x^T Q^{-1} x \leq w_{\max}^2$$

다음을 얻게되어

$$\begin{aligned} \|K_i x\|^2 &= |K_i x|^2 = (K_i x)(K_i x)^T = K_i x x^T K_i^T \\ &= K_i Q^{1/2} y y^T Q^{1/2} K_i^T \\ &\leq \lambda_{\max}(y y^T) K_i Q K_i^T \leq K_i Q K_i^T w_{\max}^2 \end{aligned}$$

끝으로, 다음의 관계식을 얻는다.

$$|K_i x| \leq (K_i Q K_i^T)^{1/2} w_{\max} = (Y_i Q^{-1} Y_i^T)^{1/2} w_{\max} \quad (12)$$

$$, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$x \in \Omega$ 에 대하여 다음의 두 가지 경우가 있으므로, 각각의 경우에 대하여  $\phi_i$ 의 바운드를 구한다.

- 경우 1): 포화가 되는 경우, 즉,  $|sat(K_i x)| = u_i^{\lim}$
- 경우 2): 포화가 되지 않는 경우, 즉,  $|sat(K_i x)| = |K_i x|$   
 $, \quad i = 1, 2, \dots, m$

먼저, 경우 1)에서 다음을 얻는다.

$$\phi_i(x) = \frac{sat(K_i x)}{K_i x} = \left| \frac{sat(K_i x)}{K_i x} \right| = \frac{u_i^{\lim}}{|K_i x|}$$

여기에 관계식 (11)과 (12)를 적용하면 다음을 얻는다.

$$\phi_i(x) \geq \frac{u_i^{\lim}}{(Y_i Q^{-1} Y_i^T)^{1/2} w_{\max}} \geq \theta_i \quad (13)$$

다음으로, 경우 2)에서 다음을 얻는다.

$$\phi_i(x) = \frac{sat(K_i x)}{K_i x} = 1 \quad (14)$$

따라서, 결과 (13), (14)와  $\theta_i \in (0, 1]$ 라는 사실을 종합하면, 위의 LMI (10)을 만족하면,  $x \in \Omega$  하에서 다음이 성립한다.

$$\min [1, \theta_i] \leq \phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$



다음의 정리1은 제어기 (3)을 갖는 시스템 (1)에 대하여  $w$ 로부터  $z$ 까지  $L_2$  이득이  $\gamma$ 보다 크지 않음을 보장하는 제어기 (3)을 곱 분해 접근법을 이용하여 구하는 방법에 대한 결과이다.

**정리 1:** 주어진 스칼라  $\theta_i \in (0, 1]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ 에 대하여 다음의 행렬 부등식을 만족하는 행렬  $Q \in R^{n \times n} = Q^T > 0$ ,  $Y \in R^{m \times n}$ 와 스칼라  $\alpha > 0$ 가 존재한다면

i)

$$\begin{bmatrix} QA^T + AQ - B_1 X_i Y - Y^T X_i B_1^T + \alpha Q & B_2 \\ B_2^T & -\alpha I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (15)$$

ii)

$$\begin{bmatrix} QA^T + AQ - B_1 X_i Y - Y^T X_i B_1^T & QC^T & B_2 \\ CQ & -I & 0 \\ B_2^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (16)$$

iii)

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{u_i^{\lim}}{\theta_i \cdot w_{\max}} \right)^2 & Y_i \\ Y_i^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (17)$$

다음의 상태 궤환 제어기

$$u(t) = -Kx(t), \quad K = YQ^{-1} \quad (18)$$

는  $w$ 로부터  $z$ 까지  $L_2$  이득이  $\gamma$ 보다 크지 않게 됨을 보장한다. 여기서,  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ 는  $X = \{x_{ij}\}$ ,  $x_{ij} \in [\theta_i, 1]$ 의 꼭지점(vertex) 행렬이고  $Y_i$ 는 행렬  $Y$ 의  $i$  번째 행(row) 벡터이다.

**증명:** 증명은 i) 조건식 (15)와 (17)을 만족한다면  $w^T w \leq w_{\max}^2$  일 때, 식 (4)에서 정의된  $\Omega$ 가 제어기 (18)을 갖는 시스템 (1)의 해  $x$ 에 대하여 reachable set임을 보인다. ii) 다음으로  $x$ 에 대하여 집합  $\Omega$ 가 reachable set이

면(즉, 조건식 (15)와 (17)을 만족하면), 그리고, 조건식 (16)과 (17)을 만족하는 제어기 (18)이 존재한다면,  $L_2$  이득이 주어진  $\gamma$ 가 보다 크지 않음을 보인다.

i) 먼저, 조건식 (15)와 (17)을 만족한다면  $w^T w \leq w_{\max}^2$  일 때, 식 (4)에서 정의된  $\Omega$ 가 제어기 (18)을 갖는 시스템 (1)의 해  $x$ 에 대하여 reachable set임을 보인다. 이를 위해 먼저, 보조정리 5와 조건식 (17)로부터  $x \in \Omega$ 인 경우,  $\min[1, \theta_i] \leq \phi_i, i=1, 2, \dots, m$ 이고 행렬  $X_i$ 의 정의로부터  $\Phi$ 는  $X_i$ 의 convex hull로써 나타내지는 행렬임을 알 수 있다. 따라서, 조건식 (15)와 보조정리 3에 의하여, 조건식 (15)와 (17)이 성립하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{11} + \alpha Q & B_2 \\ B_2^T & -\alpha I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (19.1)$$

여기서

$$M_{11} = QA^T + AQ - B_1 \Phi Y - Y^T \Phi B_1^T \quad (19.2)$$

이다. 다음으로, 보조정리 4에 의하여, 다음을 만족하는 2차 함수(quadratic function)  $V(\xi) = \xi^T Q^{-1} \xi, Q > 0$ 와 스칼라  $\alpha > 0$ 가 존재한다면

$$f_1(x) = \frac{dV(x)}{dt} + \alpha V(x) - \alpha w^T w \leq 0$$

$\Omega$ 는 reachable set이다. 위의 조건을 제어기 (18)을 갖는 시스템 (1), 즉, 시스템 (9)에 대하여 계산하면 다음이 된다.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^T [(A - B_1 \Phi K)^T Q^{-1} + Q^{-1} (A - B_1 \Phi K) \\ &\quad + \alpha Q^{-1}] x + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \alpha w^T w \\ &= x^T Q^{-1} [Q(A - B_1 \Phi K)^T + (A - B_1 \Phi K) Q \\ &\quad + \alpha Q] Q^{-1} x + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \alpha w^T w \end{aligned}$$

여기서,  $Y = KQ$ 를 이용하고, 벡터-행렬의 형태로 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^T Q^{-1} [QA^T + AQ - B_1 \Phi Y - Y^T \Phi B_1^T \\ &\quad + \alpha Q] Q^{-1} x + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \alpha w^T w \\ &= y^T \begin{bmatrix} M_{11} + \alpha Q & B_2 \\ B_2^T & -\alpha I \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

여기서,  $M_{11}$ 은 (19.2)에 정의된 행렬이다. 여기에 식 (19)를 적용하면,  $f_1(x) \leq 0$ , 즉,  $x \in \Omega$ 임을 알 수 있다. 여기서,  $y^T = [x^T Q^{-1} : w^T]$ 이다. 반대로, 위의 조건식 (15)와 (17)을 만족함에도  $\Omega$ 가 reachable set이 아니라 가정하자. 그러면,  $V(x)$ 의 연속성과  $V(x(0)) = 0$ 에 의하여

$$V(x(t_1)) \leq w_{\max}^2, \quad V(x(t_2)) > w_{\max}^2$$

인 시간  $t_1 < t_2$ 가 존재하여야 하고, 중간치 정리에 의하여  $\dot{V}(x(t^*)) > 0$ 이 되는  $t^*, t_1 < t^* < t_2$ 가  $x \in \Omega$ 에서 존재하여야 한다. 그런데,  $x \in \Omega$ 에서는 항상  $\dot{V}(x) < 0$ 이므로  $\dot{V}(x(t^*)) > 0$ 이 되는  $t^*, t_1 < t^* < t_2$ 가  $x \in \Omega$ 에서 존재하여야 하는데 위배된다. 즉, 위의 조건식 (15)와 (17)을 만족하면 항상  $x \in \Omega$ 이다.

ii) 다음은 조건식 (15), (16), (17)을 동시에 만족하면  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$  이득이  $\gamma$ 보다 크지 않음을 보인다. 위에서 보인 같은 과정으로 조건식 (16)과 (17)을 만족하면

$$\begin{bmatrix} M_{11} & QC^T & B_2 \\ CQ & -I & 0 \\ B_2^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (20)$$

임을 알 수 있다. 여기서  $M_{11}$ 은 (19.2)에 있다. 또한, 보조정리 4에 의하여 다음을 만족하는 2차 함수(quadratic function)  $V(\xi) = \xi^T Q^{-1} \xi, Q > 0$ 와  $\gamma > 0$ 가 존재한다면  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$  이득이  $\gamma$ 보다 크지 않음을 알 수 있다.

$$f_2(x) = \frac{dV(x)}{dt} + z^T z - \gamma^2 w^T w \leq 0$$

제어기 (18)을 가지는 시스템 (1), 즉, 시스템 (9)에 대하여 위의 조건을 계산하면 다음이 된다.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x^T [(A - B_1 \Phi K)^T Q^{-1} + Q^{-1} (A - B_1 \Phi K) \\ &\quad + C^T C] x + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \gamma^2 w^T w \\ &= x^T Q^{-1} [Q(A - B_1 \Phi K)^T + (A - B_1 \Phi K) Q \\ &\quad + QC^T C] Q^{-1} x + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \gamma^2 w^T w \end{aligned}$$

여기서,  $Y = KQ$ 를 이용하고, 벡터-행렬의 형태로 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x^T Q^{-1} [QA^T + AQ - B_1 \Phi Y - Y^T \Phi B_1^T \\ &\quad + QC^T C] Q^{-1} x + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \gamma^2 w^T w \\ &= y^T \begin{bmatrix} M_{11} & QC^T & B_2 \\ CQ & -I & 0 \\ B_2^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

여기서,  $M_{11}$ 은 (19.2)에 정의된 행렬이다. 여기에 식 (20)을 적용하면,  $f_2(x) \leq 0$ , 즉,  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$  이득이  $\gamma$ 보다 크지 않음을 알 수 있다. 여기서,  $y^T = [x^T Q^{-1} : x^T Q^{-1} : w^T]$ 이다.

위의 사실을 종합하면, 조건식 (15), (16), (17)을 만족하면, 제어기 (18)을 가지는 시스템 (1)에 대하여,  $\Omega$ 는

reachable set이며,  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$  이득이  $\gamma$ 보다 크지 않음을 알 수 있다. ■■■

3.2 합 분해 접근법

비선형성  $Sat(u)$ 를 다음과 같이 선형부분  $u$ 와 또 다른 비선형성  $Dz(u)$ 의 합으로 분해하자.

$$Sat(u(t)) = u(t) - Dz(u(t)) \quad (21)$$

여기서,  $Dz(u) = [dz(u_1), dz(u_2), \dots, dz(u_m)]^T$  이고,

$$dz(u_i) = \begin{cases} u_i - u_i^{\lim}, & \text{if } u_i > u_i^{\lim} \\ 0, & \text{if } |u_i| \leq u_i^{\lim} \\ u_i + u_i^{\lim}, & \text{if } u_i < -u_i^{\lim} \end{cases}$$

이다(그림 2 참조). 따라서, 위의  $Dz(\cdot)$  함수를 이용하여 제어기 (3)을 가지는 시스템 (1)의 페루프 시스템은 다음으로 기술된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A - B_1K]x(t) + B_1Dz(Kx(t)) + B_2w(t) \quad (22) \\ z(x) &= Cx(t), \quad x(0) = 0 \end{aligned}$$

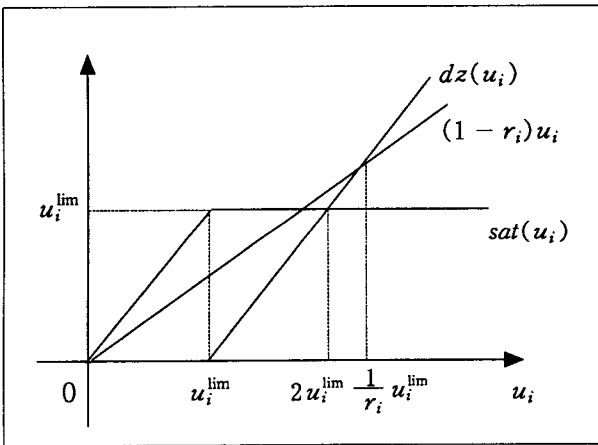


그림 2 일사사분면의 비선형 함수  
Fig. 2 Nonlinear functions (1st plane only)

**보조정리 6:**  $Y_i$ 를  $Y = KQ$ 의  $i$ 번째 행(row) 벡터라 하고,  $x \in \Omega$ 일 때 다음의 행렬 부등식이 성립한다면

$$\begin{bmatrix} Q & Y_i^T \\ Y_i & \left(\frac{u_i^{\lim}}{r_i w_{\max}}\right)^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (23)$$

$|u_i| \leq \frac{1}{r_i} u_i^{\lim}, 0 < r_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, m$ 을 만족하고, 또한, 다음 관계도 성립한다.

$$Dz^T(Kx)S^{-1}Dz(Kx) \leq x^T K^T (I - R) S^{-1} (I - R) Kx$$

여기서,  $R = \text{Diag}\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ ,  $S = \text{Diag}\{s_1, s_2, \dots, s_m\} > 0$ ,  $Q = Q^T > 0$ 이다.

**증명:**  $x \in \Omega$ 일 때, 식 (23)은  $Y = KQ$ 의  $i$ 번째 행(row) 벡터인  $Y_i$ 와 보조정리 1로부터 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} Q - \left(\frac{u_i^{\lim}}{r_i w_{\max}}\right)^{-2} Q K_i^T K_i Q &> 0 \\ \Leftrightarrow Q^{-1} - \left(\frac{u_i^{\lim}}{r_i w_{\max}}\right)^{-2} K_i^T K_i &> 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{u_i^{\lim}}{r_i w_{\max}}\right)^{-2} K_i^T K_i &< Q^{-1} \\ \Leftrightarrow K_i^T K_i &< \left(\frac{u_i^{\lim}}{r_i w_{\max}}\right)^2 Q^{-1} \end{aligned}$$

따라서, 다음 관계로부터

$$\begin{aligned} |u_i|^2 = |K_i x|^2 &= x^T K_i^T K_i x < \left(\frac{u_i^{\lim}}{r_i w_{\max}}\right)^2 x^T Q^{-1} x \\ &\leq \left(\frac{u_i^{\lim}}{r_i w_{\max}}\right)^2 w_{\max}^2 = \left(\frac{u_i^{\lim}}{r_i}\right)^2 \end{aligned}$$

$|u_i| \leq \frac{1}{r_i} u_i^{\lim}$ 를 만족한다. 또한, 그림 2에서 볼 수 있듯이  $|u_i| \leq \frac{1}{r_i} u_i^{\lim}, 0 < r_i \leq 1$ 일 때,  $|dz(u_i)| \leq (1 - r_i)|u_i|$ 이 된다. 그러므로,  $S = \text{Diag}\{s_1, s_2, \dots, s_m\} > 0$ 이라 하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} Dz^T(Kx)S^{-1}Dz(Kx) &= \sum_{i=1}^m s_i^{-1} dz^2(u_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^m s_i^{-1} (1 - r_i)^2 |u_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^m s_i^{-1} (1 - r_i)^2 x^T K_i^T K_i x \\ &= \sum_{i=1}^m x^T K_i^T s_i^{-1} (1 - r_i)^2 K_i x \\ &= x^T K^T S^{-1} (I - R)^2 Kx \\ &= x^T K^T (I - R) S^{-1} (I - R) Kx \end{aligned}$$

다음의 정리 2는 제어기 (3)을 갖는 시스템 (1)에 대하여  $w$ 로부터  $z$ 까지  $L_2$  이득이  $\gamma$ 보다 크지 않음을 보장하는 제어기 (3)을 합 분해 접근법을 이용하여 구하는 방법에 대한 결과이다.

**정리 2:**  $R = \text{Diag}(r_1, r_2, \dots, r_m)$ ,  $0 < r_i < 1$  이라 하자. 만약, 다음의 행렬 부등식을 만족하는 행렬  $Q \in R^{n \times n} = Q^T > 0$ ,  $Y \in R^{m \times n}$ 와 스칼라  $\alpha > 0$  그리고,  $S = \text{Diag}(s_1, s_2, \dots, s_m) > 0$ 가 존재한다면

$$i) \begin{bmatrix} H_1 & Y^T(I-R) & B_2 \\ (I-R)Y & -S_1 & 0 \\ B_2^T & 0 & -\alpha I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (24)$$

$$ii) \begin{bmatrix} H_2 & QC^T & Y^T(I-R) & B_2 \\ CQ & -I & 0 & 0 \\ (I-R)Y & 0 & -S_2 & 0 \\ B_2^T & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (25)$$

$$iii) \left[ Y_i \left( \frac{Y_i^T}{r_i w_{\max}} \right)^2 \right] > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (26)$$

다음의 상태 제환 제어기

$$u(t) = -Kx(t), \quad K = YQ^{-1} \quad (27)$$

는  $w$ 로부터  $z$ 까지  $L_2$  이득이  $\gamma$ 보다 크지 않게 됨을 보장한다. 여기서,

$$H_1(Q, Y, S_1, \alpha) = QA^T + AQ - Y^T B_1^T - B_1 Y + B_1 S_1 B_1^T + \alpha Q$$

$$H_2(Q, Y, S_2) = QA^T + AQ - Y^T B_1^T - B_1 Y + B_1 S_2 B_1^T$$

이고,  $Y_i$ 는 행렬  $Y$ 의  $i$ 번째 행(row) 벡터이다.

**증명:** 증명은 i) 조건식 (24)와 (26)을 만족한다면  $w^T w \leq w_{\max}^2$  일 때, 식 (4)에서 정의된  $\Omega$ 가 제어기 (27)를 갖는 시스템 (1)의 해  $x$ 에 대하여 reachable set임을 보인다. ii) 다음으로는  $x$ 에 대하여 집합  $\Omega$ 가 reachable set이면(즉, 조건식 (24)와 (26)을 만족하면), 그리고, 조건식 (25)와 (26)을 만족하는 제어기 (27)이 존재한다면,  $L_2$  이득이 주어진  $\gamma$ 가 보다 크지 않음을 보인다.

i) 먼저, 제어기 (27)를 갖는 시스템 (1)에 대해 식 (4)에서  $\Omega$ 가 reachable set임을 보장하는 조건을 찾는다. 보조정리 4로부터 만약 다음을 만족하는 2차 함수(quadratic function)  $V(\xi) = \xi^T Q^{-1} \xi$ ,  $Q > 0$ 와  $\alpha > 0$ 가 존재한다면

$$f_3(x) = \frac{dV(x)}{dt} + \alpha V(x) - \alpha w^T w \leq 0$$

$\Omega$ 는 reachable set이다. 위 조건을 제어기 (27)을 갖는 시스템 (1), 즉, 시스템 (22)에 대하여 보조정리 2를 적용하여 다시 쓰면 다음이 된다.

$$\begin{aligned} f_3(x) &= x^T [(A - B_1 K)^T Q^{-1} + Q^{-1} (A - B_1 K) \\ &\quad + \alpha Q^{-1}] x + Dz^T (Kx) B_1^T Q^{-1} x \\ &\quad + x^T Q^{-1} B_1 Dz (Kx) + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \alpha w^T w \\ &\leq x^T [(A - B_1 K)^T Q^{-1} + Q^{-1} (A - B_1 K) \\ &\quad + \alpha Q^{-1}] x + Dz^T (Kx) S_1^{-1} Dz (Kx) \\ &\quad + x^T Q^{-1} B_1 S_1 B_1^T Q^{-1} x + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \alpha w^T w \end{aligned}$$

그리고, 위 식은 보조정리 6과 조건식 (26)에 의해서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_3(x) &= x^T [(A - B_1 K)^T Q^{-1} + Q^{-1} (A - B_1 K) \\ &\quad + \alpha Q^{-1}] x + x^T K^T (I - R) S_1^{-1} (I - R) K x \\ &\quad + g(x) + x^T Q^{-1} B_1 S_1 B_1^T Q^{-1} x \\ &\quad + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \alpha w^T w \\ &= x^T Q^{-1} [Q(A - B_1 K)^T + (A - B_1 K) Q \\ &\quad + B_1 S_1 B_1^T + \alpha Q] Q^{-1} x \\ &\quad + x^T Q^{-1} [Q K^T (I - R) S_1^{-1} (I - R) K Q] Q^{-1} x \\ &\quad + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \alpha w^T w + g(x) \end{aligned}$$

여기서,  $g(x)$ 는 다음을 만족한다.

$$\begin{cases} g(x) \leq 0, & x \in \Omega \\ g(x) > 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

또한,  $Y = KQ$ 를 이용하고, 벡터-행렬의 형태로 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} f_3(x) &= x^T Q^{-1} [QA^T + AQ - Y^T B_1^T - B_1 Y + B_1 S_1 B_1^T \\ &\quad + \alpha Q] Q^{-1} x \\ &\quad + x^T Q^{-1} [Y^T (I - R) S_1^{-1} (I - R) Y] Q^{-1} x \\ &\quad + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \alpha w^T w + g(x) \\ &= y^T \begin{bmatrix} H_1 & Y^T (I - R) & B_2 \\ (I - R) Y & -S_1 & 0 \\ B_2^T & 0 & -\alpha I \end{bmatrix} y + g(x) \end{aligned}$$

여기서,  $x \in \Omega$ 이면  $g(x) \leq 0$  이어야 하며 이때, 조건식 (24)를 적용하면,  $f_3(x) \leq 0$ , 즉,  $x \in \Omega$ 임을 알 수 있다. 여기서,  $y^T = [x^T Q^{-1}, x^T Q^{-1}, w^T]$ 이다. 반대로, 위의 조건식 (24)와 (26)를 만족함에도  $\Omega$ 가 reachable set이 아니라 가정하자. 그러면,  $V(x)$ 의 연속성과  $V(x(0)) = 0$ 에 의하여  $V(x(t_1)) \leq w_{\max}^2$ ,  $V(x(t_2)) > w_{\max}^2$ 인 시간  $t_1 < t_2$ 가 존재하여야 하고, 중간치 정리에 의하여  $\dot{V}(x(t^*)) > 0$ 이 되는  $t^*$ ,  $t_1 < t^* < t_2$ 가  $x \notin \Omega$ 에서 존재하여야 한다. 그런데,  $x \notin \Omega$ 에서는 항상  $\dot{V}(x) < 0$ 이므로  $\dot{V}(x(t^*)) > 0$ 이 되는  $t^*$ ,  $t_1 < t^* < t_2$ 가  $x \notin \Omega$ 에서 존재하여야 한다는데 위배된다. 즉,

위의 조건식 (24)와 (26)를 만족하면 항상  $x \in \Omega$ 이다.

ii) 다음은 조건식 (24), (25), (26)을 동시에 만족하면  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$  이득이  $\gamma$ 보다 크지 않음을 보인다. 보조정리 4에 의하여 다음을 만족하는 2차 함수(quadratic function)  $V(\xi) = \xi^T Q^{-1} \xi$ ,  $Q > 0$ 와  $\gamma > 0$ 가 존재한다면  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$  이득이  $\gamma$ 보다 크지 않음을 알 수 있다.

$$f_4(x) = \frac{dV(x)}{dt} + z^T z - \gamma^2 w^T w \leq 0$$

위 조건을 제어기 (27)을 갖는 시스템 (1), 즉, 시스템 (22)에 대하여 보조정리 2를 적용하여 다시 쓰면 다음이 된다.

$$\begin{aligned} f_4(x) &= x^T [(A - B_1 K)^T Q^{-1} + Q^{-1} (A - B_1 K) + C^T C] x \\ &\quad + Dz^T (Kx) B_1^T Q^{-1} x + x^T Q^{-1} B_1 D z (Kx) \\ &\quad + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \gamma^2 w^T w \\ &\leq x^T [(A - B_1 K)^T Q^{-1} + Q^{-1} (A - B_1 K) + C^T C] x \\ &\quad + Dz^T (Kx) S_2^{-1} D z (Kx) + x^T Q^{-1} B_1 S_2 B_1^T Q^{-1} x \\ &\quad + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \gamma^2 w^T w \end{aligned}$$

그리고, 위 식은 보조정리 6과 조건식 (26)에 의해서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_4(x) &= x^T [(A - B_1 K)^T Q^{-1} + Q^{-1} (A - B_1 K) + C^T C] x \\ &\quad + x^T K^T (I - R) S_2^{-1} (I - R) K x + g(x) \\ &\quad + x^T Q^{-1} B_1 S_2 B_1^T Q^{-1} x + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \gamma^2 w^T w \\ &= x^T Q^{-1} [Q(A - B_1 K)^T + (A - B_1 K)Q + B_1 S_2 B_1^T \\ &\quad + QC^T C Q] Q^{-1} x \\ &\quad + x^T Q^{-1} [QK^T (I - R) S_2^{-1} (I - R) K Q] Q^{-1} x \\ &\quad + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \gamma^2 w^T w + g(x) \end{aligned}$$

여기서,  $g(x)$ 는 다음을 만족한다.

$$\begin{cases} g(x) \leq 0, & x \in \Omega \\ g(x) > 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

또한,  $Y = KQ$ 를 이용하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} f_4(x) &= x^T Q^{-1} [QA^T + AQ - Y^T B_1^T - B_1 Y + B_1 S_2 B_1^T \\ &\quad + QC^T C Q] Q^{-1} x \\ &\quad + x^T Q^{-1} [Y^T (I - R) S_2^{-1} (I - R) Y] Q^{-1} x \\ &\quad + 2x^T Q^{-1} B_2 w - \gamma^2 w^T w + g(x) \end{aligned}$$

$$= y^T \begin{bmatrix} H_2 & QC^T & Y^T (I - R) & B_2 \\ CQ & -I & 0 & 0 \\ (I - R) Y & 0 & -S_2 & 0 \\ B_2^T & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} y + g(x)$$

여기서, 조건식 (24)에 의해서  $x \in \Omega$ 이므로  $g(x) \leq 0$ 이 되고 조건식 (25)에 의해  $f_4(x) \leq 0$ 이 된다. 즉,  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$  이득이  $\gamma$ 보다 크지 않음을 알 수 있다. 여기서,  $y^T = [x^T Q^{-1} : x^T Q^{-1} : x^T Q^{-1} : w^T]$ 이다.

위의 사실을 종합하면, 조건식 (24), (25), (26)을 만족하면, 제어기 (27)를 가지는 시스템 (1)에 대하여,  $\Omega$ 는 reachable set이며,  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $L_2$  이득이  $\gamma$ 보다 크지 않음을 알 수 있다. ■■■

#### 4. 수치 예제

여기에서는 위에서 제시된 결과의 유용성을 보인다. 이를 위하여 다음의 두 가지 시스템을 생각하자.

시스템 1)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \text{Sat}(u(t)) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) &= [5 \ 0] x(t) \end{aligned}$$

시스템 2)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \text{Sat}(u(t)) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) &= [5 \ 0] x(t) \end{aligned}$$

여기서,  $w_{\max} = 1$ 라 하자. 그러면 개루프 상태에서 시스템 1)은 안정하고, 시스템 2)는 불안정하다. 즉, 개루프 상태에서 시스템 1)의  $w$ 로부터  $z$ 까지의  $H_\infty$  노음은 유한한 상수인데 반하여, 시스템 2)의  $H_\infty$  노음은 무한대이다.

여기에서 우리가 설계하고자 하는 제어기는 포화구동기의 선형 구간이 주어진 경우(즉,  $u^{\lim}$ 이 주어진 경우) 및 곱 분해 접근법에서는  $\theta$ , 합 분해 접근법에서는  $r$ 로 표시하는 제어기의 포화 정도가 주어진 경우에 대하여  $L_2$  이득을 최소로 하는 제어기를 설계한다. 여기에서  $\theta = 1$ ,  $r = 1$ 로 주어진 경우는 설계된 제어기는 절대로 포화되지 않음을 의미하며,  $\theta = 0.1$ ,  $r = 0.1$ 로 주어진 경우는 설계된 제어기의 출력은 포화 비선형성의 선형 구간의 10배 이하가 됨을 의미한다. 다음의 표 1과 표 3은 시스템 1)에 대한 것이다. 즉,  $u^{\lim} = 1, 3, 5$ 의 3가지 각각의 경우에 대하여  $\theta = 1, 0.1, 0.01$ ,  $r = 1, 0.1, 0.01$ 의 경우에 대한  $L_2$  이득을 최소로 하는 제어기를 구하였을 때, 각각의  $L_2$  이득을 표시한 것이고, (\*)에 있는 것은 설계된 제어기를 이용하여  $u^{\lim} = \infty$  상태에서 얻을 수 있는 최소  $L_2$  이득이다. 그리



표 1 정리 1에 기초한 시스템 1)에 대한  $L_2$  이득( $\gamma$ )과 설계된 제어기(행렬  $K$ )

Table 1 Designed controller(Matrix  $K$ ) and  $L_2$  gain( $\gamma$ ) for system 1) based on Theorem 1.

| $u^{lim}$ | 개루프 |          | $\theta=1$          | $\theta=0.1$          | $\theta=0.01$         |
|-----------|-----|----------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1         | 3.0 | $\gamma$ | 1.1862<br>(1.1438)  | 1.1862<br>(0.3590)    | 1.1946<br>(0.2553)    |
|           |     | $K$      | [4.0571<br>0.3712]  | [40.5705<br>3.7125]   | [408.7802<br>39.5538] |
| 3         | 3.0 | $\gamma$ | 0.6922<br>(0.6659)  | 0.6925<br>(0.2625)    | 0.7161<br>(0.2329)    |
|           |     | $K$      | [10.1637<br>0.8400] | [102.2092<br>8.5427]  | [1027.7<br>93.5]      |
| 5         | 3.0 | $\gamma$ | 0.5301<br>(0.5148)  | 0.5367<br>(0.2375)    | 0.5582<br>(0.2187)    |
|           |     | $K$      | [15.4328<br>1.1895] | [158.0006<br>12.8004] | [1567.7<br>134.9]     |

주: (\*)는 설계된 제어기  $K$ 를  $u^{lim} = \infty$  상태에서 얻을 수 있는 최소  $L_2$  이득임.

표 2 정리 1에 기초한 시스템 2)에 대한  $L_2$  이득( $\gamma$ )과 설계된 제어기(행렬  $K$ )

Table 2 Designed controller(Matrix  $K$ ) and  $L_2$  gain( $\gamma$ ) for system 2) based on Theorem 1.

| $u^{lim}$ | 개루프      |          | $\theta=1$          | $\theta=0.1$          | $\theta=0.01$          |
|-----------|----------|----------|---------------------|-----------------------|------------------------|
| 2         | $\infty$ | $\gamma$ | 0.7678<br>(0.7162)  | 0.7995<br>(0.6628)    | 0.8058<br>(0.6675)     |
|           |          | $K$      | [7.5666<br>1.7397]  | [73.3535<br>19.0463]  | [727.6232<br>193.8840] |
| 3         | $\infty$ | $\gamma$ | 0.6306<br>(0.5869)  | 0.6545<br>(0.5554)    | 0.6591<br>(0.5601)     |
|           |          | $K$      | [10.6438<br>2.0634] | [103.4631<br>22.5852] | [1027.5<br>229.8]      |
| 5         | $\infty$ | $\gamma$ | 0.4956<br>(0.4601)  | 0.5123<br>(0.4454)    | 0.5155<br>(0.4497)     |
|           |          | $K$      | [16.3076<br>2.5540] | [159.0811<br>27.9428] | [1581.9<br>284.2]      |

주: (\*)는 설계된 제어기  $K$ 를  $u^{lim} = \infty$  상태에서 얻을 수 있는 최소  $L_2$  이득임.

고, 표 2와 표 4는 시스템 2)에 대한 위에서 설명한 표 1과 표 3의 내용이 각각 나타나 있다. 다만,  $u^{lim}=1$ 의 경우에는 infeasible이 되므로  $u^{lim}=2, 3, 5$ 의 3가지 경우를 고려했다.

### 5. 결 론

표 3 정리 2에 기초한 시스템 1)에 대한  $L_2$  이득( $\gamma$ )과 설계된 제어기(행렬  $K$ )

Table 3 Designed controller(Matrix  $K$ ) and  $L_2$  gain( $\gamma$ ) for system 1) based on Theorem 2.

| $u^{lim}$ | 개루프 |          | $r=1$               | $r=0.1$               | $r=0.01$              |
|-----------|-----|----------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1         | 3.0 | $\gamma$ | 1.1862<br>(1.1438)  | 1.1862<br>(0.3590)    | 1.2036<br>(0.2621)    |
|           |     | $K$      | [4.0571<br>0.3712]  | [40.5707<br>3.7125]   | [408.3861<br>40.6174] |
| 3         | 3.0 | $\gamma$ | 0.6922<br>(0.6659)  | 0.6982<br>(0.2699)    | 0.7203<br>(0.2343)    |
|           |     | $K$      | [10.1637<br>0.8400] | [103.3614<br>8.9764]  | [1023.7<br>93.7]      |
| 5         | 3.0 | $\gamma$ | 0.5301<br>(0.5148)  | 0.5443<br>(0.2430)    | 0.5608<br>(0.2197)    |
|           |     | $K$      | [15.4328<br>1.1895] | [158.2424<br>13.1741] | [1563<br>135.1]       |

주: (\*)는 설계된 제어기  $K$ 를  $u^{lim} = \infty$  상태에서 얻을 수 있는 최소  $L_2$  이득임.

표 4 정리 2에 기초한 시스템 2)에 대한  $L_2$  이득( $\gamma$ )과 설계된 제어기(행렬  $K$ )

Table 4 Designed controller(Matrix  $K$ ) and  $L_2$  gain( $\gamma$ ) for system 2) based on Theorem 2.

| $u^{lim}$ | 개루프      |          | $r=1$               | $r=0.1$               | $r=0.01$               |
|-----------|----------|----------|---------------------|-----------------------|------------------------|
| 2         | $\infty$ | $\gamma$ | 0.7678<br>(0.7162)  | 0.8027<br>(0.6712)    | 0.8062<br>(0.6686)     |
|           |          | $K$      | [7.5666<br>1.7397]  | [73.0665<br>19.2158]  | [727.2325<br>194.1011] |
| 3         | $\infty$ | $\gamma$ | 0.6306<br>(0.5869)  | 0.6568<br>(0.5621)    | 0.6594<br>(0.5610)     |
|           |          | $K$      | [10.6438<br>2.0634] | [103.1139<br>22.7821] | [1027<br>230.1]        |
| 5         | $\infty$ | $\gamma$ | 0.4956<br>(0.4601)  | 0.5139<br>(0.4504)    | 0.5157<br>(0.4504)     |
|           |          | $K$      | [16.3076<br>2.5540] | [158.6408<br>28.1799] | [1581.3<br>284.5]      |

주: (\*)는 설계된 제어기  $K$ 를  $u^{lim} = \infty$  상태에서 얻을 수 있는 최소  $L_2$  이득임.

이 논문에서는 외란(disturbance)으로부터 출력까지의  $H_\infty$  노음이 주어진 값 이하 또는 같도록 하는 포화 구동기를 갖는 선형 시스템의  $H_\infty$  제어기 설계를 보였다. 일반적인 포화 특성과 그 비선형성인 포화 특성을 효과적으로 다루기 위해 곱 분해 접근법(Multiplicative Decomposition Approach)과 합 분해 접근법(Additive Decomposition Approach)을 사용하였다. 제어기는 선형 행렬 부등식(LMI)

조건들을 만족하는 해를 구하여 얻어지며, 또한, 이들 조건은 잘 알려진 MATLAB™을 이용하면 쉽게 구하여진다. 마지막으로, 수치 예제를 통해 제시된 결과의 유용성을 보였다.

참고 문헌

[1] R. L. Kosut, "Design of linear systems with saturating linear control and bounded states," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 28, no. 1, pp. 121-124, 1983.

[2] W. J. Wang and B. S. Chen, "Stability of large-scale systems with saturating actuators," *Int. J. Contr.*, vol. 47, no.3, pp. 827-850, 1988.

[3] B. S. Chen and S. S. Wang, "The stability of feedback control with nonlinear saturating actuator: Time domain approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, no. 5, pp. 483-487, 1988.

[4] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, "State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, 1989.

[5] H. H. Choi and M. J. Chung, "An LMI approach to  $H_\infty$  controller design for linear time-delay systems," *Automatica*, vol. 33, no. 4, pp. 737-739, 1997.

[6] J. G. Chase and H. A. Smith, "Robust  $H_\infty$  control considering actuator saturation. I: Theory," *J. Engrg. Mech.*, ASCE, no. 10, pp. 976-983, 1996.

[7] J. G. Chase and H. A. Smith and T. Suzuki, "Robust  $H_\infty$  control considering actuator saturation. II: Applications," *J. Engrg. Mech.*, ASCE, no. 10, pp. 984-993, 1996.

[8] J. G. Chase, S. E. Breneman and H. A. Smith, "Robust  $H_\infty$  static output feedback control with actuator saturation," *J. Engrg. Mech.*, ASCE, no. 2, pp. 225-233, 1999.

[9] T. Nguyen, F. Jabbari and S. de Miguel, "Applicaton of active control to buildings under seismic excitation: Actuator saturation," *Proc. of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications*, Trieste, Italy, September 1998.

[10] T. Nguyen and F. Jabbari, "Disturbance attenuation for systems with input saturation: An LMI approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, no. 4, pp. 852-857, 1999.

[11] J. H. Kim and Z. Bien, "Robust stability of uncertain systems with saturating actuators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, no. 1, pp. 225-229, 1994.

[12] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics, 1994.

[13] A. Wienmann, *Uncertain Model and Robust Control*, Springer-Verlag, 1991.

저 자 소 개



조 현 철 (趙 炫 徹)

1973년 4월 7일생. 1998년 대전산업대 제어계측공학과 졸업. 2000년 충북대 대학원 제어계측공학과 졸업(석사).  
Tel : 0431-261-2387, Fax : 0431-268-2386



김 진 훈 (金 鎭 勳)

1961년 10월 8일생. 1985년 서울대 전기공학과 졸업. 1985~1987년 신영전기(주) 연구원. 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1993년 동 전기 및 전자공학과 졸업(공학박). 1993~1994년 경상대 공대 제어계측공학과 전임강사. 1998~1999 UCI 방문교수. 현재 충북대 공대 전기전자공학부 부교수.  
Tel : 0431-261-2387, Fax : 0431-268-2386  
E-mail : jinhkim@cbucc.chungbuk.ac.kr