

Robust Pole Assignment of Uncertain Linear Systems

金 宰 成* · 金 鎮 勳**
(Jae-Sung Kim* · Jin-Hoon Kim**)

Abstract - It is well-known that the poles of a system are closely related with the dynamics of the systems, and the pole assignment problem, which locates the poles in the desired regions, is one of the major problem in control theory. Also, it is always possible to assign poles to specific points for exactly known linear systems. But, it is impossible for the uncertain linear systems because of the uncertainties that originate from modeling error, system variations, sensing error and disturbances, so we must consider some regions instead of points.

In this paper, we consider both the analysis and the design of robust pole assignment problem of linear system with time-varying uncertainty. The considered uncertainties are the unstructured uncertainty and the structured uncertainty, and the considered region is the circular region. Based on Lyapunov stability theorem and linear matrix inequality(LMI), we first present the analysis result for robust pole assignment, and then we present the design result for robust pole assignment. Finally, we give some numerical examples to show the applicability and usefulness of our presented results.

Key Words : Pole assignment, uncertainty, robust stability, circular region. LMI

1. 서 론

일반적으로 시스템을 제어한다는 것은 제어하고자 하는 시스템이 원하고자 하는 성능을 갖도록 제어기를 설계하고 시스템에 적용하는 것이다. 하지만 제어기의 설계 시 모델링 과정에서 시스템의 비선형적으로 표현되는 특성이 선형화 하는 과정에서 오차가 생기며 마련이며 시스템의 동작 시 발생하는 시스템의 물리적인 변화나 외부의 환경에서 기인하는 외란 등이 실제 시스템과 모델링 된 제어기 사이에 오차를 유발한다. 이러한 오차를 불확정성(uncertainty)이라 하며 시스템이 불확정성을 포함하는 경우에는 시스템의 성능 뿐 만 아니라 안정도까지도 보장하지 못하는 경우가 일반적이다. 불확정성이 존재하는 가운데 시스템이 실제 환경에서 원하고자 하는 방향으로 동작하기 위해 가져야 하는 특성을 강인성(robustness)이라 한다. 또, 불확정성을 갖는 시스템의 안정도는 특히 중요하며 이 경우 안정성이 보장되도록 하는 것을 강인 안정성(robust stability)이라 한다.

제어 시스템의 해석이나 설계에 있어서 페루프 시스템의 극점은 시스템의 동적 성능을 좌우하므로 극점 배치 문제는 제어 분야에서 매우 중요한 문제 중의 하나이다. 불확정성이 없는 공칭 시스템(nominal system)의 경우 기존에 연구,

개발되어진 알고리즘을 이용하면 정확하고 쉬운 극점 배치가 가능하나 불확정성이 포함된 시스템에 있어서는 복소 평면상의 좌반부에 일정한 영역을 설정하여 놓고 불확정성의 한계 내에서 페루프 시스템의 극점들이 규정된 영역 내에 위치하도록 해야 한다.

이전에 연구되어진 결과를 보면 일반적으로 행렬의 근을 복소 평면상에 위치시키는 밀폐된 여러 가지 영역을 제시하였고[1], 시스템의 안정도에 대하여 불확정성이 없는 선형 시스템에 대한 결과를 Riccati 방정식을 이용하여 제시하였으며[2], 특정한 영역 내에 상태 궤환을 통한 페루프 공칭 시스템의 극점을 배치시키는 optimal regulator를 설계하였다[3]. 불확정성이 포함된 시스템에 대하여 원형 공간이 아닌 환상 영역에서의 극점 배치 문제를 다루었지만 불확정성이 시불변이라는 한계가 있었다[4]. 또, matrix measure를 이용하여 복소 평면상에 θ 의 기울기를 갖는 수직 축으로 정의되는 영역 안에 극점을 배치하는 문제 또한 다루었으나 시불변 불확정성이라는 한계에 부딪혔다[5]. 이후 "2차 d 안정도(quadratic- d - stability)"라는 개념을 도입하여 상태 궤환에 의한 페루프 시스템의 강인 극점 배치 문제와 강인 극점 배치를 갖는 성능보장제어 문제를 연구하였다[6],[8]. 상태 궤환을 통한 d -stability의 H_∞ 문제를 Riccati 방정식을 통하여 극점 배치 영역을 설정하였으며[7], 시변 시스템에 있어서 안정성 해석과 함께 기울기를 갖는 선형(stripe) 영역을 설정하여 극점 배치를 고려하였다[6]. 또, Lyapunov 안정성 이론을 바탕으로 시변 불확정성을 갖는 페루프 시스템의 모든 극점이 원판 내에 위치하며 안정성을 보장하는 결과를 제시하였고[11], H_∞ 기법을 사용하여 극점배치 문제

* 準 會 員 : 忠 北 大 大 學 院 制 御 計 測 工 學 科 碩 士
 ** 正 會 員 : 忠 北 大 工 大 制 御 計 測 工 學 科 副 教 授 · 工 博
 接 受 日 字 : 1999年 10月 18日
 最 終 完 了 : 2000年 3月 13日

를 해결하였다[10].

이전에 연구되어진 대부분의 결과가 강인 극점 배치를 다루는데 있어서 시변 불확정성을 다루고 있다. 그러나 실제 시스템에 있어서 불확정성이 시변으로 주어지는 경우는 거의 없고 시변으로 주어지는 것이 일반적이다. 또, 불확정성이 시변인 경우 시스템의 안정도가 시스템의 극점에 의하여 결정되는 것은 아니므로 시스템의 영역 극점 배치와 더불어 별도로 시스템의 극점이 모두 복소 평면상의 좌반부에 위치하더라도 안정도를 보장하는 조건을 제시하여야 한다. 최근 최적 해를 구하는 방법으로서 많은 각광을 받고 있는 LMI 기법으로 시변 불확정성에 대하여 극점 배치 문제를 적용한 사례는 거의 없는 것이 사실이므로 이에 대한 연구가 필요하다.

본 논문에서는 시변 불확정성을 갖는 선형 시스템의 강인 극점 배치에 관한 해석 및 설계를 다루었다. 먼저 시변 불확정성을 가지는 페루프 선형 시스템의 모든 극점이 주위진 원판 내에 존재하면서 동시에 안정성을 보장하는 조건을 LMI형태로 제시하였다. 다음으로는 시변 불확정성을 가지는 제어 시스템의 모든 극점이 주위진 원판 내에 존재하면서 동시에 안정성을 보장하도록 하는 제어기 설계에 관한 결과를 LMI형태로 제시하였다. 제시된 결과는 모두 LMI형태이므로 이를 이용하기에 매우 편리한 장점을 지닌다. 여기서 규정된 원판은 그림 1 처럼 복소 평면상의 좌반면 내에 중심이 $-\alpha$ 이고 반지름이 r ($r < \alpha$) 인 원판 영역 $D(-\alpha, r)$, 즉, 다음을 나타낸다.

$$D(-\alpha, r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda + \alpha| \leq r\} \quad (1)$$

끝으로 수치 예제를 통하여 얻어진 결과의 유용성과 응용성을 보이고 결론을 맺는다.

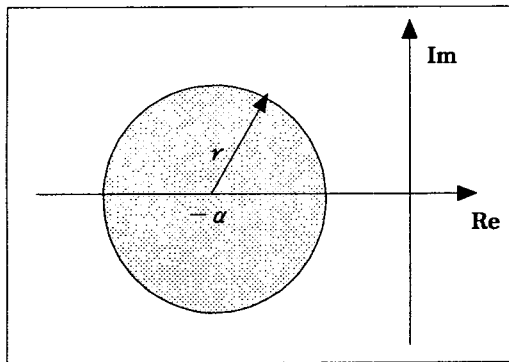


그림 1 규정된 원판 $D(-\alpha, r)$
Fig. 1 A Circular Disk $D(-\alpha, r)$

이 논문에서는 $(\cdot)^T$ 는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)를 의미하고, 대칭행렬 $V, W \in R^{n \times n}$ 에 대하여 $V > W$ ($V \geq W$)는 행렬 $V - W$ 가 양확정(또는 준양확정) 행렬임을 나타낸다. 그리고, $\|\cdot\|$ 는 Euclidean 벡터 노름 또는 이

의 유사(induced) 행렬 노름을 말하며, 끝으로, I_n 은 $n \times n$ 항등(identity) 행렬이다.

2. 문제 기술

다음으로 기술되는 시변 불확정성을 갖는 선형 페루프 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t) = [A_c + \Delta A_c(t)]x(t) \quad (2)$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 은 상태를 나타내고, $A_c \in R^{n \times n}$ 은 안정한 페루프 시스템 행렬이며 $\Delta A_c(t) \in R^{n \times n}$ 는 시변 불확정성 행렬로 다음 식(3)으로 표시되는 비구조적 불확정성과

$$\|\Delta A_c(t)\| \leq \eta \quad (3)$$

다음 식(4)으로 나타내지는 구조적 불확정성이다.

$$\Delta A_c(t) = \sum_{i=1}^m q_i(t) E_i \quad (4)$$

여기서 η 는 양의 상수이고 $E_i \in R^{n \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$ 는 알려진 상수 행렬이며 $q_i(t)$ 는 시변 파라미터이다.

또, 다음과 같은 선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + B u(t) \quad (5)$$

여기에서 $x(t) \in R^n$ 은 상태를 나타내고, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ 은 시스템 행렬이며 선형 시스템 (5)의 제어기로는 다음과 같은 상태 제환을 고려하자.

$$u(t) = K x(t) \quad (6)$$

고려된 불확정성 $\Delta A(t)$ 는 다음의 조건을 만족한다.

$$\Delta A(t) = D F(t) E, \quad F(t)^T F(t) \leq I \quad (7)$$

본 논문에서는 시변 불확정성 (3) 또는 (4)를 갖는 선형 시스템 (2)의 모든 극점들이 그림 1과 같이 표시된 복소 평면상의 좌반면(L.H.P)내의 중심이 $-\alpha$ 이고 반지름이 r 인 원판 내에 위치하도록 하면서 동시에 시스템 (2)의 강인 안정성을 보장하는 조건을 제시하고, (7)의 조건을 갖는 불확정성 선형 시스템 (5)의 극점을 규정된 원판 내로 위치시키는 제어기 (6)을 설계하는 것이다.

다음에 보여지는 정리들은 앞으로 제시되는 주요결과의 증명에 사용되는 보조정리들이다.

보조정리 1 [2] : 다음과 같이 불확정성을 갖는 선형 페

루프 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = [A_c + \Delta A_c(t)]x(t)$$

이때, 다음을 만족하는 양확정 행렬 P 가 존재한다면

$$\frac{(A_c + \alpha I_n + \Delta A_c(t))^T}{r} P \frac{(A_c + \alpha I_n + \Delta A_c(t))}{r} - P < 0$$

불확정성을 포함하는 페루프 시스템의 모든 극점은 규정된 원판 $D(-\alpha, r)$ 의 내부에 존재한다.

보조정리 2 [6]: 다음과 같이 불확정성을 갖는 선형 페루프 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = [A_c + \Delta A_c(t)]x(t)$$

만약, 다음을 만족하는 양확정 행렬 \bar{P} 가 존재한다면

$$(A_c + \Delta A_c(t))^T \bar{P} + \bar{P}(A_c + \Delta A_c(t)) < 0$$

불확정성 페루프 시스템은 강인 안정하다.

보조정리 3 [12]: 임의의 두 행렬 X, Y 와 양확정 행렬 S 에 대하여 다음이 성립한다.

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T S X + Y^T S^{-1} Y$$

보조정리 4 [10]: 임의의 행렬 $P = P^T > 0, Q = Q^T > 0$ 와 양의 스칼라 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ 에 대하여 다음의 부등식은 성립한다.

$$\begin{aligned} & i) (A + DFE)^T Q (A + DFE) \\ & \leq A^T Q A + A^T Q D (\varepsilon_1 I - D^T Q D)^{-1} D^T Q A + \varepsilon_1 E^T E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ii) (A + DFE)^T P^{-1} (A + DFE) \\ & \leq A^T (P - \varepsilon_2 E^T E)^{-1} A + \varepsilon_2^{-1} D D^T \end{aligned}$$

여기서 $F^T F \leq I, \varepsilon I - D^T Q D > 0, P - \varepsilon_2 E^T E > 0$ 이다.

보조정리 5 [13]: 임의의 대칭 행렬 Q 와 대칭 양확정 행렬 R 에 대하여 다음의 두 선형 행렬 부등식(LMI)은 서로 동치(equivalent)이다.

$$i) Q + W^T R^{-1} W < 0, R > 0$$

$$ii) \begin{bmatrix} Q & W^T \\ W & -R \end{bmatrix} < 0.$$

3. 강인 극점 해석

다음에 오는 정리1은 식(3)과 같은 비구조적 불확정성을 포함하는 선형 페루프 시스템 (2)의 모든 극점이 $D(-\alpha, r)$ 에 위치하면서 또한 이 시스템의 강인 안정성을 보장하는 결과이다.

정리 1: 비구조적 불확정성 (3)을 갖는 선형 페루프 시스템 (2)를 생각하자. 만약 다음에 오는 선형 행렬 부등식(LMI)을 만족하는 양확정 행렬 $P > 0, \bar{P} > 0$ 와 양의 상수 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ 이 존재 하면

$$i) \begin{bmatrix} H_1 & (A_c + \alpha I_n)^T P \\ P(A_c + \alpha I_n) & -(\varepsilon_1 I_n - P) \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$ii) \begin{bmatrix} A_c^T \bar{P} + \bar{P} A_c + \varepsilon_2 \eta^2 I_n & \bar{P} \\ \bar{P} & -\varepsilon_2 I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

불확정성 (3)을 갖는 시스템 (2)의 모든 극점은 중심이 $-\alpha$ 이고 반지름이 r 인 규정된 원판 $D(-\alpha, r)$ 내에 존재하며, 또한 이 시스템은 강인 안정하다. 단, 여기서 $\varepsilon_1 I_n - P > 0$ 이고 $H_1 = (A_c + \alpha I_n)^T P (A_c + \alpha I_n) + \varepsilon_1 \eta^2 I_n - r^2 P$ 이다.

증명: 먼저, 조건 (8)을 만족하면 시스템 (2)의 모든 극점이 $D(-\alpha, r)$ 에 위치함을 보인다. 보조정리 5에 의하여 조건식 (8)은 다음과 동치이다.

$$\begin{aligned} & (A_c + \alpha I_n)^T P (A_c + \alpha I_n) \\ & + (A_c + \alpha I_n)^T P (\varepsilon_1 I_n - P)^{-1} P (A_c + \alpha I_n) \\ & + \varepsilon_1 \eta^2 I_n - r^2 I_n < 0 \end{aligned} \quad (10)$$

여기에 불확정성 (3)의 조건을 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & (A_c + \alpha I_n)^T P (A_c + \alpha I_n) \\ & + (A_c + \alpha I_n)^T P (\varepsilon_1 I_n - P)^{-1} P (A_c + \alpha I_n) \\ & + \varepsilon_1 \Delta A_c^T(t) \Delta A_c(t) - r^2 P \\ & = (A_c + \alpha I_n)^T P (A_c + \alpha I_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Delta A_c^T(t)(\varepsilon_1 I_n - P)\Delta A_c(t) \\
 & + (A_c + aI_n)^T P(\varepsilon_1 I_n - P)^{-1} P(A_c + aI_n) \\
 & + \Delta A_c^T(t) P \Delta A_c(t) - r^2 P
 \end{aligned}$$

< 0

다음으로 보조정리3과 $\varepsilon_1 I_n - P > 0$ 의 조건을 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 & (A_c + aI_n)^T P(A_c + aI_n) + \Delta A_c^T(t) P(A_c + aI_n) \\
 & + (A_c + aI_n)^T P \Delta A_c(t) + \Delta A_c^T(t) P \Delta A_c(t) - r^2 P \\
 & = (A_c + aI_n + \Delta A_c(t))^T P(A_c + aI_n + \Delta A_c(t)) - r^2 P
 \end{aligned}$$

< 0

따라서 보조정리1에 의하여 시스템 (2)의 모든 극점은 $D(-\alpha, r)$ 내에 존재한다. 다음으로는 조건 (9)를 만족하면 시스템 (2)는 강인 안정함을 보인다. 조건 (9)와 보조정리 5에 의하여 다음을 얻는다.

$$A_c^T \bar{P} + \bar{P} A_c + \varepsilon_2 \eta^2 I_n + \frac{1}{\varepsilon_2} \bar{P} \bar{P} < 0$$

또한, 여기에 불확정성 (3)의 성질로부터 다음을 얻게 되고

$$A_c^T \bar{P} + \bar{P} A_c + \varepsilon_2 \Delta A_c^T(t) \Delta A_c(t) + \frac{1}{\varepsilon_2} \bar{P} \bar{P} < 0$$

계속하여, 보조정리 3에 의하여 다음을 얻는다.

$$A_c^T \bar{P} + \bar{P} A_c + \Delta A_c^T(t) \bar{P} + \bar{P} \Delta A_c(t) < 0$$

따라서, Lyapunov 안정성 정리에 의하여 조건 (9)를 만족하면, 시스템 (2)는 안정하다. 이를 종합하면, 조건식 (8), (9)를 동시에 만족하는 양확정 행렬 P, \bar{P} 와 양의 상수 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 가 존재하면 비구조적 불확정성(3)을 갖는 페루프 시스템(2)의 모든 극점은 $D(-\alpha, r)$ 내에 존재하며, 또한 이 시스템은 강인 안정하다. ■■■

다음의 정리2는 구조적 불확정성 (4)를 포함하는 선형 페루프 시스템(2)의 모든 극점이 $D(-\alpha, r)$ 에 위치하면서 강인 안정성을 보장하는 결과이다.

정리 2 : 구조적 불확정성 (4)를 갖는 선형 페루프 시스

템 (2)를 생각하자. 만약 다음에 오는 선형 행렬 부등식 (LMI)을 만족하는 양확정 행렬 $P > 0, \bar{P} > 0$ 와 양의 상수 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ 이 존재한다면

$$i) \begin{bmatrix} H_2 & (A_c + aI_n)^T P \\ P(A_c + aI_n) & -(\varepsilon_1 I_n - P) \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

$$ii) \begin{bmatrix} A_c^T \bar{P} + \bar{P} A_c + \varepsilon_2 \left(\sum_{i=1}^m q_i^2(t) \right) \sum_{i=1}^m (E_i^T E_i) & \bar{P} \\ \bar{P} & -\varepsilon_2 I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

불확정성(4)를 갖는 시스템(2)의 모든 극점은 중심이 $-\alpha$ 이고 반지름이 r 인 규정된 원판 $D(-\alpha, r)$ 내에 존재하며 이 시스템은 강인 안정하다. 단 여기서 $\varepsilon_1 I_n - P > 0$ 이고

$$\begin{aligned}
 H_2 & = (A_c + aI_n)^T P(A_c + aI_n) + \varepsilon_1 \left(\sum_{i=1}^m q_i^2(t) \right) \sum_{i=1}^m (E_i^T E_i) \\
 & - r^2 P
 \end{aligned}$$

이다.

증명 : 먼저, 조건 (11)을 만족하면 불확정성 (4)를 갖는 시스템 (2)의 모든 극점이 원판내에 존재함을 보인다. 보조정리 5에 의해 식(11)로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & (A_c + aI_n)^T P(A_c + aI_n) \\
 & + (A_c + aI_n)^T P(\varepsilon_1 I_n - P)^{-1} P(A_c + aI_n) \\
 & + \varepsilon_1 \sum_{i=1}^m q_i^2(t) \sum_{i=1}^m (E_i^T E_i) - r^2 P < 0 \quad (13)
 \end{aligned}$$

그리고, 다음의 불확정성에 대한 성질을 식 (13)에 적용하면

$$\begin{aligned}
 \Delta A_c^T(t) \Delta A_c(t) & = \left(\sum_{i=1}^m q_i(t) E_i \right)^T \left(\sum_{i=1}^m q_i(t) E_i \right) \\
 & \leq \sum_{i=1}^m q_i^2(t) \sum_{i=1}^m E_i^T E_i \quad (14)
 \end{aligned}$$

다음의 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 & (A_c + aI_n)^T P(A_c + aI_n) \\
 & + (A_c + aI_n)^T P(\varepsilon_1 I_n - P)^{-1} P(A_c + aI_n) \\
 & + \varepsilon_1 \Delta A_c^T(t) \Delta A_c(t) - r^2 P
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (A_c + aI_n)^T P (A_c + aI_n) + \Delta A_c^T(t) (\varepsilon_1 I_n - P) \Delta A_c(t) \\
 &\quad + (A_c + aI_n)^T P (\varepsilon_1 I_n - P)^{-1} P (A_c + aI_n) \\
 &\quad + \Delta A_c^T(t) P \Delta A_c(t) - r^2 P
 \end{aligned}$$

< 0

또한, 여기에 보조정리 3과 $\varepsilon_1 I_n - P > 0$ 의 조건을 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 &(A_c + aI_n)^T P (A_c + aI_n) + \Delta A_c^T(t) P (A_c + aI_n) \\
 &\quad + (A_c + aI_n)^T P \Delta A_c(t) + \Delta A_c^T(t) P \Delta A_c(t) - r^2 P \\
 &= (A_c + aI_n + \Delta A_c(t))^T P (A_c + aI_n + \Delta A_c(t)) - r^2 P
 \end{aligned}$$

< 0

따라서, 보조정리 1에 의하여 시스템 (2)의 모든 극점은 $D(-\alpha, r)$ 내에 존재한다. 다음으로 조건 (12)를 만족하면 시스템 (2)는 안정함을 보인다. 조건 (12)와 보조정리 5에 의하여 다음을 얻는다.

$$A_c^T \bar{P} + \bar{P} A_c + \varepsilon_2 \left(\sum_{i=1}^m a_i^2(t) \sum_{i=1}^m E_i^T E_i \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \bar{P} \bar{P} < 0$$

여기에 관계식 (14)를 적용하면 다음을 얻게 된다.

$$A_c^T \bar{P} + \bar{P} A_c + \varepsilon_2 \Delta A_c^T(t) \Delta A_c(t) + \frac{1}{\varepsilon_2} \bar{P} \bar{P} < 0$$

그리고, 보조정리 3을 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 &A_c^T \bar{P} + \bar{P} A_c + \Delta A_c^T(t) \bar{P} + \bar{P} \Delta A_c(t) \\
 &= (A_c + \Delta A_c(t))^T \bar{P} + \bar{P} (A_c + \Delta A_c(t))
 \end{aligned}$$

< 0

따라서, Lyapunov 안정성 정리에 의하여 조건 (12)를 만족하면, 시스템 (2)는 안정하다. 이를 종합하면, 조건식 (11), (12)를 동시에 만족하는 양확정 행렬 P , \bar{P} 와 양의 상수 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 가 존재하면 구조적 불확정성 (4)를 갖는 페루프 시스템(2)의 모든 극점은 $D(-\alpha, r)$ 내에 존재하며, 또한 이 시스템은 강인 안정하다. ■■■

4. 강인 극점 제어기 설계

다음에 오는 정리 3은 시변 불확정성 (7)을 갖는 선형 시스템 (5)에 대하여 규정된 원판 $D(-\alpha, r)$ 내에 극점이 위치하게 하며 또한 안정성을 보장하는 제어기 (6)을 얻는 조건을 제시하고자 한다.

정리 3: 불확정성 (7)을 가지는 시스템 (5)를 생각하자. 다음의 두 LMI를 동시에 만족하는 양확정 행렬 $Q \in R^{n \times n} > 0$ 와 양의 스칼라 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ 그리고 임의의 행렬 $Y \in R^{m \times n}$ 가 존재하면

$$i) \begin{bmatrix} -r^2 Q & (A_a Q + BY)^T & QD \\ (A_a Q + BY) & -(Q - \varepsilon_1 E^T E) & 0 \\ QD^T & 0 & -\varepsilon_1 I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

$$ii) \begin{bmatrix} QA^T + AQ + Y^T B^T + BY + \varepsilon_2 DD^T & QE^T \\ EQ & -\varepsilon_2 I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

다음의 상태제한 제어기는

$$u(t) = Kx(t); \quad K = YQ^{-1}$$

불확정성 (7)을 가지는 선형 시스템 (5)의 모든 극점들 원판 $D(-\alpha, r)$ 의 내부에 위치하게하며 동시에 페루프 시스템의 안정성을 보장한다. 여기에서 $Q - \varepsilon_1 DD^T > 0$ 이다.

증명: 시변 불확정성 (7)을 가지는 선형 시스템(5)에 제어기 (6)을 적용하면 다음의 페루프 시스템을 얻는다.

$$\dot{x}(t) = (A + BK + \Delta A(t))x(t) \quad (17)$$

여기서 $\Delta A(t) = DF(t)E$; $F^T(t)F \leq I_n$ 이다. 다음으로 LMI (15)는 다음과 동치이고

$$\begin{aligned}
 &(A_a Q + BY)^T (Q - \varepsilon_1 E^T E)^{-1} (A_a Q + BY) \\
 &\quad + \varepsilon_1 QDD^T Q - r^2 Q < 0 \quad (18)
 \end{aligned}$$

행렬을 다음과 같이 $Q = P^{-1}$, $Y = KQ$ 치환하면, (18)의 행렬 부등식은 다음과 동치가 되고

$$\begin{aligned}
 &P^{-1} (A_a + BK)^T (P^{-1} - \varepsilon_1 E^T E)^{-1} (A_a + BK) P^{-1} \\
 &\quad + \varepsilon_1^{-1} P^{-1} DD^T P^{-1} - r^2 P^{-1} < 0
 \end{aligned}$$

이는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$P^{-1}[(A_o + BK)^T(P^{-1} - \epsilon_1 E^T E)^{-1}(A_o + BK) + \epsilon_1^{-1} DD^T - r^2 P]P^{-1} < 0$$

따라서, 위의 행렬 부등식으로부터 다음을 얻게된다.

$$(A_o + BK)^T(P^{-1} - \epsilon_1 E^T E)^{-1}(A_o + BK) + \epsilon_1^{-1} DD^T - r^2 P < 0 \quad (19)$$

또한, 보조 정리 4로부터, 다음의 관계가 성립하므로

$$(A_o + BK + \Delta A(t))^T P (A_o + BK + \Delta A(t)) - r^2 P \leq (A_o + BK)^T(P^{-1} - \epsilon_1 E^T E)^{-1}(A_o + BK) + \epsilon_1^{-1} DD^T - r^2 P \quad (20)$$

조건 (19)와 (20)으로부터 다음을 얻게되어

$$(A_o + BK + \Delta A(t))^T P (A_o + BK + \Delta A(t)) - r^2 P = (A + BK + \Delta A(t) + aI_n)^T P (A + BK + \Delta A(t) + aI_n) - r^2 P < 0$$

보조정리 1에 의하여 LMI (15)를 만족하면, 시스템 (17)의 모든 극점은 $D(-\alpha, r)$ 에 위치하게된다. 다음은 LMI (15)와 (16)으로부터 얻게되는 제어기 (6) (여기서 $K = YQ^{-1}$)를 가지는 페루프 시스템 (17)의 안정성을 증명한다. 먼저 이 시스템의 Lyapunov 후보함수를 다음과 같이 정하여 주고

$$V(x) = x^T P x$$

이의 궤적 (17)에 따른 시간 미분을 구하여 보면 다음을 얻는다.

$$\dot{V}(x) = x^T [A^T P + PA + K^T B^T P + PBK + \Delta A(t)^T P + P \Delta A(t)] x \quad (21)$$

또한, LMI (16)은 다음과 동치이고

$$QA^T + AQ + BY + Y^T B^T + \epsilon_2 DD^T + \epsilon_2^{-1} QE^T E Q < 0$$

여기서 $Q = P^{-1}$, $Y = KQ$ 이므로 이는 다음과 동치이며

$$P^{-1}[A^T P + PA + K^T B^T P + PBK + \epsilon_2 PDD^T + \epsilon_2^{-1} E^T E]P^{-1} < 0$$

위의 행렬 부등식은 다음의 행렬 부등식이 만족하면 항상 성립한다.

$$A^T P + PA + K^T B^T P + PBK + \epsilon_2 PDD^T + \epsilon_2^{-1} E^T E < 0$$

따라서 다음의 관계로부터

$$A^T P + PA + K^T B^T P + PBK + \Delta A(t)^T P + P \Delta A(t) \leq A^T P + PA + K^T B^T P + PBK + \epsilon_2 PDD^T + \epsilon_2^{-1} E^T E < 0$$

다음의 관계식이 성립함을 알 수 있다.

$$A^T P + PA + K^T B^T P + PBK + \Delta A(t)^T P + P \Delta A(t) < 0$$

따라서, 이를 수식 (21)에 적용하면

$$\dot{V}(x) < 0, x \neq 0$$

이 되게되어, Lyapunov 안정성 정리에 의하여 LMI (15), (16)을 만족할 때 제어기

$$u(t) = Kx(t); K = YQ^{-1}$$

를 가지는 페루프 시스템 (17)은 안정하다. 따라서 (15), (16)를 동시에 만족하는 $Q > 0$ 과 양의 스칼라인 ϵ_1, ϵ_2 가 존재하면 제어기 $u(t) = Kx(t); K = YQ^{-1}$ 를 가지는 시변 불확정성 선형 시스템(5)의 극점은 규정된 원판 $D(-\alpha, r)$ 에 위치하게되며 동시에 안정하다. ■■■

5. 수치 예제

예제 1: 여기에서는 위에서 얻어진 결과들의 유용성을 보이기 위하여 기존에 많이 고려된 다음의 불확정성 선형 시스템을 고려한다 [6,7].

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \Delta A_c(t)x(t) \quad (22)$$

여기서 페루프 시스템의 공칭 행렬 $A_c = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 는 $(-2, -1)$ 의 극점을 갖는 안정한 행렬이다.

먼저 불확정성 $\Delta A_c(t)$ 이 다음으로 기술되는 경우를 생각하자.

$$\|\Delta A_c(t)\| \leq \eta$$

여기에서의 문제는 위의 식으로 기술되는 불확정성의 존재에도 불구하고 시스템 (22)의 모든 극점이 규정된 원판 $D(-\alpha, r)$ 내에 존재하면서, 또한 이 시스템의 강인 안정성이 보장되는 불확정성의 최대 허용 바운드(η)를 구하는 것이다. 이는 정리1에서 얻어진 LMI 형태의 조건식 (8),(9)로부터 MATLAB의 LMI toolbox[14]를 이용하여 쉽게 얻게 되는데, 다음의 표 1은 구한 결과값을 기존의 결과값과 비교하여 놓은 표이다.

표 1 비구조적 불확정성의 강인 안정성 바운드(η)
Table 1 Robust stability bound for unstructured uncertainty

	$D(1.5, 1.0)$	$D(1.5, 1.4)$	$D(3.0, 2.5)$
Kim[11]	0.1403	0.2919	0.1996
Our result	0.2216	0.4706	0.2216

표 1에서 알 수 있듯이 기존의 결과값보다 본 논문에서 얻어진 불확정성의 최대 허용 바운드가 더 커짐을 알 수 있다. 또한 같은 중심점에서 반지름의 크기를 다르게 규정했을 때, 상대적으로 반지름이 큰 원판 내에 더 큰 불확정성의 허용 바운드를 포함할 수 있다는 것을 알 수 있다.

다음으로 불확정성 $\Delta A_c(t)$ 이 다음과 같이 기술되는 구조적 불확정성으로 표시되는 경우를 생각하자.

$$\Delta A_c(t) = a_1(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

위의 구조적 불확정성(23)을 갖는 시스템(22)의 모든 극점이 규정된 원판 $D(-\alpha, r)$ 내에 존재하면서 시스템의 안정성이 보장되는 불확정성의 최대 허용 바운드($\sum_{i=1}^m q_i^2(t)$)를 구하는 것이다. 마찬가지로 정리 2에 기술된 LMI 형태의 조건식 (11),(12)와 MATLAB의 LMI toolbox[14]를 이용하여 얻어진 구조적 불확정성의 강인 안정 바운드가 다음의 표 2이다.

표 2 구조적 불확정성의 강인 안정성 바운드($\sum_{i=1}^m q_i^2(t)$)
Table 2 Robust stability bound for structured uncertainty.

	$D(-1.5, 1.0)$	$D(-1.5, 1.4)$	$D(-3.0, 2.5)$
$\sum_{i=1}^m q_i^2(t)$	0.1734	0.3599	0.1734

예제 2: 강인 극점 제어기 설계를 위하여 다음과 같은

선형 시스템을 고려하기로 하자.

$$\dot{x}(t) = [A + DF(t)E]x(t) + Bu(t) \quad (24)$$

여기에서 $F(t)^T F(t) \leq I$ 이며, 주어지는 행렬은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} -2.8 & 2.3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = [0 \ 0.5], \quad (25)$$

또한, 주어진 시스템 행렬 A 의 고유치(eigenvalue)는 $\{-5.0639, 1.2639\}$ 이므로 개루프(open-loop) 시스템은 불안정하다. 위의 시스템(24)에 대하여 $D(-\alpha, r)$ 의 내부에 극점이 위치하도록 하게 하는 제어기 K 의 값과 구하여진 제어기를 갖는 시스템의 극점 위치를 구하여 보면 다음의 표 3과 같다.

표 3 영역 $D(-\alpha, r)$ 의 강인 극점 배치 제어기
Table 3 Robust pole assigned controller inside $D(-\alpha, r)$.

$(-\alpha, r)$	제어기 이득 K	행렬 $A + BK$ 의 극점
$(-1.5, 0.5)$	$\{-4.7046, 0.7461\}$	$\{-1.5383, -1.5156\}$
$(-1.5, 1.0)$	$\{-4.6608, 0.6765\}$	$\{-1.6772, -1.4483\}$
$(-3.0, 1.5)$	$\{-4.0195, -1.9142\}$	$\{-2.8571 \pm j0.2041\}$
$(-3.0, 2.5)$	$\{-3.7370, -1.5993\}$	$\{-3.4838, -1.9154\}$

그러므로, (24)와 같이 주어지는 불안정한 시스템이 제어기 K 를 갖음으로서 규정된 원판 내에 극점이 위치하며 안정함을 알 수 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 시변 불확정성을 갖는 선형 시스템의 강인 극점 배치에 관한 해석 및 설계를 다루었다. 먼저 시변 불확정성을 가지는 페루프 선형 시스템의 모든 극점이 주어진 원판내에 존재하면서 동시에 안정성을 보장하는 조건을 LMI형태로 제시하였다. 다음으로는 시변 불확정성을 가지는 제어 시스템의 모든 극점이 주어진 원판내에 존재하면서 동시에 안정성을 보장하도록 하는 제어기 설계에 관한 결과를 LMI형태로 제시하였다. 제시된 결과는 모두 LMI형태이므로 이를 이용하기에 매우 편리한 장점을 지닌다. 끝으로 수치예제를 통하여 제시된 결과의 유용성과 응용성을 보였다.

참 고 문 헌

[1] S. Gutman and E. I. Jury. "A General Theory for Matrix Root-Clustering in Subregions of The Complex Plane", *IEEE Trans Auto Contr.* Vol.AC-26. No.4. pp.853-863. 1981.

[2] K. Furuta and S. B. Kim, "Pole Assignment in a Specified Disk", *IEEE Trans. Auto Contr.*, Vol.32, No.5. pp.423-427, 1987

[3] S. B. Kim. and K. Furuta, "Regulator design with poles in a specified region", *Int. J. Control*, Vol.47, No.1, pp.143-160, 1988

[4] A. Rachid. "Robustness of pole assignment in a specified region for perturbed systems", *Int. J. Systems SCI*, Vol.21, No.3, pp.579-585, 1990.

[5] S. S. Wang and W. G. Lin. "On the Analysis of Eigenvalue Assignment Robustness", *IEEE Trans Auto Contr.*, Vol.37, No.10. pp.1561-1564. 1992.

[6] G. Garcia and J. Bernussou. "Pole Assignment for Uncertain Systems in a Specified Disk by State Feedback", *IEEE Trans Auto Contr.*, Vol.40. No.1. pp.184-190. 1995.

[7] R. K. Yedavalli and Y. Liu. " H_∞ Control with Regional Stability Constraints", *Automatica*, Vol.31. No.4. pp.611-615. 1995.

[8] S. O. E. Moheimani and I. R. Petersen. "Quadratic guaranteed cost control with robust pole placement in a disk", *IEE Proc. Control Theory Appl.* Vol.143. No.1. pp.37-43. 1996.

[9] A. R. S. Arar, and M. E. Sawan. "Relation between Pole-placement and Linear Quadratic Regulator for Discrete-time Systems", *J. Franklin Inst.* Vol.334B. No.4. pp.515-523. 1997.

[10] Y. Y. Cao, Y. X. Sun, and C. Cheng. "Delay-Dependent Robust Stabilization of Uncertain Systems with Multiple State Delays", *IEEE Trans Auto Contr.* Vol.43. No.11. pp.1608-1612. 1998.

[11] 김진훈, "시변 불확정성을 갖는 선형 시스템의 강인 극점 배치", *대한전기학회*, Vol.48A. No.1. pp.31-35. 1999.

[12] J. N. Franklin. "*Matrix Theory*", Prentice Hall, 1968.

[13] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. "*Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*", SIAM. 1994.

[14] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, Mathworks, Inc, 1995.

저 자 소 개



김재성 (金宰成)

1977년 2월 11일 생. 1998년 대전산업대 제어계측공학과 졸업. 2000년 충북대 제어계측공학과 졸업(석사). 현재 (주)인포피아 R&D 연구원

Tel : 02-529-2197(#107), Fax : 02-529-2235
E-mail : ipro@thrunet.com



김진훈 (金鎭勳)

1961년 10월 8일생. 1985년 서울대 전기공학과 졸업. 1985~1987년 신영전기(주) 연구원. 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1993년 동 전기 및 전자공학과 졸업(공학박). 1993~1994년

경상대 공대 제어계측공학과 전임강사. 1998~1999 UCI 방문교수. 현재 충북대 공대 전기전자공학부 부교수

Tel : 0431-261-2387, Fax : 0431-268-2386

E-mail : jinhkim@cbucc.chungbuk.ac.kr