

전압원이 인가된 도체 내에서의 와전류 분포 해석

論 文
49B - 1 - 2

Calculation of Eddy Current Distribution in Conducting Bulk with Voltage Source

金 度 完* · 鄭 炫 教** · 韓 松 擘***
(Do-wan Kim · Hyun-Kyo Jung · Song-Yop Hahn)

Abstract - When current flows through a thick conductor such, most of the current flows along outside of the conductor, which is called skin effect. This paper represents a method calculating such a current distribution in the conductor region. The conductor region is divided into some pieces and each piece has its own unknown variable, i.e. current density. The governing equation which expresses Maxwell's equation is combined with the circuit equation with voltage source. The combined equation is solved to obtain current distribution in the conductor. This algorithm is applied to EMC(Electromagnetic Casting) to calculate current density with voltage source.

Key Words : EMC, skin effect, voltage source

1. 서 론

대부분의 전기기기를 해석할 때 전압원을 인가 시에 생기는 전류를 계산하는 과정은 필수적이다. 전기기기 문제에서 전류는 소스로서 인가되는 전원전류와 자속이 도체를 쇠교할 때 발생하는 와전류로 구별할 수 있다. 전원전류는 전자장 방정식에서 전원으로 인가되는 전류로써 이미 값을 알고 있는 경우가 대부분이고, 와전류는 미지의 항으로써 지배방정식을 풀어서 계산될 수 있다. 와전류와 전원전류가 분리된 도체영역에서 이 값들을 계산하는 방법은 잘 알려져 있다. 그러나, 전압원이 인가된 도체영역이 있는 문제를 풀 때, 그리고 전압원의 주파수가 수 kHz 정도여서 표피효과를 고려해야 할 때, 그 도체내에서의 전류를 구하는 것은 쉽지 않다. 이 전류를 구하기 위한 방법으로 전원 도체 영역의 전류를 본래 전류와 와전류로 구별하여 전체 전류를 계산하는 방법이 있지만, 본래전류의 물리적 의미를 파악하는 것이 모호하다. 이에 본 논문에서는 전압원이 인가될 때 코일 또는 도체에 흐르는 전류를 와전류와 본래 전류를 합한 전체 전류를 구하는 방법을 제시한다. 먼저 전원 도체 영역을 여러 개의 소영역으로 나누고, 각 소영역은 하나의 전류밀도를 갖는 것으로 가정한다.

이 전류밀도를 미지수로 놓고 맥스웰 방정식에서 유도되는 지배방정식을 풀면 각 소영역에서의 전류밀도를 구할 수

있고 이를 합하면 도체영역의 전류분포를 구할 수 있다. 이상의 알고리즘을 EMC(Electromagnetic Casting)시스템의 코일의 전류분포를 계산하는데 적용하여 보았다. EMC 시스템이란 주로 철을 가공하기 위하여 몰드하는 기계로서 도체 영역에 전류를 흘려 그 열을 이용하여 철을 용융시키는 시스템이다. EMC의 전체 영역을 모델링하는 것은 상당히 복잡하므로 본 논문에서는 전류가 흐르는 영역을 간단하게 도체 덩어리로 모델링하여 그 각 부분의 전류분포를 계산해 보았다.

2. 정 식 화

전자장 해석과 관련된 여러 가지 필드 량을 표현하는 방정식들은 맥스웰 방정식으로부터 유도가 된다. 여기서 변위 전류는 무시할 하였는데 이는 전자기장의 파장의 길이가 실제 시스템의 크기와 비교하였을 때 매우 길면 준정적(quasi-static) 상태를 가정을 할 수 있기 때문이다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{source} + \vec{J}_{eddy} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

여기서 \vec{H} : 자계의 세기[A/m]
 \vec{J}_s : source 전류 밀도[A/m²]
 \vec{J}_e : 와전류 밀도[A/m²]
 \vec{E} : 전계의 세기 [V/m]
 \vec{B} : 자속밀도 [T]

* 準 會 員 : 서울大 電氣工學部 博士課程
 ** 正 會 員 : 서울大 電氣工學部 副教授 · 工博
 *** 正 會 員 : 서울大 電氣工學部 教授 · 工博
 接受日字 : 1999年 7月 6日
 最終完了 : 1999年 12月 7日

자성체의 구성 방정식은 다음과 같다.

$$\vec{H} = \nu \vec{B} \quad (4)$$

여기서 ν : 자기저항율(reluctivity)

적당한 경계조건을 부여하여 식(1)~(4)를 바로 풀면 필드량을 구할 수 있지만, 경계 조건 및 해의 유일성 등에 대한 조건을 부여하기 쉽고 수치 해석시의 정식화를 쉽게 하기 위해서 자기 벡터 포텐셜(magnetic vector potential)을 이용하여 \vec{B} 를 다음과 같이 정의한다[3].

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (5)$$

이제 포텐셜을 이용하여 식(1)~(5)를 정리하여 다시 쓰면 식(6)이 된다.

$$\nabla \times \nu \nabla \times \vec{A} = \vec{J}_{source} + \vec{J}_{eddy} \quad (6)$$

여기서 전원전류밀도 \vec{J}_{source} 와 와전류 밀도 \vec{J}_{eddy} 를 통틀어서 전체전류밀도 \vec{J}_{total} 이라 놓으면 이 전류 밀도가 실제로 도체에 흐르는 것이 되며 그 값을 계산하면 전류 분포를 알 수 있다[4]. 본 논문에서는 전체전류를 와전류와 전원전류로 분리하지 않고 전체전류로 놓고서 방정식을 풀었다. 즉

$$J_{total} = \sum_{i=1}^N J_i = \sum_{i=1}^N \frac{I_i}{\Delta_i} \quad (7)$$

여기서 N 은 도체영역을 나누었을 때 생기는 소영역 수이고 Δ_i 는 소영역의 면적이다. 즉 이 문제는 도체덩어리를 N 개의 병렬회로로 치환해서 푸는 문제라고도 할 수 있다 [5]. 도체는 z 축 방향으로 길다고 가정하고 2차원으로 모델링한다. 또한 도체 끝단의 엔드 누설은 무시하고 문제의 대칭성에 의해 $\nabla \phi$ 는 0이 된다. 따라서 식 (6)의 지배방정식을 다시 쓰면

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J_{s1} - J_{s2} \dots - J_{sm} \quad (8)$$

여기서 미지수는 각 소영역의 전류이므로 식(8)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{I_{s1}}{\Delta_1} + \dots + \frac{I_{sm}}{\Delta_n} = 0 \quad (9)$$

위 식에 Galerkin's 정식화 과정을 적용하여 행렬방정식 형태로 쓰면 다음과 같다[1].

$$[[K] \quad [S]] \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

식(10)의 행렬방정식에서 각 요소는 다음과 같이 계산된다.

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \frac{1}{\mu_e} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} dx dy \quad (11)$$

$$S_{kj} = \frac{1}{3} \quad (12)$$

여기서 식 (13)과 같은 삼각형상함수를 사용하였다.

$$A_x = \sum_{j=1}^3 N_j A_{xj} \quad (13)$$

$$N_j = \frac{1}{2\Delta_e} (a_j + b_j x + c_j y) \quad (j=1, 2, 3) \quad (14)$$

따라서 식(11)은 다음과 같이 구해진다.

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta\mu_e} (b_i b_j + c_i c_j) \quad (15)$$

위 식(10)에서 미지수 그룹은 벡터 포텐셜 \vec{A} 와 도체의 전류 I_i 이다. 즉 위 식에서 계수행렬은 미지수가 $n + m$ 이므로 (n 은 절점수, m 은 전류 소영역수)이므로 m 개의 방정식이 더 필요하게 되는데 이는 회로방정식으로부터 유도된다[2].

외부전압원을 V , 코일의 총 저항을 R , 구성된 회로를 지나가는 자속을 Φ 라 할 때 회로방정식은

$$V = RI + N \frac{d\Phi}{dt} \quad (16)$$

와 같다. 여기서 도체 끝단의 누설은 무시하였다. 전압, 전류가 정현적으로 변한다면 시간미분항 $\frac{\partial}{\partial t}$ 는 $j\omega$ 항으로 바뀌게 되어 식 (16)은 다음 식으로 된다.

$$V = R_i I_i + j\omega N \frac{1}{\Delta_e} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_e} N_i dx dy A_i \quad (17)$$

식 (17)에서 l 은 도체의 축방향 길이를 뜻한다. 또한 저항 R_i 는 소영역마다 다른데 이는 같은 도체이지만 path의 둘레와 단면적이 다르기 때문이다. 즉 도체의 안쪽 면을 도는 path는 그 길이가 바깥쪽 path보다 짧기 때문에 같은 단면적이라면 저항이 작게 된다. 행렬 방정식(10)을 대칭적으로 만들기 위하여 (17)을 $j\omega l$ 로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{V}{j\omega l} = \frac{R_i}{j\omega l} I_i + \frac{1}{\Delta_e} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_e} N_i dx dy A_i \quad (18)$$

이를 행렬방정식으로 쓰면

$$[S]^T [A] + [Z][I] = [V] \quad (19)$$

여기서

$$Z_{ij} = \frac{R_i}{j\omega l} \delta_{ij} \quad (20)$$

$$V_j = \frac{V_{source}}{j\omega l} \frac{A_i}{3} \quad (21)$$

와 같다. 그리하여 식 (19)과 식 (10)을 결합하면 유도전 동기 선형해석을 위한 시스템방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} [K] + [T] \\ [S]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [S] \\ [Z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A] \\ [I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ [V] \end{bmatrix} \quad (22)$$

3. 사례 적용

본 논문에서 제시한 알고리즘을 EMC (Electromagnetic Casting) 시스템의 전류분포를 계산하는데 적용하여 보았다. EMC 시스템이란 주로 철을 가공하기 위하여 물딩하는 기계로서 도체에 전류를 흘려서 그 열로써 철을 용융시킨다. 전체 시스템 중 도체영역만을 모델로 선정하여 그 전류분포를 계산하였다. 그림 1은 표피효과를 고려할 수 있는 간단한 도체 덩어리 모델이다. 속이 철이 흐르는 육면체가 있고 그 주위를 도체가 둘러싸고 있다. 단 내부의 철은 고온의 용융 상태이므로 그 전자기적 특성 파악이 곤란하여 여기서는 고려하지 않았다. 이 도체에 전압원이 인가된다고 가정한다. 이 때 전류는 육면체의 둘레로 흐르게 되며 이 전류분포를 구하는 것이 목표이다. 문제를 단순화하기 위하여 모델정면의 가로와 세로는 각각 30x10[mm]로, 지면 방향의 길이는 100[mm]로 가정하였다. 전압원은 220[V]에 60[Hz]가 인가된다.

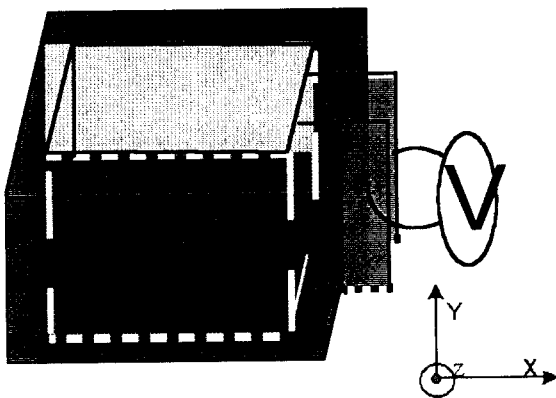


그림 1 해석 도체모델
Fig. 1 The conductor model for analysis

그림 1의 모델은 대칭성이 존재하므로 전 영역을 다 풀 필요가 없다. 즉 대칭성을 이용하여 x 축에 수직인 평면과 y 축에 수직인 평면 그리고 z 축에 수직인 평면으로 각각 잘라서 전체 영역의 1/8 만 풀면 된다. 즉 2차원 평면으로 모델링하므로 그림 2의 점선 부분만을 풀면 되는 것이다. 점선 부분에는 도체영역과 도체로 둘러싼 내부의 빈 공간 뿐 아니라 외부의 공기 영역도 포함되어야 하는데 이는 외곽 경계 조건을 주기 위한 것이다.

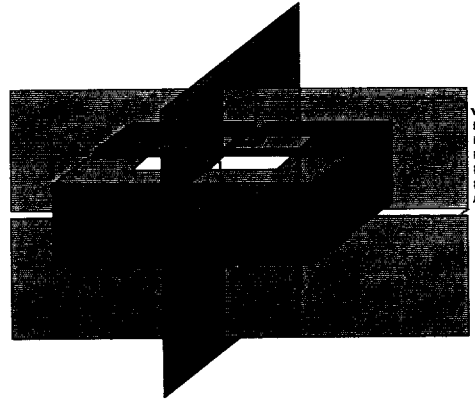


그림 2 대칭성을 이용한 1/8 모델
Fig. 2 1/8 Model using symmetry

위 모델에서 도체 전체의 저항을 간단히 계산해 보면 도체의 단면적이 $10 \times 10 = 100 [mm^2]$ 이고 지면 방향 길이가 $100 [mm]$ 이므로 그 둘레는 대략 $260 [mm]$ 정도가 된다. 구리의 도전율이 $5.8 \times 10^7 [ohm - m]^{-1}$ 이므로 도체의 저항은

$$R_s = \frac{100 \times 2 + 30 \times 2}{10 \times 10} \cdot \frac{1000}{5.8 \times 10^7} \quad (23)$$

$$= 4.48 \times 10^{-5} [Ohm]$$

물론 이 값은 도체 전체의 대략적인 저항이고 정식화 과정에서 저항은 각 소영역별로 그 면적과 길이를 사용하여 계산하므로 각 소영역마다 다른 값을 갖는다.

그림 2의 점선 부분을 2차원으로 모델링하여 메시로 나눈다. 그림 3이 그것인데 중간부분의 위쪽 점선 영역은 공기이고 아래쪽 점선 영역이 도체가 된다. 그 외의 영역은 모두 공기로 처리된다.

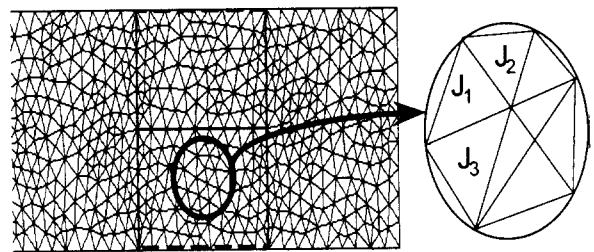


그림 3 해석 모델의 요소분할도
Fig. 3 Mesh shape of the model

그림 3의 모델은 x축 방향 길이가 30[mm], y축 방향이 10[mm]이다. 즉 전체 사각형의 맨 왼쪽 아래 점을 좌표평면에 (0,0)으로 표시하면 맨 위쪽 오른쪽 점은 좌표 값으로는 (30,10)이 된다. 또, 도체영역은 (10,0)과 (20,5)를 양끝으로 갖는 사각형이고 나머지는 공기 영역이다. 도체영역을 확대해보면 여러 개의 소영역들로 구성되어 있는데 각 소영역은 상수의 전류밀도를 갖는다. 이 전류밀도가 미지수로써 지배

방정식에 포함되며, 이를 계산하면 전체 도체의 전류밀도를 구할 수 있게 된다.

이 모델을 유한요소 해석한 결과는 다음과 같다. 그림 4는 주파수 60[Hz]일 때의 자속분포도이고 그림 5는 이 때 x축 방향을 따라가면서 그린 전류밀도의 절대치 즉 $|J|$ 이다.

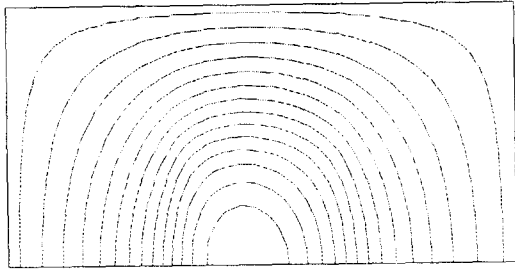


그림 4 주파수 60[Hz]일 때의 자속분포도
Fig 4 Flux pattern at 60[Hz]

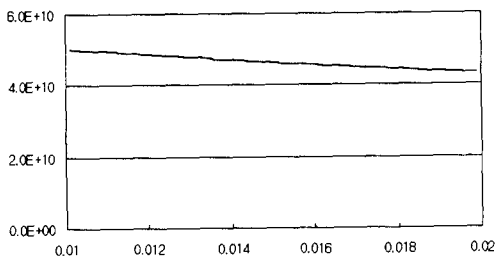


그림 5 주파수 60[Hz]일 때의 전류밀도 분포
Fig 5 Current distribution at 60[Hz]

그림 4의 중간부분에 색칠된 부분이 도체 영역이고, 주파수가 낮으므로 자속이 도체내부에도 쉽게 침투하는 것을 볼 수 있다. 그림 5에서는 전류밀도가 x축에 따라서 약간씩 감소하는데 이는 도체의 바깥부분(x값이 큰 부분)의 저항이 그 둘레가 길어지므로 증가하기 때문이다. 즉 같은 전압원이 인가되는데 바깥둘레의 저항이 크므로 전류가 작아진다. 그림 6과 7은 주파수 600[Hz]일 때 자속과 전류분포의 그림이다.

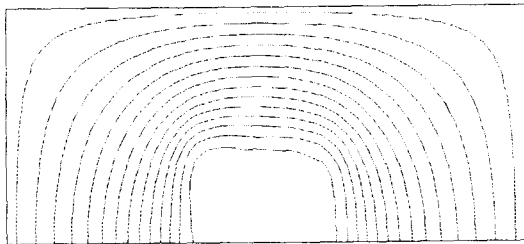


그림 6 주파수 600[Hz]일 때의 자속분포도
Fig 6 Flux pattern at 600[Hz]

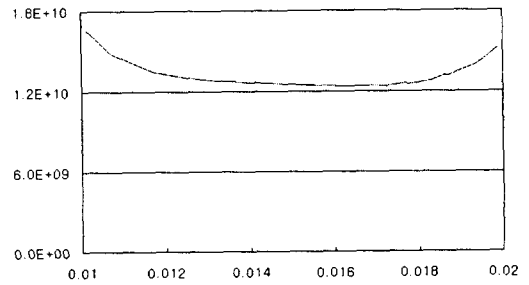


그림 7 주파수 600[Hz]일 때의 전류밀도 분포
Fig 7 Current distribution at 600[Hz]

그림 6을 보면, 60[Hz]인 경우보다 주파수가 높아졌으므로 자속이 도체 중심으로 투과하지 못하고 바깥으로만 흐른다. 또한 그림 7에서 x축을 따라서 전류밀도의 분포를 살펴보면, 도체의 바깥쪽이 안쪽보다 더 큰 것을 알 수 있다. 이는 주파수가 상승함으로써 도체의 표피효과 때문에 전류가 바깥쪽으로 흐르기 때문이다.

주파수를 더 높여서 6000[Hz]인 경우를 풀어보면 그림 8과 9를 얻을 수 있다.

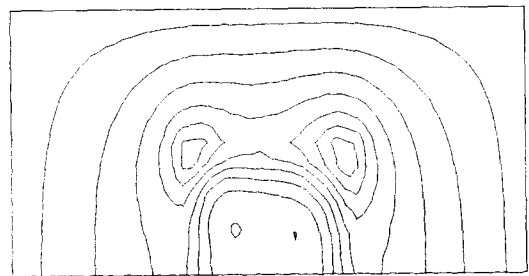


그림 8 주파수 6000[Hz]일 때의 자속분포도
Fig 8 Flux pattern at 6000[Hz]

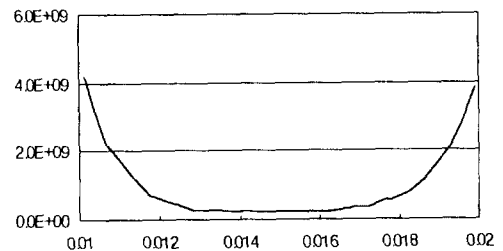


그림 9 주파수 6000[Hz]일 때의 전류밀도 분포
Fig 9 Current distribution at 6000[Hz]

그림 8의 자속분포도는 600[Hz]인 경우보다 표피효과에 의해서 자속이 도체의 끝단으로 더욱 더 몰리는 것을 볼 수 있다. 즉, 표피효과 때문에 자속이 도체 내부로 거의 침투하지 못하는 것을 볼 수 있다[6]. 그림 9의 전류분포를 보면 도체의 내부에는 거의 전류가 흐르지 않고 외부로 대부분이

흐르는 것을 알 수 있다. 그림 7의 주파수 600[Hz]인 경우와 그림 9의 6000[Hz]인 경우를 수치 값으로 비교하기 위해서는 교류저항을 계산해 보면 된다. 즉 실제로 전류가 많이 흐르는 path에 많은 가중치를 두어서 저항을 계산해보면 두 경우의 차이를 수치 값으로 알 수 있다. 이상의 결과는 EMC제작의 기초 연구로써 실제의 완제품과 비교를 위해서는 3차원 형상과 여러 재질들의 특성을 고려할 필요가 있다. 위의 결과는 도체 영역의 대략적인 전류분포를 예측하는데 도움이 될 수 있다.

4. 실효저항의 계산

위의 결과를 이용하여 주파수의 변화에 따른 전류와 교류저항을 계산할 수 있다. 즉 같은 형상이지만 주파수가 높아지면 전류가 흐르는 통로가 좁아지므로 저항이 증가하게 되고 이에 따라 전류도 달라지게 된다. 각 주파수에 따른 전류는 식 (24)-(26)과 같다.

$$I_{f60} = (4.4 + j1.5) \times 10^6 = 4.65 \times 10^6 \angle 19^\circ \quad (24)$$

$$I_{f600} = (4.85 + j3.07) \times 10^5 = 14 \times 10^5 \angle 70^\circ \quad (25)$$

$$I_{f6000} = (2.14 + j17.4) \times 10^4 = 17.5 \times 10^4 \angle 83^\circ \quad (26)$$

위 식에서 전류 값은 도체부분의 각 소영역의 전류밀도에 단면적을 곱한 값을 합하여 간단히 구할 수 있다. 각 전류의 첨자들이 주파수를 뜻한다. 이를 주파수에 따라 비교해보면 고주파일수록 전류의 절대값이 작고 위상 또한 90도에 가까운 것을 알 수 있다. 이는 위의 모델을 등가회로로 꾸몄을 때 R-L 회로로 생각할 수 있으며, 주파수의 증가에 따라서 인덕턴스와 저항이 변화하고 특히 리액턴스는 비례하여 증가했기 때문이다.

도체의 전류분포가 상수가 아닐 때 임의의 도체에서의 실효저항은 식 (27)과 같이 계산할 수 있다.

$$R_{total} = \frac{\sum_{k=1}^N I_k^2 \times R_k}{I_{total}^2} \quad (27)$$

위의 모델에 대하여 직류전류가 흐른다고 가정할 때의 저항은 간단히 앞의 식 (23)과 같이 계산할 수 있다.

$$R_f = \frac{100 \times 2 + 30 \times 2}{10 \times 10} \cdot \frac{1000}{5.8 \times 10^7} = 4.48 \times 10^{-5} [Ohm] \quad (28)$$

주파수 60[Hz]의 교류전류가 흐를 때 식 (27)을 이용하여 계산하면 식 (29)와 같다.

$$R_{f60} = 4.50 \times 10^{-5} [Ohm] = 100[\%] \quad (29)$$

여기서 [%]로 표시한 것은 직류가 흐를 경우의 저항을 기준으로 한 것이다.

주파수가 600[Hz]일 때와 6000[Hz]일 때의 교류저항은 식 (30)-(31)과 같다.

$$R_{f600} = 5.49 \times 10^{-5} [Ohm] = 123.3[\%] \quad (30)$$

$$R_{f6000} = 1.53 \times 10^{-4} [Ohm] = 343.8[\%] \quad (31)$$

즉 주파수가 높아질수록 저항의 증가가 심해지며, 주파수 6000[Hz]에서는 저항이 직류일 때보다 약 3배 이상 증가함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 전압원이 인가된 도체에서의 와전류 분포를 계산하였다. 맥스웰 방정식으로 표현되는 지배방정식은 전압원 회로방정식과 결합되었다. 도체영역은 여러 개의 소영역으로 나뉘었으며 각 소영역은 고유의 전류밀도를 갖고 이것을 미지수로 하여 시스템 방정식을 풀면 전류분포를 구할 수 있다. 이 전류분포는 지금까지 널리 알려진 바와 같이 전류분포와 와전류를 분리해서 계산하는 것이 아니라, 이를 하나로 통합하여 구하는 전류이다. 이 알고리즘을 도체 덩어리에 적용하여 해석한 결과 주파수가 높은 경우에는 표피효과를 나타낼 수 있었다. 그리고 여러 가지 주파수에 대하여 실효저항을 계산하였다. 본 알고리즘은 와전류를 계산해야 하는 여러 가지 전기기기의 해석에 도움이 될 것이다.

참 고 문 헌

- [1] T. Nakada, N.Takahashi and K. Fujiwara, "Efficient Solving Techniques of Matrix Equation for Finite Element Analysis of Eddy Currents," IEEE Trans. On Mag., MAG-24, No.1, pp.170-173, January 1988.
- [2] D. Shen, G. Meunier, J. L. Coulomb, and J.C. Sabonnadiere, "Solution of Magnetic Field and Electrical Circuits Combined Problems," IEEE Trans. On Mag., MAG-21, No 6, pp.2288-2291, 1985.
- [3] K.Preis, I.Bardi, O.Biro and C.Magele, "Different Finite Element Formulation of 3D Magnetostatic Fields," IEEE Trans. On Mag., MAG-28, No 2, pp.1056-1059, 1992.
- [4] R. L. Ferrari and A. R. Pinchuk, "Complimentary Variational Finite-Element Solution of Eddy Current Problems Using Field Variables," IEEE Trans. On Mag., MAG-21, No 6, pp.2242-2245, 1985.
- [5] Kurt Preis, Istvan Bardi, Oszkar biro and Kurt R. Richter, "Nonlinear Periodic Eddy Currents in Single and Multi-conductor Systems," IEEE Trans. On Mag., MAG-32, No 3, pp.780-783, 1996.
- [6] Katsumi Yamazaki, "2D Induction Motor Analysis Coupled to Modified Rotor Cage Circuit Considering Skin Effect Estimated by Regional 3D analysis," CEFC Conference, Tucson Arizona, 1996.

저 자 소 개



김도완(金度完)

1971년 3월 6일 생. 1994년 서울대 공대 전기공학과 졸업(학사). 1996년 동 대학원 졸업(석사). 현재 동 대학원 박사과정.

Tel : 02-880-7262

E-mail : gil2000@plaza.snu.ac.kr



한송엽(韓松曄)

1939년 3월 14일 생. 1963년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1968년 동 대학교 전임강사.

1979년 프랑스 로렌공과대학 대학원 졸업(공박). 1995년 당 학회 회장. 1995년-1996년 서울대 공대 학장. 현재 서울대 전기공학부 교수

Tel : 02-889-7246

E-mail : syhahn@plaza.snu.ac.kr



정현교(鄭炫敎)

1955년 8월 17일 생. 1979년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1984년 동 대학원 전기공학과 졸업(공박). 1987년-1989년 뉴욕 Polytechnic Univ. 객원 교수. 1984년-1993년 강원대 전기공학과 교수. 현재 서울대 전기공학부 부교수

Tel : 02-880-7242

E-mail : hkjung@plaza.snu.ac.kr