Comm. Korean Math. Soc. **15** (2000), No. 2, pp. 325–330

등근공에 가까운 볼록폐곡면

임 지 선, 고 성 은

요약문. 3차원 Euclid 공간의 볼록폐곡면의 평균곡률과 Gauss 곡률의 비가 상수함수와 충분히 가까우면 그 곡면은 중심이 같고 반지름이 거의 같은 두 개의 등근공 사이에 놓이게 됨을 보였다.

1. 소개

잘 알려진 바와 같이 3차원 Euclid 공간의 폐곡면 M 의 Gauss 곡률 K 가 상수이거나 평균 곡률 H 가 상수이면 M 은 등근공이다. 또 두 곡률의 비 H/K 가 상수이어도 등근공이다. 그러면, 폐곡면 M 에서 정의되어 있는 세 개의 곡률함수 K, H, H/K 가 상수는 아닐지라도 상수함수에 가까우면 M 은 적당한 의미로 등근공에 가까울 것인가 하는 질문이 자연스럽다.

D. Koutroufiotis 는 앞의 세 가지 함수의 경우 모두에 대하여 긍정적인 답을 얻었고 [**1**], J. D. Moore 는 K, H 의 경우에 대하여 긍정적인 답을 얻었다 [**2**]. Moore 가 사용한 방법을 따르면 곡률함수가 어느 정도로 상수함수에 가까우면 주어진 폐곡면이 어느 정도로 등근공에 가까운가를 계산할 수 있는 반면, Koutroufiotis 가 사용한 방법으로는 이러한 어림 계산이 가능하지 않아 보인다. 이러한 이유로 이 논문에서는 Moore 의 방법이 곡률함수 H/K 에 대해서도 적용될 수 있는가의 여부를 알아보았으며 그 결과를 정리하면 다음과 같다.

Received July 8, 1999. Revised January 4, 2000.
2000 Mathematics Subject Classification: 53A40, 53C42.
Key words and phrases: Gauss 곡률, 평균곡률, Minkowski 공식.
이 연구는 KOSEF 96-0701-02-01-3 의 지원을 받았음.

정리 1. 주어진 ε 에 대하여 다음을 만족하는 $\delta(\varepsilon) > 0$ 가 존재한다:

$\mathbb{R}^3$ 의 볼록폐곡면 M 의 평균 곡률 H 와 GAUSS 곡률 K 의 비 H/K 가 부등식

$$\left|\frac{H}{K} - 1\right| < \delta(\varepsilon) \tag{1}$$

을 만족시키면, M 은 중심이 같고 반지름이 각각 $1-\varepsilon$, $1+\varepsilon$ 인 두 개의 둥근공 사이에 존재한다.

주어진 ε 에 대한 $\delta(\varepsilon)$ 의 값을 계산하는 것이 가능함은 이 정리의 증명과정에서 자연스럽게 밝혀질 것이다.

2. 증명에 필요한 사실들

M 을 $\mathbb{R}^3$ 의 볼록폐곡면이라고 하고 M 의 주곡률함수 k_1, k_2 에 대하여 $r_i = 1/k_i$ $(i = 1,\ 2)$ 라고 하자. M 은 볼록폐곡면이므로 Hadamard 정리로부터 M 의 Gauss 사상 $n : M \to S^2$ 는 미분가능한 역사상을 갖고 따라서 r_i 를 S^2 에서 정의된 함수로 이해할 수 있다. 여기에서 n은 M 의 안쪽을 향하는 단위법벡터를 평행이동한 것이다.

보조정리 1. ([2, p. 351]) 계산가능한 상수 a 에 대하여

$$\int_{S^2} \max\{|\,r_1(x) - 1\,|,\ |\,r_2(x) - 1\,|\}\, dM < a\varepsilon^3 \tag{2}$$

이면 M 은 중심이 같고 반지름이 각각 $1-\varepsilon$, $1+\varepsilon$ 인 두 개의 둥근공 사이에 존재한다. □

이제 h 를 M 의 받침함수(support function)라고 하면 h 도 역시 S^2 에서 정의된 함수로 이해할 수 있다. 또, $\sigma_1 = (r_1 + r_2)/2 = H/K$, $\sigma_2 = r_1 r_2 = 1/K$ 이라고 하면 다음 등식이 성립한다.

보조정리 2.

$$\int_{S^2} \sigma_1 \, dM = \int_{S^2} h \, dM, \tag{3}$$

$$\int_{S^2} \sigma_2 \, dM = \int_{S^2} h \, \sigma_1 \, dM. \tag{4}$$

증명. 곡면 M 의 안쪽을 향하는 단위법벡터를 이용하여 방향을 정의하였으므로 다음 Minkowski 공식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_M h \, H \, dM &= \int_M dM, \\ \int_M H \, dM &= \int_M h \, K \, dM. \end{aligned}$$

미분동형사상 $n^{-1} : S^2 \to M$ 은 Gauss 사상의 역사상이므로 n^{-1} 의 Jacobian determinant는 $1/K$ 이다. 따라서, 치환적분 공식으로부터 등식

$$\begin{aligned} \int_M h \, H \, dM &= \int_{S^2} h \frac{H}{K} \, dM = \int_{S^2} h \, \sigma_1 \, dM, \\ \int_M dM &= \int_{S^2} \frac{1}{K} \, dM = \int_{S^2} \sigma_2 \, dM, \\ \int_M H \, dM &= \int_{S^2} H \frac{1}{K} \, dM = \int_{S^2} \sigma_1 \, dM, \\ \int_M h \, K \, dM &= \int_{S^2} h \, dM \end{aligned}$$

이 성립하고, 따라서 (3), (4)식이 성립한다. □

3. 정리의 증명

$M \subset \mathbb{R}^3$ 을 매끄러운 볼록폐곡면이라 하고, 조건 (1)을 만족하는 $\delta(\varepsilon) > 0$ 이 존재한다고 가정하자. $\delta = \delta(\varepsilon)$ 라 놓고, (1)을 다시 쓰면 다음을 얻는다.

$$1 - \delta < \sigma_1 < 1 + \delta. \tag{5}$$

또, (산술평균)≥(기하평균)이므로 다음 부등식도 성립한다.

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2. \tag{6}$$

방정식 $r^2 - 2\sigma_1 r + \sigma_2 = 0$ 의 근을 구하면 $r_i = \sigma_1 \pm \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2}$ 이므로

$$\max\{|r_1(x) - 1|,\ |r_2(x) - 1|\} = |\sigma_1 - 1| + \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2} \tag{7}$$

을 얻는다.
한편, (5)식으로부터 다음 부등식을 얻는다.

$$\int_{S^2} |\sigma_1 - 1|\, dM < \delta \int_{S^2} dM = 4\pi\delta = g_1(\delta). \tag{8}$$

이 때, $\delta \to 0$ 이면, $g_1(\delta) \to 0$ 이다.
다시 (5)식으로부터 다음을 얻는다.

$$\sigma_1^2 - \sigma_2 < (1+\delta)^2 - \sigma_2 = (1 + \delta - \sqrt{\sigma_2})(1 + \delta + \sqrt{\sigma_2}). \tag{9}$$

폐곡면 M 안에 원점이 놓인다고 가정하여도 상관없다. 그러면 $h > 0$ 이므로 (4), (5), (3)을 차례로 적용하면

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \sigma_2\, dM &= \int_{S^2} h\,\sigma_1\, dM \\ &> (1-\delta) \int_{S^2} h\, dM = (1-\delta) \int_{S^2} \sigma_1\, dM \end{aligned} \tag{10}$$

을 얻을 수 있다.
이제 $(1 + \delta - \sqrt{\sigma_2})$ 의 적분값을 먼저 생각해보자.

앞의 (5), (6), (10) 을 이용하면

$$
\begin{aligned}
\int_{S^2}(1+\delta-\sqrt{\sigma_2})\,dM &< \frac{1}{1-\delta}\left[\int_{S^2}[(1+\delta)\sigma_1-\sigma_1\sqrt{\sigma_2}\,]\,dM\right]\\
&< \frac{1}{1-\delta}\left[\int_{S^2}(1+\delta)\sigma_1\,dM-\int_{S^2}\sigma_2\,dM\right]\\
&< \frac{2\delta}{1-\delta}\int_{S^2}\sigma_1\,dM\\
&< \frac{2\delta(1+\delta)}{1-\delta}\int_{S^2}dM\\
&= \frac{8\pi\delta(1+\delta)}{1-\delta}=g_2(\delta).
\end{aligned}\tag{11}
$$

이 때, $\delta\to 0$ 이면, $g_2(\delta)\to 0$ 이다. 한편, 부등식 (11), (6), (5)로부터

$$
\begin{aligned}
\int_{S^2}(1+\delta+\sqrt{\sigma_2})\,dM &< g_2(\delta)+2\int_{S^2}\sqrt{\sigma_2}\,dM\\
&\le g_2(\delta)+2\int_{S^2}\sigma_1\,dM\\
&< g_2(\delta)+8\pi(1+\delta).
\end{aligned}\tag{12}
$$

이제 (9)에 Cauchy-Schwarz 부등식을 적용하고, (11), (12)를 이용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&\int_{S^2}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2}\,dM\\
&< \left[\int_{S^2}(1+\delta-\sqrt{\sigma_2})\,dM\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{S^2}(1+\delta+\sqrt{\sigma_2})\,dM\right]^{\frac{1}{2}}\\
&< \{g_2(\delta)[g_2(\delta)+8\pi(1+\delta)]\}^{1/2}=g_3(\delta).
\end{aligned}\tag{13}
$$

이 때, $\delta\to 0$ 이면, $g_3(\delta)\to 0$ 이다. 이제, 식 (7), (8), (13)으로부터

$$
\int_{S^2}\max\{|\,r_1(x)-1\,|,\ |\,r_2(x)-1\,|\}\,dM < g_1(\delta)+g_3(\delta)=g(\delta)
$$

이고, $\delta\to 0$ 이면 $g(\delta)\to 0$ 이다.

주어진 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $g(\delta) < a\varepsilon^3$ 이 되도록 $\delta(0 < \delta < 1)$ 를 선택하자. 그러면 (보조정리 1)에 의하여 M 은 중심이 같고 반지름이 각각 $1-\varepsilon$ 과 $1+\varepsilon$ 인 두 개의 동근공 사이에 존재함이 증명된다. □

참고문헌

[1] D. Koutroufiotis, *Ovaloids which are almost spheres*, Comm. Pure Appl. Math. **24** (1971), 289-300.

[2] J. D. Moore, *Almost spherical convex hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **180** (1973), 347-358.

서울시 광진구 화양동 1번지
건국대학교 이과대학 수학과
E-mail: jslim@kkucc.konkuk.ac.kr
sekoh@kkucc.konkuk.ac.kr