Comm. Korean Math. Soc. **15** (2000), No. 2, pp. 233–255

초청논문

계치부분군과 G-열의 일반화

우 무 하, 이 기 영

요약문. 이 논문에서 계치부분군의 일반화와 이들을 이용한 G-열의 도입과정을 다룬다. 계치부분군과 일반화된 계치부분군 그리고 호모토피군의 차이를 설명하며 몇가지 공간의 계치부분군을 계산한다. 그리고 G-열이 완전열이 되기 위한 조건들을 조사하고 이 완전성을 이용하여 계치부분군의 계산과 함수의 단사성과 그 함수의 G-열의 완전성과의 상호 관련성을 보인다. 마지막으로 G-열의 일반화와 쌍대 G-열을 다룬다.

1. 서론

이 논문은 계치부분군의 일반화와 G-열에 관하여 현재까지 연구된 내용을 정리한 것이다. Gottlieb([5]-[9])가 호모토피군의 부분군으로 계치부분군(또는 Gottlieb 군)을 도입하여 파이버화 이론, 닐슨형의 부동점이론, 공간들의 분류에 많이 활용하였다. 예를 들면,

(1) 유한복합체의 계치부분군이 자명군이 아니면 이 복합체의 Euler 특성수가 영이다.

Received April 1, 2000. Revised April 21, 2000.

1991 Mathematics Subject Classification: 55P45.

Key words and phrases: 계치부분군, G-열, ω-호몰로지, 일반화된 G-열, 쌍대 G-열.

1999년 한국학술진흥재단 지원에 의하여 이루어진 것임.

(2) 어떤 공간의 n차 계치부분군이 자명군이 된다면 이 공간을 화이버로 가지는 S^{n+1} 상의 모든 화이버공간은 절단면을 가진다.

(3) 만약 어떤 공간의 계치부분군의 Hurewicz 준동형사상에 의한 상이 호몰로지군의 생성자를 포함한다면 이 공간은 S^n과 호모토피 동형이다.

많은 학자(Kim[13], Lang[14], Lee([15]-[21]), Oda[23], Opera[24], Siegel [28], Varadarajan[29], Woo[15-21,25-27,31-32], Zhao[33])들이 이 계치부분군의 개념을 연구하고 일반화시켜 왔으나 아직까지 극소수 공간의 계치부분군을 계산하는 데 그쳤다. 위에서 보인 것과 같이 계치부분군은 위상수학에 매우 유용한 이론임에도 불구하고 그 활용이 부진한 것은 계치부분군의 계산이 어렵다는 데 있다. 따라서 이 논문에는 호모토피열이 호모토피군의 계산과 호모토피 문제해결에 유용하게 활용되는 것처럼 계치부분군들로 구성되는 G-열을 도입하므로 계치부분군의 계산과 함수의 호모토피 단사성의 결정에 유용하게 활용됨을 보인다.

이와 같은 G-열을 도입하기 위하여 우선 계치부분군부터 소개하기로 한다. 이 논문에서 모든 공간은 호상연결이고 CW복체를 가정한다.

2. 계치부분군

2.1. $G(X, x_0)$의 도입

호모토피 $h_t : X \to X$가 $h_0 = h_1 = 1_X$를 만족할 때 **순환호모토피**(cyclic homotopy)라고 부른다. 순환호모토피의 **궤적**(trace) $\alpha(t) = h_t(x_0)$는 X의 기본군의 원소가 된다. Gottlieb[5]는 이와 같은 기본군의 원소들의 모임을 **계치부분군**으로 정의하였고 $G(X, x_0)$으로 나타내고 있다. 이 군에 관해 밝혀진 많은 성질 가운데 몇 가지의 경우를 살펴보기로 한다.

(1) $G(X, x_0)$는 X의 보편피복공간 C의 항등사상과 파이버를 유지하면서 호모토픽(fiber preserving homotopic)한 Deck 변환(Deck transformation)들로 구성되는 군과 동형이다.

(2) Euler의 특성수와 계치부분군의 관계로 X가 컴팩트 연결다면체일 때 X의 Euler의 특성수 $\chi(X)$가 0이 아니면 $G(X)$는 자명군이 된다. 따라서 컴

팩트 연결다면체의 계치부분군이 자명군이 아니면 이 공간의 Euler의 특성수는 0이 된다.

이 사실을 이용하면 몇가지 의미있는 결과들을 얻을 수 있다. 즉 X가 컴팩트 연결다면체와 같은 호모토피형을 가지면서 H-공간이고 $\chi(X) \neq 0$이면 X의 기본군은 자명군이다. 그리고 X가 컴팩트 연결다면체와 같은 호모토피형을 가지면서 aspherical이고 $\chi(X) \neq 0$이라면 X의 기본군의 중심은 자명군이다. 또한 토러스, 사영공간 그리고 크라인 병을 제외한 2차원 폐다양체들의 기본군의 중심은 자명군이다.

(3) $G(X, x_0)$는 호모토피 불변이다.

(4) $G(X)$는 $\pi_1(X)$의 중심에 포함된다.

(5) $G(K(\pi, 1))$는 π의 중심과 같다.

(6) $G(X)$는 파이브레이션 $X \to E \to B$에서 유도되는 연결준동형 $d : \pi_2(B) \to \pi_1(X)$의 상을 포함한다.

(7) $G(X) \cap H \subset G(\tilde{X})$, 여기서 $\tilde{X}$는 $\pi_1(X)$의 부분군 H와 관련되는 피복공간이다.

2.2. $G(X, x_0)$의 일반화

Gottlieb[6]는 기본군의 부분군으로서의 계치부분군을 n차 호모토피군의 부분군으로 다음과 같이 일반화하였다.

$$G_n(X, x_0) = \{[f] \in \pi_n(X, x_0) | \exists F : X \times S^n \to X, F|_{X \vee S^n} = 1_X \vee f\}$$

여기서 사상 F를 f의 **제휴사상**이라고 부른다. 또한 $G_n(X, x_0)$이 계치사상 $\omega : (X^X, 1_X) \to (X, x_0)$, $\omega(f) = f(x_0)$에 의해 유도된 준동형사상 $\omega_* : \pi_n(X^X, 1_X) \to \pi_n(X, x_0)$의 상이 됨을 밝혔다. 즉, $G_n(X, x_0) = \omega_*(\pi_n(X^X, 1_X))$. 따라서 $G_n(X, x_0)$이 $\pi_n(X, x_0)$의 부분군임을 알 수 있고 ω가 계치사상이므로 이 군을 **계치부분군**(evaluation subgroup)이라 부른다. 이 군의 성질을 요약해 보면 다음과 같다.

(1) 계치부분군 $G_n(X, x_0)$은 파이버를 X로 가지는 파이브레이션의 절단면의 존재성과 깊은 관련을 가진다는 사실을 이미 서론에서 밝혔다. 즉 $[f] \in$

$G_n(X,x_0)$ 이기 위한 필요충분조건은 파이버 X를 가지는 파이브레이션 $E \xrightarrow{p} S^{n+1}$이 존재하여 $[f]=\delta_*[1]$이 되는 것이다. 여기서 $1 : S^{n+1} \to S^{n+1}$는 항등사상이고 $\delta_* : \pi_{n+1}(S^{n+1}) \to \pi_n(X,x_0)$는 파이브레이션 p의 호모토피열의 준동형사상이다. ([28]참조)

(2) $\alpha : I \to X$가 $\alpha(0)=x_0$, $\alpha(1)=x_1$사이의 경로라 할 때 임의의 $[\beta] \in \pi_n(X,x_1)$에 대하여 $h : S^n \times 0 \cup s_0 \times I \to X$를 $h(s,0)=\beta(s)$ 그리고 $h(s_0,t)=\alpha(t)$라고 정의할 때 이 함수는 호모토피 확장성질에 의해 h의 확장함수 $H : S^n \times I \to X$를 가진다. $\gamma(s)=H(s,1)$라고 둘 때 준동형사상 $\Phi_{[\alpha]} : \pi_n(X,x_1) \to \pi_n(X,x_0)$를 $\Phi_{[\alpha]}([\beta])=[\gamma]$로 정의하면 이 사상은 동형사상이 된다. 그리고 이 동형사상을 $G_n(X,x_1)$상으로 제한하면 사상 $\Phi_{[\alpha]} : G_n(X,x_1) \cong G_n(X,x_0)$도 동형사상이 된다. 이 증명은 [6]을 참조하기 바란다. 따라서 계치부분군은 동일 호상 연결성분내에서는 기저점의 선택에 무관함을 알 수 있다. 따라서 앞으로 혼돈의 우려가 없을 때는 기저점을 생략한다.

(3) $f : X \to Y$가 연속사상일 때 일반적으로 $f_*(G_n(X,x_0)) \subset G_n(Y,y_0)$는 성립하지 않는다. 예를 들면 포함사상 $i_1 : (S^1,s_0) \to (S^1 \vee S^1,(s_0,s_0))$에 대하여 $(i_1)_*(G_1(S^1,s_0))$는 $G_1(S^1 \vee S^1,(s_0,s_0))$에 포함되지 않는다. 그러나 $f : X \to Y$가 우호모토피 역사상을 가지면 준동형사상 $f_* : G_n(X,x_0) \to G_n(Y,f(x_0))$를 가진다. 한편 $g : Y \to X$가 좌호모토피 역사상을 가지고 $g_*(\alpha) \in G_n(X,g(y_0))$이 성립하면 $\alpha \in G_n(Y,y_0)$이다.([6]참조) 이를 종합하여 다음을 얻었다. Y가 CW복체형이고 $f : X \to Y$가 호모토피동치이면 $f_* : G_n(X,x_0) \to G_n(Y,f(x_0))$는 동형이 된다.

이 결과들을 이용하면 다음 정리를 얻는다.

정 리 2.2.1. 동형사상 $\Phi : \pi_n(X \times Y,(x_0,y_0)) \to \pi_n(X,x_0) \bigoplus \pi_n(Y,y_0)$는 동형사상 $\Phi : G_n(X \times Y,(x_0,y_0)) \cong G_n(X,x_0) \bigoplus G_n(Y,y_0)$를 유도한다.

(4) X를 H-구조 m과 단위원 x_0를 가지는 H-공간이라 하자. 임의의 원소 $[f] \in \pi_n(X,x_0)$에 대하여 사상 $F : X \times S^n \to X$를 $F(x,s)=m(x,f(s))$으로 잡으면 이 사상은 $[f]$의 제휴사상이 된다. 따라서 H-공간 X에 대해 $G_n(X)=$

$\pi_n(X)$임을 알 수 있다. 예를 들면, $n = 1, 3, 7$일 때 S^n은 H공간이므로

$$G_n(S^n) = \pi_n(S^n) = Z$$

이다. 일반적으로 모든 n에 대하여 $G_n(X) = \pi_n(X)$이라고 하여도 X가 H공간이 되지는 않는다. 예를 들면, S^1을 복소수 $e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$로 나타내기로 하고 $SO(3)$내에서 (θ)가 행렬

$$\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

를 나타낸다면 매장사상 $i : S^1 \to SO(3) \times S^1$를 $i(e^{i\theta}) = (2\theta) \times e^{i2\theta}$으로 정의할 때 상공간 $T = (SO(3) \times S^1)/i(S^1)$와 모든 n에 대하여 $G_n(T) = \pi_n(T)$이지만 이 상공간 T는 H-공간은 아니다. ([28]참조)

2.3. $G_n(X, x_0)$의 계산

현재까지 알려진 계치부분군의 계산 가운데 가장 대표적인 것은 구면 S^n의 n차 계치부분군의 계산이고, Gottlieb[6]에 의해 밝혀졌다.

$$G_n(S^n) = \begin{cases} 0 & n = \text{짝수} \\ 2Z \subset Z = \pi_n(S^n) & n = \text{홀수},\ n \neq 1, 3, 7 \\ Z = \pi_n(S^n) & n = 1, 3, 7 \end{cases}$$

그외의 몇가지 계치부분군의 계산이 알려진 경우를 보면 다음과 같다.

(1) S^3의 궤도공간(orbit space)의 계치부분군의 계산: $< l, m, n >$를 R,S 그리고 T에 의해 생성되고 $R^l = S^m = T^n = RST$의 관계를 만족하는 이항 다면군(binary polyhedral group)이라고 할 때 $< 2, 2, n >, < 2, 3, 3 >, < 2, 3, 4 >$ 그리고 $< 2, 3, 5 >$는 각각 4n,24,48 그리고 120개의 원소를 가지는 유한군으로 모두 S^3의 부분군이 된다.([3]참조) S^3의 궤도공간들의 계치부분군은 다음과 같다.([14]참조)

(a) $G = < 2,2,n >, n \geq 2, < 2,3,3 >, < 2,3,4 >$ 그리고 $< 2,3,5 >$인 경우 $G_1(S^3/G) = Z_2$

(b) $G_1(S^3/ < 2,2,1 >) = < 2,2,1 > = Z_4$

(c) G가 이항 다면군이고 $k > 1$일 때 $G_k(S^4/G) = \pi_k(S^3/G) \cong \pi_k(S^3)$

(2) 복소사영공간의 계치부분군: 복소사영공간 CP^n의 계치부분군으로 알려진 것은 모든 n에 대하여 $G_2(CP^n) = 0$ 와 $n!Z \subset G_{2n+1}(CP^n)$이란 것 뿐이다.

(3) Stiefel 다양체의 계치부분군: 실 Stiefel 다양체 $V_{n,k} = O(n)/O(n-k)$의 계치부분군으로 알려진 것은 다음과 같다.([14]참조)

(a) 만약 $k \geq 1$이고 m이 홀수일 때 $G_m(V_{m+1,k})$가 무한군이다.

(b)

$$G_{n-k}(V_{n,k}) = \begin{cases} Z & k = 1, n = 2,4, \text{혹은 } 8 \\ 2Z & k = 1, n = \text{짝수}, n \neq 2,4,8 \\ 0 & n-k = \text{짝수} \\ Z_2 & k > 1, n-k = 1 \text{ 혹은 } 3. \end{cases}$$

(4) 기타 공간의 계치부분군: 만약 n이 홀수이면 분류공간(classifying space) BO_n의 1차원 계치부분군 $G_1(BO_n) = \pi_1(BO_n) \cong Z_2$이 된다. 만약 F가 유한타입의 유한차원의 CW 복체이고 $\pi_3(F)$가 유한군이면 $G_2(F) = 0$이 되고 $G_4(F), G_6(F)$ 그리고 $G_8(F)$는 모두 유한군이 된다.([8]참조)

2.4. $G_n(X, x_0)$과 호몰로지의 관계

$h_p : \pi_n(X) \xrightarrow{h} H_n(X; Z) \xrightarrow{\otimes \mathbf{Z_p}} H_n(X; \mathbf{Z_p})$ 를 모드(mod) p Hurewicz 준동형사상이고 $h_\infty : \pi_n(X) \to H_n(X; R)$를 Hurewicz 사상이라 두자. 여기서 R은 유리수체이다. [6]에서 Gottlieb 는 유한생성자에 의해 생성되는 호몰로지를 가지는 위상공간 X에 대하여 다음을 보였다.

(1) 만약 n이 홀수라면, 임의의 소수 p 또는 $p = \infty$(이 경우 $\chi(X) \neq 0$)일 때 $G_n(X)$는 h_p의 핵에 포함된다.

(2) 만약 n이 짝수라면, 임의의 소수 p가 $\chi(X)$의 약수가 아닐 때 $G_n(X)$는 h_p의 핵에 포함된다.

3. 계치부분군의 일반화

3.1. 계치부분군의 일반화

Gottlieb에 의해 도입된 계치부분군은 여러 학자에 의해 일반화가 이루어졌다.

(1) **Varadarajan 집합 G(A,X).** Gottlieb[5,6]는 계치부분군을 도입하기 위하여 순환 호모토피를 이용하였고 Varadarajan[29]은 순환사상의 개념을 도입하고 이 개념을 사용하여 $\Pi(A,X)$(즉, A로 부터 X로 가는 사상의 호모토피류들의 집합)의 부분군으로

$$G(A,X) = \{[f] | [f] \in [A,X], f : A \to X \text{ 순환사상}\}$$

을 정의하였다. 이 집합은 Gottlieb군의 일반화로 생각할 수 있다. 더욱더 그는 Eckmann-Hilton 쌍대성의 구성에 순환사상을 이용하였고 여순환사상의 역할의 연구에 부분군 $G(A,X)$을 활용하였다.

모든 n에 대하여 $G_n(X) = \pi_n(X)$일 때 X를 **G-공간**이라 부른다. 2.2(d)에서 알 수 있듯이 H-공간은 G-공간이지만 그 역은 성립하지 않는다. Aguade[1]는 T-공간을 G-공간과 H-공간의 사이에 다음과 같이 정의하였다. 공간 X가 T-공간이란 만약 파이브레이션 $\Omega X \to X^{S^1} \to X$이 자명한 파이브레이션 $\Omega X \to X \times \Omega X \to X$과 파이버 호모토피 동치가 될 때를 이른다. 여기서 X^{S^1}는 X의 자유 루프공간을 나타낸다.

Woo와 Yoon[32]은 Varadarajan 집합을 사용하여 X가 T-공간이 되기위한 필요충분조건으로 임의의 공간 A에 대하여 $G(\Sigma A, X) = [\Sigma A, X]$이 됨을 보였다. 한편 H-공간도 Varadarajan 집합에 의해 특성지어질 수 있다. 즉, X가 H-공간이 되기 위한 필요충분조건으로 임의의 공간 A에 대하여 $G(A,X) = [A,X]$이 됨을 쉽게 보일 수 있다.

(2) **Woo-Kim 군** $G_n(X, A)$. Woo 와 Kim [13] 은 Varadarajan 과 다른 측면에서 Gottlieb군 $G_n(X)$을 일반화하였다. 즉 CW-쌍 (X, A)에 대하여 일반화된 계치부분군 $G_n(X, A)$을 다음과 같이 도입하였다.

$$G_n(X, A, x_0) = \{[f] \in \pi_n(X, x_0) | \exists F : A \times S^n \to X, F|_{A \vee S^n} = i \vee f\}$$

한편으로 $G_n(X, A, x_0) = \omega_*(\pi_n(X^A, i))$임을 보일 수 있다. 따라서 이 군을 **일반화된 계치부분군**이라 부른다. 특별히 $A = X$이면 $G_n(X, A) = G_n(X)$이 되고 $A = \{x_0\}$이면 $G_n(X, A) = \pi_n(X)$가 된다.

(3) **Oda의 일반화.** Oda는 Pairing개념을 도입하여 Varadarajan과 Woo-Kim군을 다음과 같이 일반화하였다. 주어진 사상 $h : B \to X$에 대하여

$$G^h(A, X) = \{[f] \in \Pi(A, X) | f\text{를 } h\text{에 관한 순환사상}\}$$

으로 정의하였으며 $G^h(A, X) = \omega_*\Pi(A, X^B; h)$이 됨을 쉽게 보일 수 있다. Oda는 이 집합을 $h^{\perp}(A, X)$으로 표현했다.

3.2. $G_n(X, A)$의 성질

Zhao[33]는 일반화된 계치부분군의 개념을 넓은부동점이론의 문제를 해결하기 위하여 사용하였다. 한편 [19]에서 본 저자는 계치부분군, 일반화된 계치부분군 그리고 호모토피군의 차이를 잘 설명해 줄 뿐만 아니라 일반화된 계치부분군의 계산에 매우 유익한 다음의 정리를 소개한다.

정 리 3.2.1. $G_n(X \times Y, Y) \cong \pi_n(X) \oplus G_n(Y)$, 여기서 $(X \times Y, Y) = (X \times Y, x_0 \times Y)$으로 나타낸다.

일반화된 계치부분군은 계치부분군과 그리고 호모토피군의 사이에 있으면서 두 군과 다음과 같은 차이가 있다.

$$\begin{array}{ccc}
G_n(X \times X) & = & G_n(X) \oplus G_n(X) \\
\downarrow \cap & & \downarrow \cap \\
G_n(X \times X, X) & = & \pi_n(X) \oplus G_n(X) \\
\downarrow \cap & & \downarrow \cap
\end{array}$$

$$\pi_n(X \times X) \quad = \quad \pi_n(X) \oplus \pi_n(X)$$

이 도표에 의하면 다음을 얻는다. $(X \times X, X)$이 n차 진계치부분군을 갖기위한 필요충분조건은 $G_n(X)$이 $\pi_n(X)$의 진부분군이다.

일반화된 계치부분군은 호모토피 불변성을 만족한다. 즉 $f : (X, A) \to (Y, B)$가 호모토피 동치라고 하면 $f_* : G_n(X, A) \cong G_n(Y, B)$이다. 계치부분군에 관한 대부분의 성질은 일반화된 계치부분군에도 성립함을 알 수 있다. 그리고 $G_n(X)$는 $G_n(X, A)$에 포함됨으로 앞장의 계치부분군과 호몰로지와의 관계에서 얻은 몇가지 결과가 일반화된 계치부분군으로 확대 가능성을 생각해 볼 수 있다. 이를 위하여 호몰로지상에 $G_n(X, A)$의 원소의 제휴사상 $\phi : A \times S^n \to X$에 의해 유도되는 대수적 구조를 조사해야 한다. 이 과정은 Gottlieb의 방법과 유사한 과정을 거쳐 다음의 정리를 얻는다. 증명은 [16]을 참조하기 바란다.

정 리 3.2.2. A가 유한생성 정수호몰로지를 가진다고 하자. 만약 포함사상 $i : A \to X$가 좌호모토피역 r를 가지고 n이 홀수일 때 임의의 소수 p 또는 ∞(이 경우 $\chi(A) \neq 0$)에 대하여 $G_n(X, A)$는 $r_* h_p$의 핵에 포함된다.

정 리 3.2.3. A는 유한생성 정수호몰로지를 가지고 포함사상 $i : A \to X$가 좌호모토피역 r를 가진다고 하자. 만약 n이 짝수일 때 소수 p가 $\chi(A)$의 약수가 아니면 $G_n(X, A)$는 $r_* h_p$의 핵에 포함된다.

3.3. $G_n(X, A)$의 계산

위상쌍 $(S^n \times S^m, S^m)$의 일반화된 계치부분군은 정리 3.2.1 과 $\pi_m(S^n)$, $G_m(S^m)$의 값들로부터 다음 예제와 같이 쉽게 계산할 수 있다.

예제 3.3.1. (1) $n \geq 3$일 때 $\pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbf{Z}_2$을 사용하여 다음을 얻는다.

$$G_{n+1}(S^n \times S^{n+1}, S^{n+1}) \cong \begin{cases} 0, & n=1 \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, & n=2 \\ \mathbf{Z}_2, & n \geq 3,\ n = \text{홀수} \\ \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}, & n=6 \\ \mathbf{Z}_2 \oplus 2\mathbf{Z}, & n > 3,\ n = \text{짝수},\ n \neq 6. \end{cases}$$

(2) $n \geq 3$일 때 $\pi_{n+2}(S^n) = \mathbf{Z}_2$이란 사실로부터 다음을 얻는다.

$$G_{n+2}(S^n \times S^{n+2}, S^{n+2}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & n=1 \\ \mathbf{Z}, & n=2 \\ \mathbf{Z}_2 \oplus 2\mathbf{Z}, & n=3 \\ \mathbf{Z}_2, & n > 3,\ n = \text{짝수} \\ \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}, & n=5 \\ \mathbf{Z}_2 \oplus 2\mathbf{Z}, & n > 5,\ n = \text{홀수}. \end{cases}$$

4. G-열의 구성과 완전성

이 절에서는 주어진 CW쌍에 대하여 이 쌍의 호모토피열과 유사한 G-열의 개념과 G-열이 완전이 되기 위한 조건을 조사한다. 일반적으로 G-열은 완전열이 아니라는 것으로부터 ω호몰로지의 개념을 유도한다. 마지막으로 G-열의 응용면을 다룬다.

4.1. G-열의 구성

CW쌍 (X, A)의 상대호모토피군 $\pi_n(X, A, x_0)$의 부분군으로 상대계치부분군을 Lee와 Woo[15]는 다음과 같이 정의하였다.

$G_n^{rel}(X,A) = \{[f] \in \pi_n(X,A) | \exists$ map $H : (X \times I^n, A \times \partial I^n) \longrightarrow (X,A)$, $[H|_{x_0 \times I^n}] = [f]$, $H|_{X \times u} = 1_X, u \in J^{n-1}\}$. 여기서 $J^{n-1} = I^{n-1} \times 1 \cup \partial I^{n-1} \times I$..

$G_n^{rel}(X,A)$이 군이 됨을 위의 정의로부터 증명할 수 있다. 그러나 다음의 사실을 이용하면 쉽게 군이 됨을 보일 수 있다. $G_n^{rel}(X,A)$은 계치사상 $\omega : X^A \to X$, $\omega(f) = f(x_0)$로 부터 유도되는 준동형사상 $\omega_* : \pi_n(X^A, A^A, i) \to \pi_n(X,A,x_0)$의 상이 되기 때문이다. 즉,

$$G_n^{rel}(X,A) = Im(\omega_* : \pi_n(X^A, A^A, i) \to \pi_n(X,A,x_0))$$

여기서 $A^A = \{f \in X^A | f(A) \subset A\} \subset X^A$ 이다. 이 부분군 $G_n^{rel}(X,A)$을 **상대계치부분군**(relative evaluation subgroup)이라 부른다. [26]에서 상대계치부분군의 원소가 될 동치조건으로 다음 사실이 증명되었다. $[f]$가 상대계치부분군 $G_n^{rel}(X,A)$의 원소이기 위한 필요충분조건은 사상 $H : (A \times I^n, A \times \partial I^n) \longrightarrow (X,A)$가 존재하여 $[H|_{x_0 \times I^n}] = [f]$와 $H|_{A \times J^{n-1}} = i$를 만족한다.

$G_1(X)$가 $\pi_1(X)$의 중심에 포함되어진다는 것이 Gottlieb에 의해 증명되었다. 다음 정리에서 상대계치부분군의 경우 Gottlieb의 결과와 같은 결과가 성립함을 보인다. 증명은 [18]을 참조하기 바란다.

정 리 4.1.1. (X,A)을 CW쌍이라고 할 때 $G_2^{rel}(X,A)$는 $\pi_2(X,A)$의 중심에 포함된다.

CW쌍 (X,A)에서 포함함수 $i : A \to X$와 계치사상 $\omega : (X^A, A^A) \to (X,A)$는 다음과 같은 가환인 다이어그램을 유도한다.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & \pi_n(A^A, 1_A) & \to & \pi_n(X^A, i) & \to & \pi_n(X^A, A^A, i) & \to & \pi_{n-1}(A^A, 1_A) & \to \cdots \\
& \downarrow \omega_* & & \downarrow \omega_* & & \downarrow \omega_* & & \downarrow \omega_* & \\
\cdots \to & G_n(A) & \longrightarrow & G_n(X,A) & \longrightarrow & G_n^{rel}(X,A) & \longrightarrow & G_{n-1}(A) & \to \cdots \\
& \downarrow \cap & & \downarrow \cap & & \downarrow \cap & & \downarrow \cap & \\
\cdots \to & \pi_n(A, x_0) & \longrightarrow & \pi_n(X, x_0) & \longrightarrow & \pi(X, A, x_0) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(A, x_0) & \to \cdots
\end{array}$$

여기서 1행과 3행에 있는 호모토피열은 완전열이므로 다이어그램의 가환성으로부터 다음의 정리를 얻는다.

정 리 4.1.2. $G_n(A), G_n(X,A)$ 그리고 $G_n^{rel}(X,A)$은 다음의 열을 이룬다.

$$\cdots \to G_n(A) \longrightarrow G_n(X,A) \longrightarrow G_n^{rel}(X,A) \longrightarrow G_{n-1}(A) \to \cdots$$

이 열을 CW쌍 (X,A)의 **G-열**(G-SEQUENCE)이라고 부른다. 이 열은 일반적으로 완전열이 아니다.

예제 4.1.3 $(B^2 \vee S^1, S^1 \vee S^1)$과 (Z_p, S^7)의 G-열은 완전열이 아니다. 여기서 $p : S^7 \to S^4$는 Hopf 번들이고 Z_p 는 p의 사상주면(mapping cylinder)이다. 증명은 [18], [26]을 참조하기 바란다.

호모토피열이 호모토피군들의 계산과 많은 문제해결에 중요한 역할을 하는 것처럼 G-열의 완전성은 계치부분군들의 계산과 호모토피 문제해결에 큰 역할을 하리라 본다. 따라서 G-열이 완전할 조건을 찾는 일은 곧 그것을 구성하고 있는 계치부분군들의 계산과 기타 호모토피 문제해결에 도움이 된다. 완전열이 되기 위한 조건을 밝혀진 시대순으로 소개한다.

4.2. G-열의 완전성

G-열이 소개된 최초의 논문 [15]에서 다음이 알려졌다.

정 리 4.2.1. 포함함수 $i : A \to X$가 좌호모토피역을 가지면 쌍 (X,A)의 G-열은 완전열이다.

이 결과는 다른 논문 [27]에 의해 일반화되었으며 정리 4.7에서 보여진다. 만약 CW쌍의 포함사상이 좌호모토피역을 가지면 이 쌍의 각 차원에서 일반화된 계치부분군은 다음에서 보인 것처럼 부분공간의 계치부분군과 이 쌍의 상대계치부분군의 직합으로 나타난다.

따름정리 4.2.2. 만약 (X,A)가 CW쌍으로 포함사상 $i : A \to X$가 좌호모토피역을 가지면 $G_n(X,A) \cong G_n(A) \oplus G_n^{rel}(X,A)$이 된다.

그 후 [17]에서 CW쌍 (B^n, S^{n-1})의 포함사상 $i : S^{n-1} \to B^n$은 좌호모토피역은 가지지 않으나 (B^n, S^{n-1})의 G-열은 완전열이 됨을 보였다. CW 쌍 (B^n, S^{n-1})의 경우 포함사상은 좌호모토피역은 안가지나 상수함수와 호모토픽함을 알 수 있다. 일반적으로 포함함수가 상수함수와 호모토픽할 때 이 쌍의 G-열이 완전열이 되는지 조사해 보기로 한다.

CW쌍 (X, A)의 호모토피열

$$\cdots \to \pi_n(A) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A) \to \cdots \to \pi_0(X)$$

에서 포함사상이 상수함수와 호모토픽하면 유도된 준동형사상 i_*는 자명한 사상이 된다. 따라서 연결 준동형사상 ∂이 전사가 된다. 이것은 (X, A)의 G-열에도 같은 결과를 얻을 수 있었다. 이 사실을 이용하여 [18]에서 다음의 정리를 얻는다.

정리 4.2.3. CW쌍의 포함사상이 상수함수와 호모토픽하면 이 쌍의 G-열은 완전열이다.

기저점을 가지는 위상공간과 이들 공간들 사이의 사상들 가운데 기저점을 보존하는 호모토피류 카테고리에서 사상 $f : X \to Y$가 **호모토피단사**(이하 단사로 짧게 나타낸다.)[10]라고 하는 것은 임의의 공간 Z와 임의의 두 함수 $u, v : Z \to X$에 대하여 $f \circ u \simeq f \circ v$이면 $u \simeq v$일 때이다. 사상의 단사성은 그 사상이 좌호모토피역을 가진다는 것 보다 약한 조건이다. 예를 들면, Hopf 사상 $h : S^3 \to S^2$가 단사이지만 좌호모토피역은 가지지 않는다. 정리 4.2.1에서 포함사상이 좌호모토피역을 가진다는 조건에서 완전 G-열의 존재를 밝혔으나 이 사실을 일반화시켜 다음의 정리를 얻을 수 있다. 증명은 [27]을 참조하기 바란다.

정리 4.2.4 CW쌍의 포함사상이 단사라면 이 쌍의 G-열은 완전열이다.

5. G-열의 응용

5.1. 사상의 단사성

어떤 사상이 호모토피 단사가 되는지 판정하는 것은 매우 어려운 일이다. 그러나 앞절에서 도입된 G-열의 완전성을 이용하면 사상의 단사성을 판정하기가 쉬운 경우가 있다.

모든 n에 대하여 $G_n(X) = \pi_n(X)$일 때 X를 **G-공간**이라 부른다. 2.2(d)에서 H-공간은 G-공간이지만 그 역은 성립하지 않는다는 것을 보였다. 구면 S^n이 G-공간이 되기 위한 필요충분조건은 $n = 1, 3$ 또는 7 이다.([Si]참조) 일반적으로 G-공간의 단사사상의 상이 G-공간일 필요가 없다. 예를 들면 Hopf 사상 $h : S^3 \to S^2$은 단사사상이고(Hilton [6]참조) S^3는 G-공간이지만 S^2는 G-공간이 아니다. 그러나 그 반대의 경우 매우 흥미있는 결과를 얻는다.

임의의 사상 $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$에 대하여 $G_n(X, x_0) \subset \omega_*(\pi_n(X^Y, f))$가 성립함을 쉽게 알 수 있다. 왜냐하면 $[g] \in G_n(X, x_0)$의 제휴사상 $F : X \times S^n \to X$에 대하여 $[g] = \omega_*[F \circ (f \times 1)] \in \omega_*(\pi_n(X^Y, f))$이 된다. 따라서 우리는 $\pi_n(X, x_0)$의 부분군 $G_n^f(X, Y, x_0) = \omega_*(\pi_n(X^Y, f))$를 생각할 수 있고 이는 앞에서 도입한 일반화된 계치부분군의 일반화한 형식이다. 왜냐하면 $i : A \to X$가 포함사상일 때 $G_n^i(X, A, x_0) = G_n(X, A, x_0)$이기 때문이다. 다음의 다이어그램

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & \pi_n(Y^Y, 1_Y) & \xrightarrow{\bar{f}_*} & \pi_n(X^Y, f) & \xrightarrow{J} & \pi_n(\bar{f}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(Y^Y, 1_Y) & \to \cdots \\
& \downarrow \omega_* & & \downarrow \omega_* & & \downarrow (\omega, \omega)_* & & \downarrow \omega_* & \\
\cdots \to & G_n(Y) & \xrightarrow{f_*} & G_n^f(X, Y) & \xrightarrow{j_*} & G_n^R(f) & \xrightarrow{\partial} & G_{n-1}(Y) & \to \cdots \\
& \downarrow \cap & & \downarrow \cap & & \downarrow \cap & & \downarrow \cap & \\
\cdots \to & \pi_n(Y) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(X) & \xrightarrow{j_*} & \pi(f) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(Y, y_0) & \to \cdots
\end{array}
$$

의 교환가능성에 의해 함수 f의 G-열

$$\cdots \longrightarrow G_n(X) \xrightarrow{f_*} G_n^f(Y, X) \xrightarrow{J} G_n^R(f) \xrightarrow{\partial} G_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

을 얻는다. 여기서 $G_n^R(f) = (\omega, \omega)_*(\pi_n(\bar{f}))$으로 $\pi(f)$의 상대계치부분군이라 부른다. [26]를 참조하기 바란다. 그리고 정리 4.2.4과 [26,따름정리 3.4]를 결합하면 다음 정리를 얻는다.

정 리 5.1.1. 단사사상 $f : X \to Y$의 G-열은 완전열이다.

$$\cdots \longrightarrow G_n(X) \xrightarrow{f_*} G_n^f(Y, X) \xrightarrow{J} G_n^R(f) \xrightarrow{\partial} G_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

[27]에서 Pan과 Woo는 다음을 보였다.

정 리 5.1.2. 만약 $f : X \to Y$가 단사사상이고 Y가 G-공간이라면 X도 G-공간이 된다.

이 정리에 의하면 구면에서 G-공간으로 가는 단사사상이 존재하면 구면의 차원은 1,3 또는 7 이다. 특별히 $n \neq 7$일 때 임의의 사상 $f : S^n \to S^7$는 단사사상이 아님을 쉽게 보일 수 있다.

Hilton [10,p 169]은 그의 저서에서 Hopf 사상 $h : S^7 \to S^4$ 는 단사라고 쓰고 있다. 그러나 [4]에서 Ganea는 이 사상이 단사사상이 아님을 증명하였다. Pan과 Woo[27]은 Ganea와 다른 방법으로 Hilton의 주장이 잘못되었다는 것을 G-열의 완전성을 이용하여 다음과 같이 보이고 있다. Hopf 사상 $h : S^7 \to S^4$의 G-열은 완전열이 아님이 Pan, Shen 그리고 Woo에 의해 밝혀졌다.([26, p293]참조) 만약 주어진 Hopf 사상 h 가 단사라면 위의 정리 5.1.1에 의해 h의 G-열은 완전열이 되어 [26]의 결과에 모순이 된다.

(S^n, S^{n-1})의 상대계치부분군의 계산에 G-열을 이용하여 보자. $1 < k < n$에 대하여 $\pi_k(S^n, S^{n-1}) = 0$이므로 $G_k^{rel}(S^n, S^{n-1}) = 0$이 된다. (S^n, S^{n-1})의 G-열이 완전열이란 것을 이용하여 $G_n^{rel}(S^n, S^{n-1})$을 다음과 같이 계산할 수 있다. 증명은 [18]을 참조하기 바란다.

정 리 5.1.3. 만약 $n \geq 2$이면 $G_n^{rel}(S^n, S^{n-1}) \neq 0$ 이다. 특별히 n 이 홀수이면 $G_n^{rel}(S^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}$ 이고 $n = 2, 4, 8$ 이면 $G_n^{rel}(S^n, S^{n-1}) = \pi_n(S^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$이 된다.

5.2. ω-호몰로지

일반적으로 G-열은 완전열이 아니지만 반 완전열(half exact sequence)은 된다. 따라서 CW쌍 (X, A)의 G-열

$$\to G_{n+1}^{rel}(X,A) \xrightarrow{\partial^{n+1}} G_n(A) \xrightarrow{i_*^n} G_n(X,A) \xrightarrow{j_*^n} G_n^{rel}(X,A) \cdots$$
$$\to G_1^{rel}(X,A) \to G_0(A) \to G_0(X,A)$$

을 사슬복체로 생각할 수 있다. 이 사슬복체로부터 자연스럽게 각 $n \geq 1$에 대하여 $H_n^{g\omega}(X,A) = Ker(j_*^n)/Im(i_*^n)$, $H_n^{r\omega}(X,A) = Ker(\partial^n)/Im(j_*^n)$ 그리고 $H_{n-1}^{a\omega}(X,A) = Ker(i_*^{n-1})/Im(\partial^n)$으로 두면 G-열로부터 새로운 호몰로지를 정의할 수 있다.

$$H_*^{\omega}(X,A) = \{H_n^{g\omega}(X,A), H_n^{r\omega}(X,A), H_{n-1}^{a\omega}(X,A)\}_{n\geq 1}$$

이 호몰로지를 CW쌍 (X, A)의 **ω-호몰로지**라 부른다. 정의로 부터 $n \geq 2$ 이면 $H_n^{\omega}(X,A) = \{H_n^{g\omega}(X,A), H_n^{r\omega}(X,A), H_{n-1}^{a\omega}(X,A)\}$ 는 가환군이고 $H_1^{g\omega}(X,A)$는 군, $H_1^{r\omega}(X,A)$ 는 상집합이 되며 $H_0^{a\omega}(X,A)$는 한점집합이 된다. 앞의 예제와 ω-호몰로지의 정의로부터 $A = S^1 \vee S^1$ 이고 $X = B^2 \vee S^1$ 이면 $H_1^{g\omega}(X,A) = Z$이 됨을 알 수 있다.([18]) 따라서 자명하지 않은 ω-호몰로지를 가지는 유한 CW복체가 존재함을 알 수 있다. 그리고 CW쌍의 ω-호몰로지가 자명하기 위한 필요충분조건은 이 쌍의 G-열이 완전열이다. 고차원에서 당연하지 않은 ω-호몰로지를 가지는 유한 CW 복체가 존재한다는 사실이 알려졌다([26]). 무한 CW복체의 경우로 Eilenberg-MacLane 공간 $K(Z, n)$을 생각할 때 이 공간은 H-공간이고 $(K(Z,n), S^n)$ 은 CW쌍이 된다. 따라서 $G_n(K(Z,n)) \cong Z \cong \pi_n(K(Z,n))$임을 알 수 있고 다음의 예를 얻는다. 증명은 [25]을 참조하길 바란다.

예제 5.2.1

$$H_n^{g\omega}(K(Z,n), S^n) \cong \begin{cases} Z, & n = \text{짝수} \\ Z_2, & n = \text{홀수},\ n \neq 1,3,7 \\ 0, & n = 1,3,7. \end{cases}$$

정리 5.2.2 주어진 CW쌍 (X, A)에 대하여 포함사상 $i : A \to X$가 단사이거나 상수함수와 호모토픽하면 (X, A)의 ω-호몰로지는 자명군들이다.

예제 5.2.3 만약 $k < n$일 때 S^k를 $\{(x_1, ., x_i, ., x_{n+1}) \in S^n \mid x_i = 0, i > k+1\}$으로 둘 때 포함사상 $i : S^k \to S^n$는 상수함수와 호모토픽하게 되고 $n > k > 0$일 때 $H_*^\omega(S^n, S^k) = 0$이다.

실제로 CW쌍의 ω-호몰로지에 대하여 많은 사실이 밝혀지지는 않았으나 CW쌍의 G-열이 완전열에 얼마나 가까운가의 척도로 사용할 수 있다. 또는 위상쌍을 대수체계로 대응시켜서 이것들을 규명하는 데 큰 역할을 할 것으로 기대된다.

6. G-열의 일반화

6.1. 쌍들의 범주

$n \geq 0$일 때 $\Sigma^n A$를 A의 n-현수공간, CA를 A의 원추, 그리고 $i(A) : A \to CA$를 $i(A)(x) = (x, 0)$에 의해 정의되는 자연사상이라 두자. 그 때 마지막 좌표를 제일 앞으로 보냄으로써 $C\Sigma^n A$를 $\Sigma^n CA$으로 그리고 $i(\Sigma^n A)$를 $\Sigma^n i(A)$으로 동일화할 수 있는데, 이 때 $i(\Sigma^n A)$를 i_{n+1}으로 나타내기로 한다. 한편으로 $n \geq 1$이면 $\Sigma^n A$과 $C\Sigma^n A$은 Co-Hopf 구조를 가지고 $\Pi_n(A, X) = \Pi(\Sigma^n A, X)$은 군이 되고 $n \geq 2$이면 Abel군이 된다.

쌍들의 범주란 그 대상으로 연속함수 $\alpha : (A, *) \to (B, *)$을 그리고 그 몰피즘(morphism)으로 연속함수의 쌍 $(f_1, f_2) : \alpha \to \beta$으로 구성되며 이 쌍은 $f_2\alpha = \beta f_1$를 만족한다. 여기서 $\alpha : A_1 \to A_2$, $\beta : B_1 \to B_2$ 그리고 $f_i : A_i \to B_i$.([10]참조) 두 몰피즘 $(f_1, f_2), (g_1, g_2) : \alpha \to \beta$가 호모토픽하다는 것은 몰피즘 $(H_1, H_2) : \alpha \times 1_I \to \beta$가 존재하여 H_1은 f_1과 g_1사이의 호모토피이고 H_2는 f_2와 g_2 사이의 호모토피이다. 여기서 1_I는 단위구간 I에서 그 자신으로 가는 항등사상이다.

집합 $\Pi(\alpha, \beta)$은 쌍들의 카테고리에서 α에서 β로 가는 몰피즘의 호모토피류이다. 특별히 $\Pi_n(\alpha, \beta) = \Pi(\Sigma^n \alpha, \beta)$은 $n \geq 1$일 때 군이 되고 $n \geq 2$일 때

Abel군이 된다. 만약 $\alpha = i_n(: \Sigma^{n-1}A \to C\Sigma^{n-1}A$ 포함함수)이라면, $\Pi(\alpha,\beta)$ $= \Pi_n(A,\beta)$으로 나타내고 β**의 n-차 호모토피군(rel A)**이라 부른다. 만약 β가 포함함수이고 $A = S^0$이면 n차 상대호모토피군이 된다. 더욱이 $\beta : * \to B$이라면 $\Pi_n(A,\beta) = \Pi_n(A,B)$이 되고 $\beta : B \to *$이면 $\Pi_n(A,\beta) = \Pi_{n-1}(A,B)$이 된다.

6.2. 순환사상

Varadarajan[29]은 Gottlieb 집합 $G(A,X)$을 $\Pi(A,X)$의 부분군으로 $G(A, X) = \omega_*\Pi(A,X^X)$으로 정의하였다. 여기서 $\omega : X^X \to X$는 계치사상이다. 만약 $G(\Sigma^n A,X)$를 $G_n(A,X) = \omega_*\Pi_n(A,X^X)$으로 두기로 하면 $G_n(A,X)$는 Gottlieb집합 $G(A,X)$과 계치부분군 $G_n(X)$의 일반화이다. 왜냐하면 $G_0(A,X)$ $= G(A,X)$이고 $G_n(S^0,X) = G_n(X)$이기 때문이다.

쌍사상 $f : (B^n, S^{n-1}) \to (X,A)$가 **상대순환**이란 사상 $H : (B^n \times X, S^{n-1} \times A) \to (X,A)$가 있어서 $H|_{B^n\times *} = f$이고 $H|_{*\times X} = 1_{(X,A)}$이 될 때를 말한다. 이 때

$$G_n^{Rel}(X,A) = \{[f] \in \pi_n(X,A) | f\text{는 상대순환}\}$$

임을 쉽게 보일 수 있다.([20]참조) 주어진 사상 $h : B \to X$에 대하여 $f : A \to X$가 **h에 대한 순환사상**이란 $H : A \times B \to X$가 존재하여 $H \circ i \simeq \nabla \circ (f \vee h) : A \vee B \to X$이다. [23]에서 Oda는 $G^h(A,X) = \{[f] \in \Pi(A,X) | f$를 h에 관한 순환사상$\}$으로 정의하였다. 동치조건으로 나타내면 $G^h(A,X) = \omega_*\Pi(A,X^B;h)$이 된다. 여기서 X^B 는 B에서 X로 가는 함수공간에서 h의 성분이다.

$h : X \to B_1,\ \ \alpha : A_1 \to A_2$그리고 $\beta : B_1 \to B_2$를 주어진 사상이라 하자. 몰피즘 $(f_1,f_2) : \alpha \to \beta$가 **순환몰피즘(rel h)**이란 몰피즘 $(H_1,H_2) : \alpha \times 1_X \to \beta$가 존재하여 $(H_1,H_2)|_\alpha = (f_1,f_2)$, $(H_1,H_2)|_{1_X} = (h,\beta h)$, $\nabla \circ (f_1 \vee h) = H_1 \circ j_1$그리고 $\nabla \circ (f_2 \vee \beta h) = H_2 \circ j_2$ 이다. 여기서 $j_i : A_i \vee X \to A_i \times X$. 이 경우 (H_1,H_2)를 (f_1,f_2)의 **제휴몰피즘**(rel h)이라 부른다. 만약 $h : B_1 \to B_1$가 항등사상이라면 (f_1,f_2)를 단지 순환몰피즘이 된다.

만약 $\beta : B_1 \to *$가 자명한 사상이라면 $(f_1, *) : \alpha \to \beta$는 순환몰피즘(rel h)이기 위한 필요충분조건은 $f_1 : A_1 \to B_1$가 h에 대한 순환사상이다. $i_n : S^{n-1} \to B^n$과 $i_A : A \to X$에 대하여 쌍사상 $f : (B^n, S^{n-1}) \to (X, A)$가 상대순환이기 위한 필요충분조건은 $(f|_{S^{n-1}}, f) : i_n \to i_A$가 순환몰피즘이다. 따라서 순환몰피즘의 개념은 상대순환사상의 일반화라 볼 수 있다.

6.3. 쌍들의 범주에서 G-열

지금까지 도입된 모든 계치부분군 (즉 CW쌍의 상대계치부분군, Gottlieb집합, 일반화된 계치부분군 그리고 Oda의 Pairing)의 일반화로 다음 집합이 도입되었다.([20]참조)

$$\mathbf{G}^h(\alpha, \beta) = \{[f_1, f_2] \in \Pi(\alpha, \beta) | (f_1, f_2) : h\text{에 대한 순환몰피즘}\}$$

으로 정의하고 $\mathbf{G}_n^h(\alpha, \beta) = \mathbf{G}^h(\Sigma^n\alpha, \beta)$으로 나타내로 한다. 여기서 $\Sigma^n\alpha : \Sigma^n A_1 \to \Sigma^n A_2$는 α에 의해 유도되는 두 개의 현수공간사이의 사상이다. 특별히 $i_n : \Sigma^{n-1}A \to C\Sigma^{n-1}A$이 포함사상이라면 $\mathbf{G}^h(i_n, \beta)$를 $\mathbf{G}_n^h(A, \beta)$으로 표기한다. 더욱이 h가 항등사상이라면 $\mathbf{G}_n^h(A, \beta)$은 $\mathbf{G}_n(A, \beta)$로 쓴다. $\mathbf{G}_n(A, \beta)$는 $G_n^{Rel}(B_2, B_1)$의 일반화이다. 왜냐하면 $\mathbf{G}_n(S^0, i) = G_n^{Rel}(B_2, B_1)$, 여기서 $i : B_1 \to B_2$는 포함사상이다.

A에 대한 사상 $\beta : B_1 \to B_2$의 호모토피열

$$\cdots \to \Pi_n(A, B_1) \xrightarrow{\beta_*} \Pi_n(A, B_2) \xrightarrow{J} \Pi_n(A, \beta) \xrightarrow{\partial} \Pi_{n-1}(A, B_1) \to \cdots$$

의 각 항의 부분으로 $\mathbf{G}_n(A, B_1)$, $\mathbf{G}_n^{\beta}(A, B_2)$그리고 $\mathbf{G}_n(A, \beta)$를 택하면 다음이 성립한다.

정리 6.3.1[20] $\mathbf{G}_n(A, B_1)$, $\mathbf{G}_n^{\beta}(A, B_2)$그리고 $\mathbf{G}_n(A, \beta)$는 A에 대한 사상 $\beta : B_1 \to B_2$의 호모토피열의 부분열을 이룬다.

$$\cdots \to \mathbf{G}_n(A, B_1) \xrightarrow{\beta_*} \mathbf{G}_n^{\beta}(A, B_2) \xrightarrow{J} \mathbf{G}_n(A, \beta) \xrightarrow{\partial} \mathbf{G}_{n-1}(A, B_1) \to \cdots$$

여기서 β_*는 $\beta : B_1 \to B_2$에 의해 유도되는 사상이다.

이 열을 쌍들의 카테고리에서 **A에 대한 β의 G-열**[20]이라 부른다. 만약 $\beta : B_1 \to B_2$가 포함사상이고 $A = S^0$이면 A에 대한 β의 G-열은 CW쌍 (B_2, B_1)의 G-열이 된다.

Lee 와 Woo는 [20]에서 이 열이 완전열이 되기 위한 조건이 다음과 같음을 보였다.

정리 6.3.2 만약 $\beta : B_1 \to B_2$가 상수함수와 호모토픽하거나 좌호모토피역을 가지면 A에 대한 β의 G-열은 완전열이 된다.

Lee 와 Woo는 [21]에서 $\beta : B_1 \to B_2$가 좌호모토피역을 가진다는 조건보다 약한 조건으로 같은 결과를 얻는다.

정리 6.3.3 만약 $\beta : B_1 \to B_2$가 단사라면 A에 대한 β의 G-열은 완전열이다.

6.4. 쌍대 G-열

Lee 와 Woo는 [21]에서 일반화한 G-열의 개념을 쌍대 G-열로 확대시켜 연구하였으며 다음의 결과를 도출하였다. 주어진 사상 $\alpha : A_1 \to A_2$에 대하여 $H^m(\alpha, G) = \Pi_1(\alpha, K(G,m))$으로 정의되며 이를 α의 m-코호몰로지군(G는 Abel 군)이라 부른다. 이 경우 α가 포함사상이라면 이는 보통 상대 코호몰로지군을 유도한다. 만약 $B = K(G, m+n)$이라면

$$\Pi_n(A, B) = \Pi(A, K(G,m)) = H^m(A, G)$$

이고

$$\Pi_{n+1}(\alpha, B) = \Pi_1(\alpha, K(G,m)) = H^m(\alpha, G).$$

따라서 $B = K(G, m+n)$일 때 α의 호모토피열은 다음과 같다.

$$\cdots \to H^m(\alpha, G) \to H^m(A_2, G) \to H^m(A_1, G) \to H^{m+1}(\alpha, G) \to \cdots$$

이 열을 α의 코호몰로지 완전열이라 부른다. 만약 α가 포함사상이라면 전통적인 코호몰로지열이 된다.[10]

몰피즘 $(f_1, f_2) : \alpha \to \beta$가 **여순환**이란 몰피즘 $(\mu_1, \mu_2) : \alpha \to \alpha\vee\beta$가 존재하여 $(j_1, j_2)\circ(\mu_1, \mu_2) : \alpha \to \alpha\times\beta$이 $(1\times f_1, 1\times f_2)\circ(\Delta_1, \Delta_2)$와 호모토픽할 때이다. 여기서 $(\Delta_1, \Delta_2) : \alpha \to \alpha\times\alpha$는 대각몰피즘이고 $(j_1, j_2) : \alpha\vee\beta \to \alpha\times\beta$는 포함몰피즘이다. 이 경우 (μ_1, μ_2)를 (f_1, f_2)의 **여제휴몰피즘**이라 부른다.

$$
\begin{array}{ccccc}
A_1\times A_1 & & \xrightarrow{1\times f_1} & & A_1\times B_1 \\
& \nwarrow \Delta_1 & \ominus & j_1 \nearrow & \\
& & A_1 \xrightarrow{\mu_1} A_1\vee B_1 & & \\
\alpha\times\alpha\downarrow & & \alpha\downarrow \qquad\qquad \downarrow\alpha\vee\beta & & \downarrow\alpha\times\beta \\
& & A_2 \xrightarrow{\mu_2} A_2\vee B_2 & & \\
& \swarrow \Delta_2 & \ominus & j_2 \searrow & \\
A_2\times A_2 & & \xrightarrow{1\times f_2} & & A_2\times B_2
\end{array}
$$

여기서 $\ominus$ 호모토피적으로 교환가능을 나타낸다. 예를 들면 모든 상수몰프즘 $(*, *) : \alpha \to \beta$은 여순환이 된다. $DG(\alpha, \beta)$를 $\Pi(\alpha, \beta)$의 원소 중 여순환몰피즘들로 구성되는 부분집합이다.([21]참조) $DH^m(A, G)$을 $DG_n(A, K(G, m+n)$ 그리고 $DH^m(\alpha, G)$를 $DG_{n+1}(\alpha, K(G, m+n))$으로 잡으면 $DH^m(A, G)$과 $DH^m(\alpha, G)$은 $H^m(A, G)$과 $H^m(\alpha, G)$의 부분군이 된다. 그래서 $B = K(G, m+n)$인 경우, **α의 쌍대 G-열**은 다음과 같이 정의된다.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\to H^m(\alpha, G) & \to & H^m(A_2, G) & \to & H^m(A_1, G) & \to & H^{m+1}(\alpha, G) & \to \\
\cup & & \cup & & \| & & \cup & \\
\to DH^m(\alpha, G) & \to & DH^m(A_2, G) & \to & H^m(A_1, G) & \to & DH^{m+1}(\alpha, G) & \to
\end{array}
$$

정 리 6.4.1. 만약 $\alpha = i : A_1 \to A_2$가 0-호모토픽한 포함사상이면 다음과 같은 짧은 완전열을 갖는다.

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 \to H^m(A_1, G) & \to & H^m((A_2, A_1; G) & \to & H^{m+1}(A_2; G) \to 0 \\
\| & & \cup & & \cup
\end{array}
$$

$$0 \to H^m(A_1, G) \to DH^{m+1}(i, G) \to DH^{m+1}(A_2; G) \to 0$$

참고문헌

[1] J. Aguade, *On the space of free loops of an odd sphere*, Publ. Mat. UAB **25** (1981), 87-90.

[2] R. F. Brawn, *The Lefschez fixed point theorem*, Scott-Foresman, Chicago, 1971.

[3] H. S. M. Coxeter, *Quaternians and reflections*, Amer. Math. Monthly **53** (1946), 136-146.

[4] T. Ganea, *On monomorphisms in homotopy theory*, Topology **6** (1967), 149-152.

[5] D. H. Gottlieb, *A certain subgroup of the fundamental group*, Amer. J. Math. **87** (1965), 840-856.

[6] ______, *Evaluation subgroups of homotopy groups*, Amer. J. Math. **91** (1968), 729-756.

[7] ______, *Covering transformations and universal fibrations*, Illinois J. Math. **13** (1969), 432-437.

[8] ______, *On fibre spaces and the evaluation map*, Ann. Math. **87** (1968), 42-55.

[9] ______, *Applications of bundle map theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **171** (1972), 23-50.

[10] P. J. Hilton, *Homotopy theory and duality, Gordon and Breach*, New York 1965.

[11] B. J. Jiang, *Estimation of the Nielsen numbers*, Chinese Math. **5** (1964), 330-339.

[12] ______, *Lectures on Nielsen fixed point theory*, Contemporary mathematics, **14** (1983), American Math. Soc.

[13] R. Kim and M. H. Woo, *Certain subgroups of homotopy groups*, J. Korean Math. Soc. **21** (1984), 109-120.

[14] G. E. Lang, Jr., *Evaluation subgroups of factor spaces*, Pacific J. Math. **42** (1972), 701-709.

[15] K. Y. Lee and M. H. Woo, *The relative evaluation subgroups of a CW-pair*, J. Korean Math. Soc. **25** (1988), 149-160.

[16] ______, *Homology and generalized evaluation subgroups of homotopy groups*, J. Korean Math. Soc. **25** (1988), 333-342.

[17] ______, *Exact G-sequences and relative G-pairs*, J. Korean Math. Soc. **27** (1990), 177-184.

[18] ———, *The G-sequence and ω-homology of a CW-pair*, Top. Appl. **52** (1993), 221-236.

[19] ———, *The generalized evaluation subgroups of product spaces relative to a factor*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 2255-2260.

[20] ———, *Cyclic morphisms in the category of pairs and generalized G-sequences*, J. Math. Kyoto Univ. **32** (1998), 271-285.

[21] ———, *Cocyclic morphisms and dual G-sequences*, to appear in Top. Appl.

[22] K. L. Lim, *On cyclic maps*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **32** (1982), 349-357.

[23] N. Oda, *The homotopy set of the axes of pairings*, Canad. J. Math. **42** (1990), 856-868.

[24] J. Oprea, *Gottlieb groups, group actions*, fixed points and rational homotopy, preprint.

[25] J. Pak and M. H. Woo, *A remark on G-sequences*, Japonika Math. J. **46** (1997), 427-432.

[26] J. Z. Pan, X. Shen and M. H. Woo, *The G-sequence of a map and its exactness*, J. Korean Math. Soc. **35** (1998), 281-294.

[27] J. Z. Pan and M. H. Woo, *Exactness of G-sequences and monomorphisms*, to appear in Top. Appl.

[28] J. Siegel, *G-spaces W-spaces H-spaces*, Pacific J. Math. **31** (1969), 209-214.

[29] K. Varadarajan, *Generalized Gottlieb groups*, J. Indian Math. Soc. **33** (1969), 141-164.

[30] G. W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Springer-Verlag, New York 1978.

[31] M. H. Woo, *Evaluation subgroups and G-sequences*, Banach Center Publ. **49** (1999), 259-268.

[32] M. H. Woo and Y. S. Yoon, *T-spaces by the Gottlieb groups and its duality*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **58** (1995), 1-11.

[33] X. Zhao, *Realization of fixed point sets*, Acta Mathematica Sinica, New Series **12** (1996), 71-76.

우무하

고려대학교 사범대학 수학교육과

서울 성북구 안암동 1번지

E-mail: woomh@kuccnx.korea.ac.kr

이기영
대전산업대학교 정보통신 컴퓨터 공학부
대전 유성구 덕명동 산 16-1번지
E-mail: kylee@hyunum.tnut.ac.kr