Comm. Korean Math. Soc. **15** (2000), No. 2, pp. 197–231

초청논문

일반화 볼록공간에서의 평형문제들

박 세 희

요약문. 평형문제들에서의 기본적인 정리들이 일반화 볼록공간에서 어떻게 확장되는가를 보인다. KKM 이론의 중요한 정리들 대부분이 위상벡터공간에서의 선형성을 가정하지 않아도 위상적인 성질만으로 성립한다. 이같은 정리들의 예로는 KKM 정리, von Neumann 의 최소최대정리와 교차정리, Nash 의 평형정리, 여러 가지 부동점정리, 극대원정리, Ky Fan 의 최소최대부등식, 변분부등식들, 최량근사정리, 일반화 의사평형문제들의 해의 존재정리들이 있다.

1. 서 론

1994 년에 Blum 과 Oettli [4] 는 다음과 같은 $\widehat{x}$ 을 구하는 문제를 한 **평형문제** (*equilibrium problem*) 라 불렀다:

(EP) $\qquad \widehat{x} \in X$ such that $f(\widehat{x}, y) \leq 0$ for all $y \in X$,

여기에서 X 는 한 주어진 집합이며 $f : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ 는 한 확장된 실함수이다.

Received April 1, 2000. Revised April 21, 2000.

2000 Mathematics Subject Classification: 46A55, 46N10, 47H04, 47H10, 47J20, 49J35, 49J40, 52A07, 54C60, 54H25, 91A06, 91B50.

Key words and phrases: 일반화 의사평형문제, KKM 이론, 일반화 볼록공간 ($G-$ 볼록공간), 볼록포, 의사볼록(오목), 하(상)반연속, 변분문제, 최량근사, 변분부등식, Nash 평형정리, 부동점, 극대원.

일반으로 다음과 같은 $\widehat{x}$ 을 구하는 **의사평형문제** (*quasi-equilibrium problem*)를 생각할 수 있다:

(QEP) $\widehat{x} \in X$ such that $\widehat{x} \in S(\widehat{x})$ and $f(\widehat{x}, z) \leq 0$ for all $z \in S(\widehat{x})$,

여기에서 X 와 f 는 위에서와 같으며 $S : X \multimap X$ 는 한 주어진 다가함수 (multimap) 이다.

더 일반으로 한 **일반화 의사평형문제** (*generalized quasi-equilibrium problem*) 는 다음을 구하는 것이다:

(GQEP) $$\widehat{x} \in X \text{ and } \widehat{y} \in T(\widehat{x}) \text{ such that } \widehat{x} \in S(\widehat{x}) \text{ and } f(\widehat{x}, \widehat{y}, z) \leq 0 \text{ for all } z \in S(\widehat{x}),$$

여기에서 X 와 S 는 위에서와 같으며, Y 는 다른 주어진 집합이고, $T : X \multimap Y$ 는 다른 주어진 다가함수이며, $f : X \times Y \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ 는 한 주어진 함수이다.

이같은 문제들은 특별한 경우들을 많이 포함하는데, 예를 들면, 최적화문제, Nash 형 평형문제, 보족성문제, 부동점문제, 변분부등식문제 등과 같은 것이 있다. 또, 이제까지의 위와 같은 여러 평형문제의 연구에서는 관련된 집합들 X 와 Y 가 위상벡터공간의 볼록집합인 경우가 대부분이다. 자세한 것은 Blum and Oettli [4] 와 Noor and Oettli [26] 를 보라.

한편, 필자가 몇 백편의 논문들을 조사해본 결과로는, 위의 평형문제들의 해법은 대부분이 KKM 정리들, 최소최대부등식 (minimax inequality), 여러 가지 부동점정리들, Fan–Browder 형 일치점정리들, 그밖의 존재정리들에 근거를 두고 있으며, 이같이 근거가 되는 정리들 대부분은 소위 KKM 이론 안에서 서로 동치인 명제로 확립된다는 것이다. 실제로 1929 년의 Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz [22] 의 한 정리 (간단히 KKM 원리) 에서 비롯되는 이 이론은, 1991 년에 필자 [39] 가 KKM 사상과 그 응용의 연구로서 처음 명명한 바 있다. 그 뒤로 KKM 원리와 동치인 명제들이 몇 백 개로 늘어남에 따라, 2000 년 현재로 이 이론은 KKM 원리의 여러 동치변형들의 응용을 연구하는 분야라 생각하는 것이 더 적절할 것이다. 그 역사에 대하여는 Park [54, 89] 을 보라.

이 이론은 1961 년 이후의 Ky Fan 의 일련의 논문 [6-11] 에서 위상벡터공간의 볼록집합에 관하여 전개되었고, 그밖의 공간들에 관하여 여러 학자들의

단편적인 일반화가 시도되었다. 그 중에서도 성공적인 것은 1980 년대 이후의 Lassonde [23] 의 볼록공간에서의 일반화와 Horvath [15-18] 의 C-공간에서의 연구였다. 이같은 여러 방향의 전개의 대통일화를 이룬 것은 1990 년대의 필자의 일반화 볼록공간 (G-볼록공간) 의 연구이다.

이 해설논문에서는, 본인이 얻은 결과들 중, 여러가지 평형문제의 기본적이고 잘 알려져 있는 정리들이 G-볼록공간에서 어떻게 나타나게 되는가를 보이려는 것이다. KKM 이론의 역사상 중요한 정리들 대부분이 위상벡터공간에서의 선형성을 가정하지 않아도 위상적인 성질만으로 성립한다는 것은 놀라운 일이 아닐 수 없다.

이러한 예들로는 KKM 정리 외에도 von Neumann, Nash, Fan, Browder 등의 여러 업적과 Brouwer, Schauder, Tychonoff, Hukuhara, Kakutani, Fan, Glicksberg, Himmelberg 등의 부동점정리에 관한 업적들이다. 이들 업적이 비선형해석학, 수리경제학, 게임이론 등에서 차지하는 비중이 너무나 크다는 데에서 (가령 Zeidler [114] 를 보라) 이 글이 반드시 무의미하지는 않으리라 생각한다.

이 논문에 들어 있는 정리들 중 가장 기본적인 KKM 정리 1 과 Fan–Browder 형 정리 5 의 증명을 들기로 한다. 이 글 안에서 따로 출처를 밝히지 않은 필자의 정리들의 증명은 [91] 을 보기 바란다.

2. G-볼록공간들

한 일반화 볼록공간 (*generalized convex space*) 또는 간단히 한 G-볼록공간 (*G-convex space*) $(X, D; \Gamma)$ 는 한 위상공간 X 와 한 공아닌 집합 D 로서, $A \in \langle D \rangle$ 가 $n+1$ 개의 원소를 가질 때, X 의 한 부분집합 $\Gamma(A)$ 와 한 연속함수 $\phi_A : \Delta_n \to \Gamma(A)$ 가 존재하되, 임의의 $J \subset A$ 에 대하여 $\phi_A(\Delta_J) \subset \Gamma(J)$ 가 성립하는 것이다. $\phi_A|_{\Delta_J}$ 를 ϕ_J 라 간주할 수 있다.

여기에서, $\langle D \rangle$ 는 D 의 공아닌 유한부분집합 전체의 집합이고, Δ_n 은 꼭지점 $v_0, v_1, \cdots, v_n$ 을 가지는 한 표준 n-단체 (n-simplex) 이며, Δ_J 는 $J \in \langle A \rangle$ 에 대응되는 Δ_n 의 한 부분단체를 나타낸다; 즉 $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ 이고 $J =$

$\{a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}\} \subset A$ 이면, $\Delta_J = \mathrm{co}\{v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_k}\}$ 이다. 여기에서 co 는 볼록포를 나타내며, 앞으로 $\Gamma(A)$ 를 Γ_A 라 간단히 나타내기도 한다.

특히 $X \supset D$ 임을 강조해야 하는 경우에는 $(X, D; \Gamma)$ 를 $(X \supset D; \Gamma)$ 라 나타내며, 또 $X = D$ 인 경우에는 $(X \supset X; \Gamma)$ 를 그냥 $(X; \Gamma)$ 로 나타낸다.

G-볼록공간의 예는 다음과 같이 너무나 많다. [43, 96] 을 보라.

예 1. D 를 꼭지점들의 집합이라 할 때 $(\Delta_n, D; \mathrm{co})$ 이 가장 간단한 예이다. X 가 한 벡터공간의 볼록부분집합이고 $D \subset X$ 일 때, 임의의 $A \in \langle D\rangle$ 의 볼록포 Γ_A 가 유클리드 위상을 가지도록 X 에 한 위상이 주어져 있다면, $(X, D; \Gamma)$ 는 Lassonde [23] 가 정의한 볼록공간 (*convex space*) 을 확장한 것이 된다. 한 위상벡터공간의 임의의 볼록집합은 한 볼록공간이 되지만, 그 역은 성립하지 않는다.

예 2. $X = D$ 이고 Γ_A 가 가축 (contractible), 또는 더 일반으로, 무한연결 (infinitely connected) (즉, 임의의 $n \geq 0$ 에 대하여 n-연결) 인 부분집합이고, 임의의 $A, B \in \langle X\rangle$ 에 대하여 $A \subset B$ 이면 $\Gamma_A \subset \Gamma_B$ 일 때, $(X; \Gamma)$ 는 Horvath [15-18] 가 도입한 C-공간 (또는 H-공간) 이 된다.

예 3. G-볼록공간의 그밖의 주된 예들로는 Pasicki 의 S-가축공간, Horvath 의 의사볼록공간, Komiya 의 볼록공간, Bielawski 의 단체적 (simplicial) 볼록공간, Joó 의 의사볼록공간, Ben-El-Mechaiekh 등이 도입한 L-공간과 B'-단체적 볼록공간, Verma 와 Stachó 의 일반화 H-공간, Kulpa 의 단체적 구조, Forgo 와 Joó 의 $P_{1,1}$-공간, Llinares 의 mc-공간, Aronszajn 과 Panitchpakdi 의 초볼록 거리공간, Takahashi 의 볼록성을 가지는 거리공간 등이 있다.

예 4. Kirk 와 Reich–Shafrir 이 정의한 쌍곡적 거리공간 (hyperbolic metric space) 들도 G-볼록공간이 된다. 이런 공간들의 예로는 노름공간, Hadamard 다양체, 쌍곡적 거리를 가지는 Hilbert ball 등 많이 있으며, 더구나 쌍곡적 공간들의 임의의 곱도 쌍곡적 공간이 된다. 문헌은 Park [101] 을 보라.

더구나 G-볼록공간의 연속사상에 의한 치역도 한 G-볼록공간이 된다. G-볼록공간의 기본이론은 [57, 63, 74, 86, 88, 91, 104, 105] 에서 확립되었다.

아래에 앞으로 사용할 용어를 간단히 든다.

한 G-볼록공간 $(X \supset D; \Gamma)$ 에 대하여, 한 Γ-볼록부분집합 $Y \subset X$ 는 임의의 $N \in \langle D \rangle$ 에 대하여, $N \subset Y$ 이면 $\Gamma_N \subset Y$ 가 되는 것이다. 또, X 의 임의의 부분집합 Y 에 대하여 Y 의 볼록포 (*convex hull*) $\Gamma\text{-co}\, Y$ 를 다음과 같이 정한다:

$$\Gamma\text{-co}\, Y := \bigcap\{Z \subset X : Z \text{ 는 } X \text{ 의 } \Gamma\text{-볼록부분집합이며 } Z \supset Y\}.$$

이 때, $\Gamma\text{-co}\, Y = \bigcup\{\Gamma\text{-co}\, N : N \in \langle Y \rangle\}$ 임을 쉽게 알 수 있다.

한 G-볼록공간 $(X \supset D; \Gamma)$ 에서의 한 확장된 실함수 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 가 의사오목 [의사볼록] (*quasiconcave* [resp. *quasiconvex*]) 이라 함은, 임의의 $r \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $\{x \in X : f(x) > r\}$ [resp. $\{x \in X : f(x) < r\}$] 가 Γ-볼록이 된다는 것이다.

그리고, 한 위상공간 X 에 대하여 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 가 하반연속 [상반연속](*lower* [resp. *upper*] *semicontinuous* (l.s.c.) [resp. u.s.c.]) 이라 함은, 임의의 r 에 대하여 $\{x \in X : f(x) > r\}$ [resp. $\{x \in X : f(x) < r\}$] 가 열린 집합이 된다는 것이다.

3. KKM 정리

임의의 G-볼록공간 $(X, D; \Gamma)$ 에 대하여, 한 *KKM* 사상 $F : D \multimap X$ 는 모든 $A \in \langle D \rangle$ 에 대하여 $\Gamma_A \subset F(A)$ 가 되는 다가사상이다.

다음 정리는 잘 알려져 있다.

The KKM Principle. *Let D be the set of vertices of Δ_n and $F : D \multimap \Delta_n$ be a KKM map (that is, $\text{co}\, A \subset F(A)$ for each $A \subset D$) with closed [resp. open] values. Then $\bigcap_{z \in D} F(z) \neq \emptyset$.*

위의 원리의 "닫힌" 경우는 1929 년의 Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz [22] 의 정리로서, Sperner's Lemma 를 써서 증명되었으며, Brouwer 의 부동점정리를 증명하는 데 쓰였다. "열린" 경우는 1987 년에 Shih–Tan [106] 과 W.K. Kim [20] 이 동시에 발견했다. "닫힌" 경우와 "열린" 경우가 동치임은

Lassonde [24] 가 처음 보였으며, 아주 쉬운 증명을 최근에 Park [103, 105] 이 보였다.

KKM 정리의 초기의 응용은 Alexandroff–Hopf [2], Alexandroff [1] 등에 나와 있으며, 현대적인 해설은 [103] 에 나와 있다.

최근의 몇 논문에서 다음과 같은 G-볼록공간에 관한 KKM 정리를 얻었다 [91, 101]:

Theorem 1. *Let $(X, D; \Gamma)$ be a G-convex space and $F : D \multimap X$ a multimap such that*

(1.1) *F has closed [resp. open] values; and*

(1.2) *F is a KKM map.*

Then $\{F(z)\}_{z\in D}$ has the finite intersection property.

Further, if

(1.3) *$\bigcap_{z\in M} \overline{F(z)}$ is compact for some $M \in \langle D \rangle$,*

then we have $\bigcap_{z\in D} \overline{F(z)} \neq \emptyset$.

증명. 임의의 $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\} \in \langle D \rangle$ 에 대하여 한 연속함수 $\phi_A : \Delta_n \to \Gamma_A$ 로서 다음을 만족하는 것이 존재한다: 임의의 $0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_k \leq n$ 에 대하여,

$$\phi_A(\mathrm{co}\{v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_k}\}) \subset \Gamma(\{a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}\}) \cap \phi_A(\Delta_n).$$

F 는 KKM 사상이므로, 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathrm{co}\{v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_k}\} &\subset \phi_A^-(\Gamma(\{a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}\}) \cap \phi_A(\Delta_n)) \\ &\subset \bigcup_{j=0}^{k} \phi_A^-(F(a_{i_j}) \cap \phi_A(\Delta_n)). \end{aligned}$$

$F(a_{i_j}) \cap \phi_A(\Delta_n)$ 은 Γ_A 의 완폐부분집합 $\phi_A(\Delta_n)$ 안의 닫힌 [각각, 열린] 집합이므로, $\phi_A^-(F(a_{i_j}) \cap \phi_A(\Delta_n))$ 은 Δ_n 의 닫힌 [각각, 열린] 부분집합이 된다. 이 때 $v_i \mapsto \phi_A^-(F(a_i) \cap \phi_A(\Delta_n))$ 은 $\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ 에서 정의된 한 KKM 사

상이다. 따라서 KKM 원리에 의하여

$$\bigcap_{i=0}^{n} \phi_A^-(F(a_i) \cap \phi_A(\Delta_n)) \neq \emptyset$$

이 되며, 이는 곧 $\bigcap_{i=0}^n F(a_i) \neq \emptyset$ 를 함의한다. 이로써 첫 부분이 증명되었다. 둘째 부분은 첫 부분에서 곧 얻어진다. □

G-볼록공간의 수많은 예들을 다룬 학자들은 그들 자신의 공간에 대하여 위와 같은 KKM 정리가 성립함을 보인 경우가 많다.

이 정리의 한 간단한 경우가 1961 년의 다음과 같은 Ky Fan 의 결과로서, KKM 이론의 시발점이 되는 중요한 것이며, 수백 편의 논문의 기본적인 근거로 인용되고 있다.

Corollary 1.1 (Fan [6]). *Let X be an arbitrary set in a topological vector space Y. To each $x \in X$, let a closed set $F(x) \subset Y$ be given such that the following two conditions are satisfied:*

(1) *The convex hull of any finite subset $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ of X is contained in $\bigcup_{i=1}^n F(x_i)$.*

(2) *$F(x)$ is compact for at least one $x \in X$.*

Then $\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset$.

이것을 흔히 KKMF 정리라 부른다.

Granas [12] 는 다음과 같은 KKM 사상의 예들을 들었다:

(i) **변분문제**. 한 벡터공간 E 의 한 볼록집합 C 에 대하여 $\phi : C \to \mathbb{R}$ 이 한 볼록함수이면

$$G(x) = \{y \in C : \phi(y) \leq \phi(x)\}, \quad x \in C,$$

로 정의되는 $G : C \multimap C$ 는 한 KKM 사상이 된다.

(ii) **최량근사**. 위와 같은 C와 E에 대하여, p가 E에서의 한 반노름 (seminorm) 이고, $f : C \to E$를 한 함수라 하자. 그러면

$$G(x) = \{y \in C : p(f(y) - y) \leq p(f(y) - x)\}, \quad x \in C,$$

로 정의되는 $G : C \multimap C$는 한 KKM 사상이 된다.

(iii) **변분부등식**. 한 내적공간 $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$의 한 볼록부분집합 C와 한 함수 $f : C \to H$에 대하여,

$$G(x) = \{y \in C : \langle f(y), y - x \rangle \leq 0\}, \quad x \in C,$$

로 정의되는 $G : C \multimap C$는 한 KKM 사상이다.

이와 같은 문제들을 푸는 데 위에서의 KKM 정리가 유용함은 쉽게 이해될 것이다. 여러 가지 형태의 KKM 정리들과 그것의 동치변형들에 대하여는 [29, 30, 32, 34, 38-41, 45, 48, 63, 74, 104, 105] 를 보라.

4. von Neumann 형 최소최대정리

G-볼록공간족 $\{(X_i, D_i; \Gamma_i)\}_{i \in I}$에 대하여, 그 곱 $X := \prod_{i \in I} X_i$는 곱위상을 가진다 하고, $D = \prod_{i \in I} D_i$라 하자. 각각의 $i \in I$에 대하여 $\pi_i : D \to D_i$는 사영함수라 하자. 각각의 $A \in \langle D \rangle$에 대하여 $\Gamma(A) := \prod_{i \in I} \Gamma_i(\pi_i(A))$라 두면, $(X, D; \Gamma)$ 또한 한 G-볼록공간이 된다. [109] 를 보라.

특히 모든 i에 대하여 $X_i = D_i$인 경우에, X_i의 Γ-볼록부분집합들의 곱도 곱공간 X 안에서의 한 Γ-볼록부분집합이 된다.

KKM 정리 1을 써서 von Neumann–Sion 최소최대 (minimax) 정리의 G-볼록공간에서의 일반화를 다음과 같이 얻는다:

Theorem 2. *Let* $(X; \Gamma)$ *and* $(Y; \Gamma')$ *be compact* G*-convex spaces and* $f, g : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\dot{\infty}\}$ *be functions such that*

(2.1) $f(x,y) \leq g(x,y)$ *for each* $(x,y) \in X \times Y$;

(2.2) *for each* $x \in X$, $f(x,\cdot)$ *is l.s.c. and* $g(x,\cdot)$ *is quasiconvex on* Y; *and*

(2.3) *for each* $y \in Y$, $f(\cdot,y)$ *is quasiconcave and* $g(\cdot,y)$ *is u.s.c. on* X.

Then we have

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y) \leq \max_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y).$$

$f = g$ 이고 X 와 Y 가 볼록공간일 때, 위의 정리 2는 von Neumann 의 최소최대정리의 확장인 다음과 같은 Sion 의 정리가 된다:

Corollary 2.1 (Sion [107]). *Let* X, Y *be a compact convex set in a topological vector space. Let* f *be a real function defined on* $X \times Y$. *If*

(1) *for each fixed* $x \in X$, $f(x,y)$ *is l.s.c. quasiconvex function on* Y, *and*

(2) *for each fixed* $y \in Y$, $f(x,y)$ *is u.s.c. quasiconcave function on* X,

then we have

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y).$$

실제로 1928 년의 von Neumann 의 정리는 Kakutani [19] 가 다음과 같이 표현하였다.

Corollary 2.2 (von Neumann [111]). *Let* $f(x,y)$ *be a continuous real function defined for* $x \in K$ *and* $y \in L$, *where* K *and* L *are arbitrary bounded closed convex sets in two Euclidean spaces* $\mathbb{R}^m$ *and* $\mathbb{R}^n$. *If for every* $x_0 \in K$ *and for every real number* α, *the set of all* $y \in L$ *such that* $f(x_0,y) \leq \alpha$ *is convex, and if for every* $y_0 \in L$ *and for every real number* β, *the set of all* $x \in K$ *such that* $f(x,y_0) \geq \beta$ *is convex, then we have*

$$\max_{x\in K}\min_{y\in L} f(x,y) = \min_{y\in L}\max_{x\in K} f(x,y).$$

이것은 von Neumann 이 발전시킨 Game 이론의 기본정리 중 하나이며, 그 뒤의 여러 연구의 시발점이 된다.

von Neumann 형 최소최대정리의 필자에 의한 그밖의 일반화는 [79, 83, 84, 91-94, 98, 100] 에도 나와 있다.

5. von Neumann 형 교차정리

주어진 곱집합 $X = \prod_{i\in I} X_i$ 와 임의의 i 에 대하여, $X^i = \prod_{j\neq i} X_j$ 라 두고, $\pi_i : X \to X_i$ 와 $\pi^i : X \to X^i$가 해당되는 사영함수들이라 할 때, $\pi_i(x) = x_i$, $\pi^i(x) = x^i$ 라 나타내기로 하자. 주어진 $x, y \in X$ 에 대하여

$$(y_i, x^i) := (x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

라 한다.

우리의 KKM 이론 안에서, Ky Fan 형 교차정리의 다음과 같은 일반화를 얻는다:

Theorem 3. *Let $X = \prod_{i=1}^n X_i$, $(X;\Gamma)$ be a compact G-convex space, and $A_1, A_2, \cdots, A_n$ n subsets of X such that*

(3.1) *for each $x \in X$ and $i = 1, \cdots, n$, the set*
$A_i(x) = \{y \in X : (y_i, x^i) \in A_i\}$ *is Γ-convex and nonempty; and*

(3.2) *for each $y \in X$ and $i = 1, \cdots, n$, the set*
$A_i(y) = \{x \in X : (y_i, x^i) \in A_i\}$ *is open.*

Then $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$.

각각의 X_i 가 완폐 G-볼록공간일 때, X 도 완폐 G-볼록공간이 된다.

von Neumann 은 그의 최소최대정리를 1937 년에 다음과 같이 확장하였는데, 이는 위의 정리 3 의 단순한 결과가 된다.

Corollary 3.1 (von Neumann [112]). *Let K and L be two compact convex sets in the Euclidean spaces $\mathbb{R}^m$ and $\mathbb{R}^n$, and let us consider their Cartesian product $K \times L$ in $\mathbb{R}^{m+n}$. Let U and V be two closed subsets of*

$K \times L$ *such that for any* $x_0 \in K$ *the set* U_{x_0}, *of* $y \in L$ *such that* $(x_0, y) \in U$, *is nonempty, closed and convex and such that for any* $y_0 \in L$ *the set* V_{y_0}, *of all* $x \in K$ *such that* $(x, y_0) \in V$, *is nonempty, closed and convex. Under these assumptions,* U *and* V *have a common point.*

6. Nash 평형정리

정리 3 으로부터 곧 다음과 같은 G-볼록공간에 관한 Nash 평형정리를 얻는다.

Theorem 4. *Let* $X = \prod_{i=1}^n X_i$, $(X; \Gamma)$ *a compact* G*-convex space, and* $f_1, \cdots, f_n : X \to \mathbb{R}$ *continuous functions such that*

(4.1) *for each* $x \in X$, *each* $i = 1, \cdots, n$, *and each* $r \in \mathbb{R}$, *the set* $\{(y_i, x^i) \in X : f_i(y_i, x^i) > r\}$ *is* Γ*-convex.*

Then there exists a point $x \in X$ *such that*

$$f_i(x) = \max_{y_i \in X_i} f_i(y_i, x^i) \quad \text{for} \quad i = 1, \cdots, n.$$

von Neumann 의 최소최대정리의 최초의 괄목할만한 일반화는 비협력게임의 평형점의 존재에 관한 1951 년의 Nash 의 정리이다. 다음의 것은 Ky Fan [7] 의 표현을 따랐다:

Corollary 4.1 (Nash). *Let* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *be* $n(\geq 2)$ *nonempty compact convex sets each in a real Hausdorff topological vector space. Let* $f_1, f_2, \cdots, f_n$ *be* n *real-valued continuous functions defined on* $X = \prod_{i=1}^n X_i$. *If for each* $i = 1, 2, \cdots, n$ *and for any given point* $(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in \prod_{j \neq i}^n X_j$, $f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ *is a quasiconcave function on* X_i, *then there exists a point* $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \cdots, \widehat{x}_n) \in \prod_{i=1}^n X_i$ *such that*

$$f_i(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \cdots, \widehat{x}_n) = \max_{y_i \in X_i} f_i(\widehat{x}_1, \cdots, \widehat{x}_{i-1}, y_i, \widehat{x}_{i+1}, \cdots, \widehat{x}_n) \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Nash 는 이 업적으로 뒤에 Nobel 경제학상을 받았다. 평형정리의 그밖의 일반화는 [79, 84, 93] 에도 나와 있다.

7. Fan–Browder 형 부동점정리

$X \subset Y$ 일 때, 한 다가사상 $F : X \multimap Y$ 의 한 부동점 (*fixed point*) $x_0 \in X$ 은 $x_0 \in F(x_0)$ 이 되는 점이다. 흔히 $y \in F(x)$ 를 $x \in F^-(y)$ 라 나타내는데, $F^- : Y \multimap X$ 도 한 다가사상이 된다.

한 집합 X 안에서의 한 이항관계 (binary relation) R 은 한 다가사상 $T : X \multimap X$ 로 생각할 수 있으며, 그 역도 성립하는데, 그것은 다음과 같은 자명한 방식에서이다:

$$y \in T(x) \text{ if and only if } (x, y) \in R.$$

따라서, 한 점 $x_0 \in X$ 를 한 사상 $T : X \multimap X$ 의 극대원 (*maximal element*) 이라 부르는 것은 $T(x_0) = \emptyset$ 인 경우이다.

KKM 정리 1 로부터 다음 정리를 직접 얻을 수 있다:

Theorem 5. *Let $(X, D; \Gamma)$ be a compact G-convex space and $S : D \multimap X$, $T : X \multimap X$ two maps such that*

(5.1) *$S(z)$ is open for each $z \in D$; and*

(5.2) *for each $y \in X$, $N \in \langle S^-(y) \rangle$ implies $\Gamma_N \subset T^-(y)$.*

Then either

(i) *T has a fixed point $x_0 \in X$; that is $x_0 \in T(x_0)$; or*

(ii) *there exists a $y \in X$ such that $S^-(y) = \emptyset$.*

증명. 결론 (ii) 의 부정으로, 임의의 $y \in X$ 에 대하여 한 $z \in D$ 로서 $z \in S^-(y)$ 즉 $y \in S(z)$ 인 것이 존재한다고 하자. 따라서 $X = \bigcup_{z \in D} S(z)$ 이고 $S(z)$ 는 열린 집합이다. X 는 완폐이므로 어떤 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \in \langle D \rangle$ 에 대하여 $X = \bigcup_{i=1}^n S(a_i)$ 가 된다. 이제 한 사상 $F : D \multimap X$ 를 $F(z) :=$

$X\backslash S(z)$, $z \in D$, 라 정의하면, (5.1) 로부터 각 $F(z)$ 는 닫힌 집합이다. 또,

$$\bigcap_{i=1}^{n} F(a_i) = X\backslash \bigcup_{i=1}^{n} S(a_i) = X\backslash X = \emptyset$$

이다. 따라서 $\{F(z)\}_{z\in D}$ 는 유한교차성을 가지지 않는다.

이는, KKM 정리 *1* 의 첫부분에 따라, F 가 KKM 사상이 아님을 의미한다. 즉, 어떤 $\{z_1, z_2, \cdots, z_m\} \in \langle D\rangle$ 에 대하여

$$\Gamma(\{z_1, z_2, \cdots, z_m\}) \not\subset \bigcup_{i=1}^{m} F(z_i).$$

이다. 따라서 어떤 $x_* \in \Gamma(\{z_1, z_2, \cdots, z_m\})$ 로서 모든 $i = 1, \cdots, m$ 에 대하여 $x_* \notin F(z_i)$ 인 것이 존재한다.

$$x_* \notin F(z_i) \iff x_* \in S(z_i) \iff z_i \in S^-(x_*)$$

이므로, (5.2)로부터

$$x_* \in \Gamma(\{z_1, z_2, \cdots, z_m\}) \subset T^-(x_*)$$

임을 안다. 즉, $x_* \in T(x_*)$ 이 되어, 결론 (i) 이 성립한다. □

(i) 이 성립하는 경우에 정리 5 를 *Fan–Browder* 형 부동점정리라 부르며, (ii) 가 성립하는 경우에 극대원정리라 부른다. 원래의 Fan–Browder 부동점정리는 아래의 따름정리 5.4 에서 보는 바와 같이 정의역이 완폐인 경우이었는데, 이것을 사상 T 의 완폐성으로 일반화할 수 있는가 하는 것이 1990 년의 Ben-El-Mechaiekh 의 conjecture 이다. 이것이 부분적으로 성립하는 예는 [83] 에서 보는 바와 같이 많이 알려져 있는데, 일반적인 꼴로는 아직 해결되어 있지 않다.

정리 *5* 로부터 다음과 같은 Fan–Browder 형 정리들을 얻는다.

Corollary 5.1. *Let* $(X, D; \Gamma)$ *be a compact G-convex space and* $S : X \multimap D$, $T : X \multimap X$ *two maps such that*

(1) *for each* $x \in X$, $N \in \langle S(x) \rangle$ *implies* $\Gamma_N \subset T(x)$; *and*

(2) $X = \bigcup\{\operatorname{Int} S^{-}(z) : z \in D\}$.

Then T *has a fixed point* $x_0 \in X$.

Corollary 5.2. *Let* $(X \supset D; \Gamma)$ *be a compact* G*-convex space and* $S : X \multimap D$ *a map such that*

(1) *for each* $x \in X$, $S(x)$ *is nonempty; and*

(2) *for each* $z \in D$, $S^{-}(z)$ *is open.*

Then there exists an $\widehat{x} \in X$ *such that* $\widehat{x} \in \Gamma\text{-}\mathrm{co}\, S(\widehat{x})$.

다음은 따름정리 5.1 또는 5.2 의 간단화된 형태이다:

Corollary 5.3. *Let* $(X; \Gamma)$ *be a compact* G*-convex space and* $T : X \multimap X$ *a map such that*

(1) *for each* $x \in X, T(x)$ *is* Γ*-convex; and*

(2) $X = \bigcup\{\operatorname{Int} T^{-}(y) : y \in X\}$.

Then T *has a fixed point.*

따름정리 5.3 으로부터 Browder 의 1968 년의 다음 정리를 쉽게 얻는다:

Corollary 5.4 (Browder [5]). *Let* K *be a nonempty compact convex subset of a topological vector space. Let* T *be a map of* K *into* 2^K, *where for each* $x \in K$, $T(x)$ *is a nonempty convex subset of* K. *Suppose further that for each* y *in* K, $T^{-}(y)$ *is open in* K. *Then there exists* x_0 *in* K *such that* $x_0 \in T(x_0)$.

Browder 의 위의 정리는 그보다 앞선 1961 년의 Fan [6] 의 도형적 [또는 절단성질에 관한] 예비정리 (lemma) 와 KKMF 정리와 동치임이 곧 밝혀졌는데, 그는 증명에서 Brouwer 부동점정리와 단위분할논법을 썼다. Browder 와 Fan 이 모두 Hausdorff 위상벡터공간에 대하여 그들의 결과를 얻은 것은 흥미롭다.

Browder [5] 는 그의 정리를 다가사상의 부동점정리들, 최소최대정리들, 변분부등식들, 단조사상의 확대정리들 사이의 상호관련을 체계적으로 다루는 데 사용하였다.

한편 Fan–Browder 형 정리들을 써서 Borglin and Keiding [3] 과 Yannelis and Prabhakar [113] 는 수리경제에서의 극대원의 존재의 응용을 보였다.

그들이 얻은 정리를 G-볼록공간으로 확장하여 따름정리 5.2 와 동치인 다음을 얻는다:

Corollary 5.5. *Let $(X, D; \Gamma)$ be a compact G-convex space and $S : X \multimap D$, $T : X \multimap X$ two maps such that*

(1) *$S^-(z)$ is open for each $z \in D$;*

(2) *for each $x \in X$, $N \in \langle S(x) \rangle$ implies $\Gamma_N \subset T(x)$; and*

(3) *for each $x \in X$, $x \notin T(x)$.*

Then there exists an $\widehat{x} \in X$ such that $S(\widehat{x}) = \emptyset$.

Fan–Browder 형 부동점정리와 극대원정리에 관한 자세한 연구는 본인의 논문들 [29, 39, 48, 53, 61, 73, 83, 85] 에도 나와 있다.

8. Ky Fan 형 최소최대부등식

Fan–Browder 형 부동점정리로부터 다음과 같은 해석적 교대형식 (analytic alternative) 을 얻는데, 이는 여러 가지 평형문제들을 해결하는 데 근거가 된다.

Theorem 6. *Let $(X, D; \Gamma)$ be a G-convex space, $f : D \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ and $g : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ two extended real valued functions, and $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Suppose that*

(6.1) *$\{y \in X : f(z, y) > \alpha\}$ is open for each $z \in D$;*

(6.2) *for each $y \in X$, $N \in \langle \{z \in D : f(z, y) > \alpha\} \rangle$ implies $\Gamma_N \subset \{x \in X : g(x, y) > \beta\}$; and*

(6.3) *$\{y \in X : f(z_0, y) \le \alpha\}$ is compact for some $z_0 \in D$.*

Then either

(a) *there exists a* $\widehat{y} \in X$ *such that* $f(z, \widehat{y}) \leq \alpha$ *for all* $z \in D$*; or*

(b) *there exists a* $\widehat{x} \in X$ *such that* $g(\widehat{x}, \widehat{x}) > \beta$.

정리 6 으로부터 Ky Fan 최소최대부등식 (minimax inequality) 의 다음과 같은 일반적인 꼴을 곧 얻을 수 있다:

Theorem 7. *Under the hypothesis of* Theorem 6, *if* $\alpha = \beta = \sup\{g(x,x) : x \in X\}$, *then*

(c) *there exists a* $\widehat{y} \in X$ *such that*

$$f(z, \widehat{y}) \leq \sup_{x \in X} g(x,x) \quad \text{for all } z \in D; \text{ and}$$

(d) *we have the minimax inequality*

$$\inf_{y \in X} \sup_{z \in D} f(z,y) \leq \sup_{x \in X} g(x,x).$$

정리 7 의 원조는 다음과 같은 1972 년의 Ky Fan 최소최대부등식이다:

Corollary 7.1 (Fan [9]). *Let* X *be a compact convex set in a topological vector space. Let* f *be a real function defined on* $X \times X$ *such that:*

(a) *For each fixed* $x \in X$, $f(x,y)$ *is a l.s.c. function of* y *on* X.

(b) *For each fixed* $y \in X$, $f(x,y)$ *is a quasiconcave function of* x *on* X.

Then the minimax inequality

$$\min_{y \in X} \sup_{x \in X} f(x,y) \leq \sup_{x \in X} f(x,x)$$

holds.

이것은 어떤 뜻에서는 Sion 의 최소최대정리의 본질을 잘 파악한 것이라 볼 수 있다.

Ky Fan 형 최소최대부등식에 관한 필자의 그밖의 연구에 대하여는 [39, 42, 46, 48, 50, 63, 64]를 보라.

9. 국소 G-볼록공간에서의 부동점정리들

한 G-볼록공간 $(X \supset D; \Gamma)$ 는 다음 조건을 만족할 때 한 국소 G-볼록공간 (*locally G-convex space*) 또는 LG-공간이라 부른다: $(X, \mathcal{U})$ 는 한 분리균질공간으로서 D 는 X 에서 조밀하며, 균질성의 한 기저 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in I}$ 가 존재하되, 임의의 $\lambda \in I$ 에 대하여, $C \subset X$ 가 Γ-볼록이면 $\{x \in X : C \cap V_\lambda[x] \neq \emptyset\}$ 도 Γ-볼록이 된다. 여기에서 $V_\lambda[x] = \{x' \in X : (x, x') \in V_\lambda\}$ 이다.

두 위상공간 X 와 Y 에 대하여, 한 다가사상 $F : X \multimap Y$ 가 상반연속 (*upper semicontinuous*, u.s.c.) 이라 함은 Y 의 임의의 닫힌 집합 C 에 대하여 $F^-(C) := \{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ 가 X 의 닫힌 집합이 되는 것이다. 또 F 가 완폐 (*compact*) 라 함은 그 치역 $F(X)$ 가 Y 의 한 완폐집합에 포함됨을 가리킨다.

최근에 필자는 "열린" 경우의 KKM 정리로부터 해석적부동점이론에 나타나는 많은 정리들이 직접 얻어짐을 보일 수 있었다. 여기에서는 그 중 비교적 간단한 것들만을 들기로 한다.

다음은 필자의 [101] 의 주정리이다:

Theorem 8. *Let $(X, D; \Gamma)$ be an LG-space and $T : X \multimap X$ a compact u.s.c. multimap with nonempty closed Γ-convex values. Then T has a fixed point $x_0 \in X$; that is, $x_0 \in Tx_0$.*

위의 정리에서, 만약에 임의의 $N \in \langle D \rangle$ 에 대하여 $\Gamma_N \subset D$ 이면, T 는 D 위에서만 Γ-볼록인 함수값을 가지면 충분하며, 굳이 X 전체에서 Γ-볼록인 값을 가지지 않아도 된다.

정리 8 의 유용성을 보이기 위하여, Himmelberg [14] 가 도입한 다음 개념을 든다: 한 위상벡터공간 E 의 한 공아닌 부분집합 Y 가 거의 볼록 (*almost convex*) 이라 함은, E 의 원점 0 의 임의의 근방 V 와 Y 의 임의의 유한부분집합 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 에 대하여, 다음을 만족하는 Y 의 유한부분집합 $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ 이 존재한다는 것이다: 임의의 $i = 1, 2, \cdots, n$ 에 대하여 $z_i - y_i \in V$ 이고 $\mathrm{co}\{z_1, z_2, \cdots, z_n\} \subset Y$ 이다.

필자는 E의 한 부분집합 X가 거의 볼록인 부분집합 Y를 가지면, X를 한 G-볼록공간이 되게 할 수 있음을 발견하였다. 따라서, G-볼록공간의 한 새로운 예를 찾아낸 것이며, 이 사실을 써서 위의 정리의 한 중요한 예를 다음과 같이 얻었다:

Corollary 8.1. *Let X be a subset of a locally convex Hausdorff topological vector space E and Y an almost convex dense subset of X. Let $T : X \multimap X$ be a compact u.s.c. multimap with nonempty closed values such that Ty is convex for all $y \in Y$. Then T has a fixed point.*

위의 따름정리 8.1의 $X = Y$인 특수한 경우가 다음의 정리이다:

Corllary 8.2 (Himmelberg [14]). *Let X be a nonempty convex subset of a locally convex Hausdorff topological vector space E and $T : X \multimap X$ a compact u.s.c. multimap with nonempty closed convex values. Then T has a fixed point $x_0 \in T(x_0)$.*

실제로 이 정리는 역사상 잘 알려진 Brouwer, Schauder, Tychonoff, Hukuhara, Kakutani, Bohnenblust and Karlin, Fan, Glicksberg 등의 부동점정리들을 포함하고 있다. 그 중에서도 잘 알려진 것은 다가사상에 관한 첫 부동점정리인 1941년의 Kakutani의 다음과 같은 정리이다:

Corollary 8.3 (Kakutani [19]). *If $x \mapsto \Phi(x)$ is an upper semicontinuous point-to-set mapping of an r-dimensional closed simplex S into the family of closed convex subset of S, then there exists an $x_0 \in S$ such that $x_0 \in \Phi(x_0)$.*

또는 이것과 동치인 것으로

Corollary 8.4 (Kakutani [19]). Corollary 8.3 *is also valid even if S is an arbitrary bounded closed convex set in a Euclidean space.*

Kakutani 는 von Neumann 의 교차성예비정리와 최소최대정리의 간단한 증명을 얻기 위한 목적으로 위의 두 정리를 Brouwer 부동점정리로부터 이끌어 냈다.

필자의 해석적부동점이론에서의 통일화는 방대한 내용이어서 수십 편의 문헌을 일일이 들지는 않기로 하거니와 독자들은 필자의 [54, 89, 90, 97, 101] 에서 그 주요내용을 살필 수 있을 것이다. 한편 이들에 대한 좀더 심도있는 연구가 현재 진행 중이다.

10. 변분부등식들

정리 6 또는 정리 7 의 Ky Fan 형 최소최대부등식을 써서 다음과 같은 변분부등식의 해의 존재정리를 얻는다:

Theorem 9. *Let $(X;\Gamma)$ be a compact G-convex space and $p, q : X \times X \to \mathbb{R}$ and $h : X \to \mathbb{R}$ functions satisfying*

(9.1) $p(x,y) \leq q(x,y)$ *for each* $(x,y) \in X \times X$, *and* $q(x,x) \leq 0$ *for all* $x \in X$;

(9.2) *for each* $x \in X$, $q(x,\cdot) + h(\cdot)$ *is quasiconcave on* X; *and*

(9.3) *for each* $y \in X$, $p(\cdot,y) - h(\cdot)$ *is l.s.c. on* X.

Then there exists a $y_0 \in X$ *such that*

$$p(x,y_0) + h(y_0) \leq h(x) \quad \text{for all } x \in X.$$

이 정리는 또한 많은 특별한 경우들을 포함하고 있는데, 그 중 널리 알려진 것 두 개만 들기로 한다.

Corollary 9.1 (Hartman–Stampacchia [13]). *Let K be a compact convex subset in $\mathbb{R}^n$ and $f : K \to \mathbb{R}^n$ a continuous map. Then there exists $u_0 \in K$ such that*

$$(f(u_0), v - u_0) \geq 0 \quad \text{for } v \in K,$$

where $(\cdot,\cdot)$ denotes the scalar product in $\mathbb{R}^n$.

따름정리 9.1 로부터 Hartman and Stampacchia 는 어떤 비선형 타원형 미분함수방정식에 관련된 Dirichlet 경계값문제들의 (약한) 균등 Lipshitz 연속해들의 존재와 일의성을 이끌어 냈다. 실제로 이 따름정리 9.1 은 Brouwer 부동점정리와 동치이다.

위의 따름정리 9.1 을 1967 년에 Browder 가 다음과 같이 확장하였다:

Corollary 9.2 (Browder [5]). *Let E be a locally convex Hausdorff topological vector space, K a compact convex subset of E, and T a continuous mapping of K into E^*. Then there exists an element u_0 of K such that*

$$(T(u_0), u - u_0) \geq 0$$

for all $u \in K$.

여기에서 E^* 는 E 의 위상적 쌍대이며 (,) 는 E^* 와 E 의 원소 사이의 pairing 이다.

Browder 의 정리 또한 부동점이론을 비롯한 여러 분야에 응용되었다.

변분부등식에 관한 필자의 연구로는 [28, 31, 33, 35, 37, 56, 77] 이 있으며, 보다 일반적인 형태의 변분부등식에 관한 문헌은 12 절의 것을 보기 바란다.

11. 최량근사

정리 9 의 한 간단한 결과는 다음과 같다:

Theorem 10. *Let X be a compact convex subset of a topological vector space E and $f : X \to E$ a continuous function. Then for any continuous seminorm p on E, there exists a point $y_0 \in X$ such that*

$$p(y_0 - f(y_0)) \leq p(x - f(y_0)) \quad \text{for all } x \in X.$$

이 정리는 Ky Fan [8] 에서 비롯되는 것으로, 흔히 최량근사정리라 불리우며, 부동점의 존재정리나 상반연속 다가사상보다 일반적인 사상족에 관한 비분리정리들에 적용되었다.

예를 들면, 다음과 같은 Schauder 부동점정리의 확장이 있다

Corollary 10.1 (Fan [8]). *Let X be a nonempty compact convex set in a normed vector space E. For any continuous map $f : X \to E$, there exists a point $y_0 \in X$ such that*

$$\|y_0 - f(y_0)\| = \min_{x \in X} \|x - f(y_0)\|.$$

(In particular, if $f(X) \subset X$, then y_0 is a fixed point of f.)

최량근사에 관련된 필자의 논문으로는 [27, 36, 44, 47, 49, 51, 58, 65, 66, 69, 76, 80, 87] 이 있다.

12. 일반화 의사평형문제들

아무런 선형구조를 가지지 않는 G-볼록공간에서의 어떤 의사평형문제 (QEP) 의 해의 존재는 다음과 같이 보일 수 있다:

Theorem 11. *Let $(X;\Gamma)$ be a compact G-convex space, and let $S : X \multimap X$ be a map with nonempty Γ-convex values and open fibers (that is, $S^-(z)$ is open for each $z \in X$) such that $\overline{S} : X \multimap X$ is u.s.c. Suppose that $\psi : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ is a continuous function such that $\psi(x, \cdot)$ is quasiconvex and*

$$\psi(x,x) \geq 0 \qquad \text{for all } x \in X.$$

Then there exists an $\widehat{x} \in X$ such that

$$\widehat{x} \in S(\widehat{x}) \quad \text{and} \quad \psi(\widehat{x}, x) \geq 0 \qquad \text{for all } x \in S(\widehat{x})$$

이는 Lin and Park [78] 의 한 정리이다.

이와 유사한 정리는 너무나 많아서 일일이 들 수가 없으나, 이 절 끝의 문헌을 참고하기 바란다.

한 Hausdorff 위상벡터공간 (t.v.s.) E 의 한 공아닌 부분집합 X 가 (Klee [21] 의 의미에서) 허용가능 (admissible) 이라 함은, X 의 임의의 완폐부분집합 K 와 E 의 원점 0 의 임의의 근방 V 에 대하여 다음을 만족하는 한 연속함수 $h : K \to X$ 가 존재함을 뜻한다: 모든 $x \in K$ 에 대하여 $x - h(x) \in V$ 이고, $h(K)$ 는 E 의 한 유한차원 부분공간 L 에 포함된다.

일찌기 Hukuhara 와 Nagumo 는 한 국소볼록위상벡터공간의 임의의 볼록부분집합이 허용가능임을 보였다. 허용가능인 위상벡터공간의 예로는 $0 < p < 1$ 일 때의 l^p, $L^p(0,1)$, Hardy 공간 H^p, $[0,1]$ 에서의 가측사상들의 동치류의 공간 $S(0,1)$, 어떤 Orlicz 공간들, Schauder 기저를 가지는 ultrabarrelled 위상벡터공간 등이 있다. 또 F-norm 을 줄 수 있는 위상벡터공간의 임의의 국소볼록부분집합이나 한 위상벡터공간의 임의의 완폐, 볼록, 국소볼록인 부분집합은 허용가능임이 알려져 있다.

필자 [68, 89, 90, 93] 는 다음과 같은 부동점정리를 얻었는데, 이는 Himmelberg [14] 의 정리를 크게 확장한 것이다:

Theorem 12. *Let E be a t.v.s. and X an admissible convex subset of E. Then any compact acyclic map $F : X \multimap X$ has a fixed point $x \in X$; that is, $x \in F(x)$.*

여기에서 비윤상사상 (acyclic map) 이라 함은 상반연속 (u.s.c.) 이면서 공아닌 닫힌 비윤상값을 가지는 다가사상을 가리킨다. 또 한 위상공간이 비윤상이라 함은 유리수계수에 관한 reduced Čech homology groups 가 모두 단위원만으로 되어 있음을 뜻한다.

위의 정리 12 로부터 곧 다음과 같은 일반화 의사평형문제 (GQEP) 의 해의 존재정리를 얻는다.

Theorem 13. *Let X and Y be admissible convex subsets of t.v.s. E and F, respectively, $S : X \multimap X$ a compact closed map, $T : X \multimap Y$ a compact acyclic map, and $\phi : X \times Y \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ an u.s.c. function. Suppose that*

(13.1) *the function* $m : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *defined by*

$$m(x,y) = \max_{s \in S(x)} \phi(x,y,s) \quad \text{for } (x,y) \in X \times Y$$

is l.s.c.; and

(13.2) *for each* $(x,y) \in X \times Y$, *the set*

$$M(x,y) = \{u \in S(x) : \phi(x,y,u) = m(x,y)\}$$

is acyclic.

Then there exists an $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in X \times Y$ such that

$$\widehat{x} \in S(\widehat{x}),\ \widehat{y} \in T(\widehat{x}),\ \text{and } \phi(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{x}) \geq \phi(\widehat{x}, \widehat{y}, s) \quad \text{for all } s \in S(\widehat{x}).$$

이는 필자 [93] 의 한 정리이다. 정리 12 와 13 이 동치임은 자명하다. 10 절과 12 절에 관련된 본인의 연구는 [52, 56, 59, 60, 62, 63, 70-72, 75, 81, 95] 에 나와 있다.

13. 전이된 닫힌 (열린) 사상값을 가지는 경우

위의 정리들의 대부분은 Brouwer 부동점정리, Sperner 예비정리, KKM 원리와 동치이다. [54, 63, 89, 90, 103] 을 보라.

흔히 많은 저자들이 KKM 사상의 사상값을 완폐적으로 닫힌 (compactly closed) 집합 또는 유한적으로 닫힌 (finitely closed) 집합으로, 또는 그에 대응되는 열린 집합으로, 잡는 경향이 있어 왔는데, 이런 경우에 볼록공간 그 자체에 완폐적으로 생성된 위상 (compactly generated topology) 또는 유한적으로 생성된 위상 (finitely generated topology) 을 줌으로써 굳이 그러한 사상값을 생각할 필요가 없다. 이 사실은 KKM 원리와 동치인 많은 정리들에서도 마찬가지이다. 본인의 것들을 포함하여 수많은 논문들에서 오랜동안 이같은 사실들이 간과되어 왔다.

한편 Tian [110] 이 도입한 **전이된 닫힌 사상값을 가지는** (*transfer closed-valued*) KKM 사상에 관하여 G-볼록공간에서의 KKM 원리의 또다른 변형이 다음과 같이 얻어진다:

Theorem 14. *Let $(X, D; \Gamma)$ be a G-convex space and $F : D \multimap X$ a map such that*

(2.1) $\bigcap_{z\in D} \overline{F(z)} = \bigcap_{z\in D} F(z)$ *[that is, F is transfer closed-valued];*

(2.2) $\overline{F}$ *is a KKM map; and*

(2.3) $\bigcap_{z\in M} \overline{F(z)}$ *is compact for some $M \in \langle D\rangle$.*

Then we have $\bigcap_{z\in D} F(z) \neq \emptyset$.

이것을 써서 KKM 원리와 동치인 많은 정리들에서 닫힌 값 [열린 값] 대신에 전이된 닫힌 [열린] 값으로 대치한 결과가 많이 나타나고 있다. 예를 들면, Fan–Browder 형 정리 5 는 다음과 같이 일반화된다.

Theorem 15. *Let $(X, D; \Gamma)$ be a compact G-convex space and $S : D \multimap X$, $T : X \multimap X$ two maps such that*

(15.1) $\bigcup_{z\in D} S(z) = \bigcup_{z\in D} \operatorname{Int} S(z)$ *[that is, S is transfer open-valued]; and*

(15.2) *for each $y \in X$, $N \in \langle S^-(y)\rangle$ implies $\Gamma_N \subset T^-(y)$.*

Then either

(i) *T has a fixed point $x_0 \in X$, that is, $x_0 \in T(x_0)$; or*

(ii) *there exists a $y \in X$ such that $S^-(y) = \emptyset$.*

다른 정리들도 이같은 방법으로 적절히 변형할 수 있다. 이 절과 다음 절의 내용은 [104] 를 따랐다.

14. 일반화된 완폐성 조건

앞의 모든 정리들이 관련된 공간의 완폐성 또는 그에 대치되는 조건을 가지고 있음을 주목하자. 이같은 **완폐성 조건** (*compactness condition*) 또는 **강제**

성 조건 (*coercivity condition*) 이 여러 개 있는데, 저자가 주로 사용하는 아주 일반적인 것을 들어보기로 하자.

한 G-볼록공간 $(X \supset D;\Gamma)$ 와 X 의 한 부분집합 Y 에 대하여, $(Y, Y \cap D;\Gamma')$ 이 $(X \supset D;\Gamma)$ 의 한 G-볼록부분공간이라 함은, 임의의 $A \in \langle Y \cap D\rangle$ 에 대하여 $\Gamma'(A) := \Gamma(A) \cap Y$ 라 둘 때, $(Y, Y \cap D;\Gamma')$ 자신이 한 G-볼록공간이 됨을 가리킨다.

한 G-볼록공간 $(X \supset D;\Gamma)$ 에 대하여, 우리는 아주 일반적인 완폐성 조건을 가지는 KKM 정리의 일반적인 꼴을 얻는다.

Theorem 16. *Let $(X \supset D;\Gamma)$ be a G-convex space, K a nonempty compact subset of X, and $F : D \multimap X$ a multimap such that*

(16.1) $\bigcap_{z\in D} F(z) = \bigcap_{z\in D} \overline{F(z)}$;

(16.2) $\overline{F}$ *is a KKM map; and*

(16.3) *for each $N \in \langle D\rangle$, there exists a compact G-convex subspace L_N of X containing N such that*

$$L_N \cap \bigcap\{\overline{F(z)} : z \in L_N \cap D\} \subset K.$$

Then $K \cap \bigcap\{F(z) : z \in D\} \neq \emptyset$.

완폐성 조건 (16.3) 은 S. Y. Chang 이 처음 사용하고, 본인이 10 년 넘게 보급시킨 바 있는데, 최근에서야 이것을 사용하는 사람들이 나타나기 시작했다.

이것을 우리가 [63, 91] 에서 사용한 것과 같은 동치 변형을 해나가면, 다음과 같은 Fan–Browder 형 부동점정리를 얻는다.

Theorem 17. *Let $(X \supset D;\Gamma)$ be a G-convex space, K a nonempty compact subset of X, and $S : X \multimap D$, $T : X \multimap X$ multimaps. Suppose that*

(17.1) *for each $x \in X$, $M \in \langle S(x)\rangle$ implies $\Gamma_M \subset T(x)$;*

(17.2) $K \subset \bigcup\{\mathrm{Int}\, S^-(z) : z \in D\}$; *and*

(17.3) *for each $N \in \langle D\rangle$, there exists a compact G-convex subspace L_N of X containing N such that*

$$L_N \backslash K \subset \bigcup\{\operatorname{Int} S^-(z) : z \in L_N \cap D\}.$$

Then T has a fixed point.

15. 개인적인 회고와 전망

1983 년 여름 NATO-ASI, Montreal 에 참가하여 Ky Fan 과 A. Granas 의 강연을 듣고, KKM 원리의 여러 가지 응용을 알게 되었다. 그들은 주로 위상벡터공간의 볼록집합에 대한 연구에 시종했는데, 1983 년 이후에는 Lassonde 의 볼록공간 (convex space) 의 연구로 대세가 바뀌었다 [23]. 그 뒤 곧 Horvath 의 C-공간 (또는 H-공간) [15-18] 이 나타남에 따라 수 많은 사람들이 Ky Fan 의 업적들 [6-11] 과 그밖의 결과들을 C-공간의 경우로 확장하는 연구에 종사하게 되었다. 그밖에도 여러 학자들이 필요에 따라 여러 가지 추상적 볼록공간을 생각해내고 그에 관한 연구를 진행하고 있었다.

1991 년의 Halifax 회의에서 본인은 이같은 연구를 처음으로 KKM 이론이라 불렀다 [39]. 그 뒤 1992 년 겨울, 본인은 UCLA 를 방문 중이었는데, 그 때에 비로소 일반화 볼록공간의 개념을 얻게 되었다. 이는 한 달 이상의 불면의 밤들과 수없이 많은 사고실험을 거쳐 얻어진 것이며, 이런 종류의 공간이 기존의 KKM 이론의 대부분의 결과를 표현하는 데 적절한 것임을 알게 되었다. 그 뒤에도, 이러한 공간의 개념을 조금씩 개선하여 오늘날 이 논문에 나타낸 것과 같은 형태로 바꾸어 왔다.

1993 년 이후에 일반화 볼록공간의 이론은 김훈주, M. P. Chen, L.-J. Lin, 김인숙 박사의 협조를 받아 많은 논문으로 전개되었다. 이같은 연구 방향은 미국, 캐나다, 오스트랄리아, 프랑스, 타이완, 베트남, 중국, 폴란드 등으로 파급되었고, 이들 여러 나라에서 여러 명의 박사논문의 주제가 되어 왔다. 이 과정을 통하여 볼록공간이나 C-공간에서 성립하는 것이 G-볼록공간에서 다 성립하는 것은 아니지만, 대부분의 유용한 결과들이 이같이 넓은 범위의 공간족에서 성립한다는 것은 명백해졌으며, 보다 추상적인 G-볼록공간의 범주에서 KKM 이론의 새로운 결과도 많이 얻어졌다. 그런데도 아직 좁은 범위의 공간족에 관

한 연구를 계속하는 이들이 많다는 사실이 안타깝다. 앞으로 이 공간족에 관한 연구가 좀더 체계화되고, 더 새로운 괄목할만한 내용이 발견되고, 그들이 크게 응용될 수 있는 날이 오기를 기대한다.

이 논문의 일부 내용은 Internatinal Workshop on Applied Analysis and Optimization (AAO'2000), Aug. 23-31, 2000, Danang, Vietnam 의 초청강연으로 발표될 예정이다.

참고문헌

[1] P.S. Alexandroff, *Combinatorial Topology*, OGIZ, Moscow-Leningrad, 1947 (Russian).

[2] P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie I*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1935.

[3] A. Borglin and H. Keiding, *Existence of equlibrium actions and of equilibrium*, J. Math. Econom. **3** (1976), 313–316.

[4] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student **63** (1994), 123–145.

[5] F.E. Browder, *The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces*, Math. Ann. **177** (1968), 283–301.

[6] Ky Fan, *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Ann. **142** (1961), 305–310.

[7] ______, *Applications of a theorem concerning sets with convex sections*, Math. Ann. **163** (1966), 189–203.

[8] ______, *Extensions of two fixed point theorems of F.E. Browder*, Math. Z. **112** (1969), 234–240.

[9] ______, *A minimax inequality and applications*, Inequalities III (O. Shisha, ed.), Academic Press, New York, 1972, pp.103–113.

[10] ______, *A further generalization of Shapley's generalization of the Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz theorem*, Game Theory and Mathematical Economics (O. Moeschlin and D. Palaschke, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1981, pp.275–279.

[11] ______, *Some properties of convex sets related to fixed point theorems*, Math. Ann. **266** (1984), 519–537.

[12] A. Granas, *KKM maps and their applications to nonlinear problems*, The Scottish Book (R.D. Mauldin, ed.), Birkhäuser, Boston, 1981, pp.45–61.

[13] P. Hartman and G. Stampacchia, *On some nonlinear elliptic differential functional equations*, Acta Math. **115** (1966), 271–310.

[14] C.J. Himmelberg, *Fixed points of compact multifunctions*, J. Math. Anal. Appl. **38** (1972), 205–207.

[15] C.D. Horvath, *Some results on multivalued mappings and inequalities without convexity*, Nonlinear Analysis and Convex Analysis (B.L. Lin and S. Simons, eds.), Dekker, New York, 1987, pp.99–106

[16] ______, *Convexité généralisée et applications*, Méthodes Topologiques en Analyse Convexe, Sem. Math. Supér 110, Univ. Montreal, 1990, pp.79–99.

[17] ______, *Contractibility and general convexity*, J. Math. Anal. Appl. **156** (1991), 341–357.

[18] ______, *Extensions and selection theorems in topological spaces with a generalized convexity structure*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **2** (1993), 253–269.

[19] S. Kakutani, *A generalization of Brouwer fixed point theorem*, Duke Math. J. **8** (1941), 457–459.

[20] W. K. Kim, *Some applications of the Kakutani fixed point theorem*, J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), 119–122.

[21] V. Klee, *Leray-Schauder theory without local convexity*, Math. Ann. **141** (1960), 286–296.

[22] B. Knaster, K. Kuratowski, und S. Mazurkiewicz, *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-Dimensionale Simplexe*, Fund. Math. **14** (1929), 132–137.

[23] M. Lassonde, *On the use of KKM multifuntions in fixed point theory and related topics*, J. Math. Anal. Appl. **97** (1983), 151–201.

[24] ______, *Sur le principe KKM*, C. R. Acad. Sci. Paris **310** (1990), 573–576.

[25] L.-J. Lin, C.-J. Ko, and S. Park, *Coincidence theorems for set-valued maps with G-KKM property on generalized convex spaces*, Discuss. Math.–Diff. Incl. **18** (1998), 69–85.

[26] M.A. Noor and W. Oettli, *On general nonlinear complementarity problems and quasi-equilibria*, Le Matematiche **49** (1994), 313–331.

[27] Sehie Park, *On generalizations of Ky Fan's theorems on best approximations*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. **9** (1987), 619–628. MR 88h:41044. Zbl.642.41017.

[28] ______(with J. A. Park), *Some approximations of solutions of the Lions-Stampacchia variational inequality*, Bull. Korean Math. Soc. **24** (1987), 127–129. MR 89d:47134. Zbl.693.47047.

[29] ______, *Generalized Fan-Browder fixed point theorems and their applications*, Collec. of Papers Dedicated to J. G.Park, 1989, pp.51–77. MR 93d:00041, 93f:47074.

[30] ______, *Generalizations of Ky Fan's matching theorems and their applications*, J. Math. Anal. Appl. **141** (1989), 164–176. MR 91b:47130. Zbl.681.47028.

[31] ______(with I. Kim), *Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems*, Bull. Korean Math. Soc. **26** (1989), 139–149. MR 91a:47081. Zbl.701.49018.

[32] ______, *Convex spaces and KKM families of subsets*, Bull. Korean Math. Soc. **27** (1990), 11–14. MR 91h:54065. Zbl.746.47036.

[33] ______(with S. K. Kim), *On generalized extremal principles*, Bull. Korean Math. Soc. **27** (1990), 49–52. MR 91e:49016. Zbl.716.49007.

[34] ______, *Generalized matching theorems for closed coverings of convex sets*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. **11** (1990), 101–110. MR 91h:52001. Zbl.706.52001.

[35] ______, *Variational inequalities and extremal principles*, J. Korean Math. Soc. **28** (1991), 45–56. MR 92h:47094. Zbl.743.49004.

[36] ______, *Best approximations, inward sets, and fixed points*, Progress in Approximation Theory (P. Nevai and A. Pinkus, eds.), Academic Press, 1991, pp.711–719. MR 92b:41002, 93c:41055.

[37] ______, *Remarks on some variational inequalities*, Bull. Korean Math. Soc. **28** (1991), 163–174. MR 93b:49011. Zbl.753.47035.

[38] ______, *Generalizations of Ky Fan's matching theorems and their applications*, II, J. Korean Math. Soc. **28** (1991), 275–283. MR 93e:47078. Zbl.813.47063.

[39] ______, *Some coincidence theorems on acyclic multifunctions and applications to KKM theory*, Fixed Point Theory and Applications (K.-K. Tan, ed.), World Scientific Publ., River Edge, NJ, 1992, pp.248–277. MR 93e:47002, 93j:47087.

[40] ______, *Some coincidence theorems on acyclic multifunctions and applications to KKM theory*, II, Lecture Note Ser. **3**, GARC-SNU, 1992, pp.103-120.

[41] ______, *On the KKM type theorems on spaces having certain contractible subsets*, Kyungpook Math. J. **32** (1992), 607–628. Amer. Math. Soc. Abstract 93T-47-15.

[42] ______, *On minimax inequalities on spaces having certain contractible subsets,* Bull. Austral. Math. Soc. **47** (1993), 25–40. Amer. Math. Soc. Abstract 93T-47-45. MR 94a:49055. Zbl.807.49005.

[43] ______(with H. Kim), *Admissible classes of multifunctions on generalized convex spaces*, Proc. Coll. Natur. Sci., SNU **18** (1993), 1-21.

[44] ______(with K. S. Jeong), *Generalization of the Prolla type best approximations in normed vector spaces*, Proc. 2nd GARC Symp. Pure Appl. Math., Pt.II, RIM-GARC-SNU, 1993, pp.13–25.

[45] ______, *A unified approach to generalizations of the KKM type theorems related to acyclic maps*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. **15** (1994), 105–119. MR 95a:47063. Zbl.813.47064.

[46] ______(with J. S. Bae and H. K. Kang), *Geometric properties, minimax inequalities, and fixed point theorems on convex spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), 429-440. Amer. Math. Soc. Abstract 877-47-39. MR 94i:47093. Zbl.806.47054.

[47] ______, *Remarks on generalizations of best approximation theorems*, Honam Math. J. **16** (1994), 27–39. MR 95i:41051.

[48] ______, *Foundations of the KKM theory via coincidences of composites of admissible u.s.c. maps*, J. Korean Math. Soc. **31** (1994), 493-519. MR 95i:47104. Zbl.829.49002.

[49] ______(with S. P. Singh and B. Watson), *Remarks on best approximation theorems*, Indian J. pure appl. Math. **25** (1994), 459–462. MR 95c:47070. Zbl.807.47043.

[50] ______, *Acyclic maps, minimax inequalities, and fixed points*, Nonlinear Analysis, TMA **24** (1995), 1549–1554. Amer. Math. Soc. Abstract 92T-47-162. MR 96h:47065.

[51] ______, *Best approximation theorems for composites of upper semicontinuous maps*, Bull. Austral. Math. Soc. **51** (1995), 263–272. MR 96g:41035. Zbl.822.47049.

[52] ______, *Some existence theorems for two variable functions on topological vector spaces*, Kangweon-Kyungki Math. J. **3** (1995), 11–16.

[53] ______, *Coincidence points and maximal elements of multifunctions on convex spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae **36** (1995), 57–67. MR 96f:47116. Zbl.829.47051.

[54] ______, *Eighty years of the Brouwer fixed point theorem*, Antipodal Points and Fixed Points (by J. Jaworowski, W. A. Kirk, and S. Park), Lect. Notes Ser. **28**, RIM-GARC, Seoul Nat. U., 1995, pp.55–97. MR 96j:55004, 97a:47099. Zbl.842.54040.

[55] ______, *Some applications of the KKM theory and fixed point theory for admissible multifunctions*, Topology—Proc. in honor of J. Kim, RIM-GARC, Seoul Nat. U., 1995, pp.207–221.

[56] ______(with M.-P. Chen), *Generalized quasi-variational inequalities*, Far East J. Math. Sci. **3** (1995), 185–190. MR 97b:47071.

[57] ______(with H. Kim), *Coincidence theorems for admissible multifunctions on generalized convex spaces*, J. Math. Anal. Appl. **197** (1996), 173–187. MR 97b:47072.

[58] ______, *Remarks on set-valued generalizations of best approximation theorems*, Kyungpook Math. J. **35** (1996), 771–782.

[59] ______, *Applications of the Idzik fixed point theorem*, Proc. Nonlinear Funct. Anal. and Appl. **1** (1996), 21–56. *Corrections*, ibid. **2** (1997), 203–204.

[60] ______(with J. A. Park), *The Idzik type quasi-variational inequalities and noncompact optimization problems*, Colloq. Math. **71** (1996), 287–295. MR 97i:49015.

[61] ______, *Five episodes related to the Fan-Browder fixed point theorem*, Nonlinear Analysis Forum **2** (1996), 11–24. MR 99h:54064.

[62] ______(with M.-P.Chen), *A unified approach to generalized quasi-variational inequalities*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **4** (1997), 103–118. Amer. Math. Soc. Abstract 97T-47-108. MR 98c:49022.

[63] ______(with H. Kim), *Foundations of the KKM theory on generalized convex spaces*, J. Math. Anal. Appl. **209** (1997), 551–571. MR 98j:47134.

[64] ______, *A generalized minimax inequality related to admissible multimaps and its applications*, J. Korean Math. Soc. **34** (1997), 719–730. MR 98j:47133.

[65] ______, *Best approximations and fixed points of nonexpansive maps in Hilbert spaces*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. **18** (1997), 649–657. MR 98k:47104.

[66] ______(with M.-P. Chen), *On the Browder type best approximation theorems*, Indian J. Math. **39** (1997), 91–97. MR 98h:47073.

[67] ______, *Generalized equilibrium problems and generalized complementarity problems*, J. Optim. Th. Appl. **95** (1997), 409–417. MR 98m:90163.

[68] ______, *Fixed points of the better admissible multimaps*, Math. Sci. Res. Hot-Line **1** (9) (1997), 1–6.

[69] ______, *Extensions of best approximation and coincidence theorems*, Inter. J. Math. & Math. Sci. **20** (1997), 689–698. Amer. Math. Soc. Abstract 94T-47-163. MR 98h:41043.

[70] ______, *Collectively fixed points and equilibrium points of abstract economies*, Math. Sci. Res. Hot-Line **1** (11) (1997), 9–13. MR 98j:47135.

[71] ______(with B. G. Kang), *Generalized variational inequalities and fixed point theorems*, Nonlinear Analysis, **31** (1998), 207–216. Amer. Math. Soc. Abstract 97T-47-150. MR 98k:47130.

[72] ______(with M.-P. Chen), *Generalized variational inequalities of the Hartman-Stampacchia-Browder type*, J. Inequal. & Appl. **2** (1998), 71–87.

[73] ______(with S. Kum), *An application of Browder-type fixed point theorem to generalized variational inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **218** (1998), 519–526. MR 99a:47106.

[74] ______(with H. Kim), *Generalizations of the KKM type theorems on generalized convex spaces*, Indian J. pure appl. Math. **29** (1998), 121–132. MR 99b:54028.

[75] ______(with A. Idzik), *Leray-Schauder type theorems and equilibrium existence theorems*, Differential Inclusions and Optimal Control, Lect. Notes in Nonlinear Anal. **2** (1998), 191–197.

[76] ______(with T.-C. Lin), *Approximation and fixed point theorems for condensing composites of multifunctions*, J. Math. Anal. Appl. **223** (1998), 1–8. Amer. Math. Soc. Abstract 918–47–935. MR 99c:47086.

[77] ______(with M.-P. Chen), *A unified approach to variational inequalities on compact convex sets*, Nonlinear Analysis **33** (1998), 637–644.

[78] ______(with L.-J. Lin), *On some generalized quasi-equilibrium problems*, J. Math. Anal. Appl. **224** (1998), 167–181. MR 99f:90182.

[79] ______, *Remarks on a social equilibrium existence theorems of G. Debreu*, Appl. Math. Lett. **11** (5) (1998), 51–54.

[80] ______(with J.-J. Lee), *Best approximations of 1-set-contractions in Banach spaces*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **5** (1998), 87–100. MR99g:47133.

[81] ______(with B. S. Lee and G.M. Lee), *A general vector-valued variational inequality and its fuzzy extension*, Inter. J. Math. & Math. Sci. **21** (1998), 637–642. MR 99g:47151.

[82] ______, *Fixed point theorems for new classes of multimaps*, Acta Math. Hungarica **81** (1998), 155–161. MR 99g:47135.

[83] ______, *Remarks on a fixed point problem of Ben-El-Mechaiekh*, Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Proc. NACA'98, Niigata, Japan, July 28–31, 1998), World Sci., Singapore, 1999, pp.79–86.

[84] ______, *Minimax theorems and the Nash equilibria on generalized convex spaces*, Josai Math. Monograph **1** (1999), 33–46.

[85] ______(with L.-J. Lin and Z.-T. Yu), *Remarks on fixed points, maximal elements and equilibria of generalized games*, J. Math. Anal. Appl. **233** (1999), 581–596.

[86] ______(with H. Kim), *Coincidence theorems in a product of generalized convex spaces and applications to equilibria*, J. Korean Math. Soc. **36** (1999), 813–828.

[87] ______(with M.-P.Chen), *Best approximations and fixed points of multimap whose domains and ranges have different topologies*, Commun. Appl. Nonlinear Anal. **6** (1999), 77–101.

[88] ______, *Continuous selection theorems in generalized convex spaces*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. **25** (1999), 567–583.

[89] ______, *Ninety years of the Brouwer fixed point theorem*, Vietnam J. Math. **27** (1999), 187–222.

[90] ______, (in Korean) *Recent unification in the analytical fixed point theory*, Newsletter Korean Math. Soc. **65** (1999), 2–10.

[91] ______, *Elements of the KKM theory for generalized convex spaces*, Korean J. Comp. Appl. Math. **7** (2000), 1–28.

[92] ______(with I.-S. Kim), *Remarks on saddle points in nonconvex sets*, Appl. Math. Lett. **13** (2000), 111–113.

[93] ______, *Acyclic versions of the von Neumann and Nash equilibrium theorems*, J. Comp. Appl. Math. **113** (2000), 83–91. Abstract: Progress of Math. **32** (1998), 4–5.

[94] ______(with I.-S. Kim), *Coincidence and saddle point theorems on generalized convex spaces*, Bull. Korean Math. Soc. **37** (2000), 11–19.

[95] ______, *Fixed points and quasi-equilibrium problems*, Math. Comp. Modelling, to appear. Amer. Math. Soc. Abstract 97T-47-107.

[96] ______, *New subclasses of generalized convex spaces*, Proc. Internat. Conf. on Math. Anal. and Appl. **1–A** (1998), 65–72.

[97] ______, *Remarks on fixed point theorems for generalized convex spaces*, Proc. Internat. Conf. on Math. Anal. and Appl. **1–A** (1998), 95–104.

[98] ______, *Minimax theorems in convex spaces*, Novi Sad J. Math.

[99] _____, *Fixed points, intersection theorems, variational inequalities, and equilibrium theorems*, Inter. J. Math. & Math. Sci. **23** (2000),

[100] _____(with I.-S. Kim), *Saddle point theorems on generalized convex spaces*, J. Inequal. & Appl.

[101] _____, *Fixed point theorems in locally G-convex spaces*, Nonlinear Analysis.

[102] _____(with M. P. Chen and L.-J. Lin), *Remarks on generalized quasi-equilibrium problems*,

[103] _____(K.-S. Jeong), *Fixed point and non-retract theorems—Classical circular tours*, Taiwan. J. Math.

[104] _____, *Remarks on topologies of generalized convex spaces.*

[105] _____, *A unified theory on generalized KKM maps in generalized convex spaces.*

[106] M.-H. Shih and K.-K. Tan, *Covering theorems of convex sets related to fixed-point theorems*, Nonlinear and Convex Analysis (Proc. in honor of Ky Fan), Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1987, pp. 235–244.

[107] M. Sion, *On general minimax theorems*, Pacific J. Math. **8** (1958), 171–176.

[108] K.-K. Tan, *G-KKM theorem, minimax inequalities and saddle points*, Proc. WCNA'96, Nonlinear Anal. TMA **30** (1997), 4151–4160.

[109] K.-K. Tan and X.-L. Zhang, *Fixed point theorems on G-convex spaces and applications*, Proc. Nonlinear Funct. Anal. and Appl. **1** (1996), 1–19.

[110] G.Q. Tian, *Generalization of FKKM theorem and the Ky Fan minimax inequality with applications to maximal elements, price equilibrium and complementarity*, J. Math. Anal. Appl. **170** (1992), 457–471.

[111] J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Math. Ann. **100** (1928), 295–320.

[112] _____, *Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes*, Ergeb. eines Math. Kolloq. **8** (1937), 73–83. = *A model of general economic equilibrium*, Review of Econ. Studies **13** (1945), 1–9.

[113] N. Yannelis and N. Prabhakar, *Existence of maximal elements and equilibria in linear topological spaces*, J. Math. Economics **12** (1983), 233–245.

[114] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications*, 5 volumes, Springer-Verlag, New York, 1986–1990.

박세희
서울시 관악구 신림동 산 56-1
서울대학교 자연과학대학 수학과
151-742
E-mail: shpark@math.snu.ac.kr