Comm. Korean Math. Soc. **15** (2000), No. 3, pp. 435–451

초청논문

섀논의 샘플링 정리와 그 확장

김도한[1], 정순영[2], 정재영[2]

요약문. 섀논의 샘플링 정리는 여러 방향으로 확장 발전되어왔으나 본 논문에서는 초함수 이론으로 다룰 수 있는 방향, 즉 좀 더 큰 공간에 속하는 함수에 대한 샘플링 정리를 얻는 것이다. 먼저 샘플링이론의 기본정리인 섀논-코텔니코프 공식을 소개하고 그 자연스런 확장인 페일리-워너 공간, 번스타인 공간에서의 샘플링정리 등을 다루었고 번스타인 공간의 자연스런 확장인 유계인 받침을 갖는 초함수의 푸리에변환 즉, 실공간 위에서 다항식정도로 증가하는 전해석함수에 대한 샘플링 정리를 소개한다. 끝으로 우리의 최근 결과인 실공간 위에서 지수적으로 증가하는 전해석 함수에 대한 샘플링 정리와 그 응용, 그리고 오차추정 등을 다룬다.

1. 서론

샘플링 이론 (sampling theory)은 한마디로 부분적인 표본 데이터로 부터 전체를 재구성하는 이론이다. 수학적인 용어로 말하면 어떤 영역 D에 정의된

Received June 2, 2000.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 46F12, 94A12 Secondary 35K05, 46F20.

Key words and phrases: 섀논의 샘플링 정리, 제브레 초함수, 페일리–워너 공간, 지수함수 정도 증가, 전해석 함수.

이 연구는 BK 21[1]과 한국과학재단[2](1999-2-101-001-5)의 지원을 받았습니다.

함수가 f로 부터 추출된 데이터 a_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$ 과 f에 의존하지 않는 함수열 $\{S_n(t)\}$에 의해 다음과 같이 표현된다고 하자.

$$f(t) = \sum_n a_n S_n(t). \tag{1.1}$$

이때 위의 급수 (1.1)을 함수 f의 샘플링 급수라 하고 $\{a_n\}$을 샘플 데이터, $\{S_n(t)\}$를 샘플링 함수라 한다. 위의 급수는 f로부터 추출된 적당한 표본 데이터로 부터 f를 완전히 복원할 수 있음을 보여준다. 쉬운 예를 들면 함수 f가 n차 다항식일 때, f는 (n+1)개의 서로 다른 점 $\{t_1, \cdots, t_{n+1}\}$에서의 값으로 다음과 같이 재구성할 수 있다.

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n+1} f(t_j) S_j(t). \tag{1.2}$$

여기서 $S_j(t) = \prod_{k \neq j} (\frac{t - t_k}{t_j - t_k})$.

이 이론은 오래전 포아송(Poisson), 보렐(Borel[1]), 아다마르(Hadamard[10]), 휘터커(E. T. Whittaker[17]) 등에 그 수학적인 뿌리를 두고 있으나, 1915년에 발표된 Whittaker의 샘플링 정리 [17]를 출발점으로 보는 것이 타당하다. 이 이론은 수학적인 측면에서는 보간법(interpolation), 수치해석(numerical analysis), 근사이론(approximation theory), 전해석함수(entire function), 조화해석(harmonic analysis)과 상호 관련되어 있고, 응용적인 측면에서 보면 2차 세계대전 이후 정보이론, 통신공학, 신호처리 이론의 기본이 되었다. 섀논의 샘플링 정리는 여러 방향으로 확장 발전되어 왔으나 본 논문에서는 특히 초함수 이론으로 다룰 수 있는 방향, 즉 좀 더 큰 공간에 속하는 함수에 대한 샘플링 정리를 얻는 것이다. 본 논문의 제 2절에서는 샘플링이론의 기본정리인 섀논-코텔니코프(Shannon-Kotel'nikov) 공식을 소개하고 그 자연스런 확장인 페일리-위너(Paley-Wiener) 공간, 번스타인(Bernstein) 공간에서의 샘플링정리 등을 다루었다. 제 3절에서는 번스타인 공간의 자연스런 확장인 유계인 받침을 갖는 초함수의 푸리에 변환 즉, 실공간 $\mathbb{R}$에서 다항식 정도로 증가하는 완

전함수에 대한 샘플링 정리를 소개한다. 제 4절에서는 우리의 최근 결과인 실공간 위에서 지수적으로 증가하는 전해석 함수에 대한 샘플링 정리와 그 응용, 그리고 오차추정 등을 다룬다.

2. 섀논의 샘플링 정리와 그 확장

함수 $F \in L^1(\mathbb{R})$의 푸리에 변환 $\hat{F}$를 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{F}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-ixt}dt.$$

또한 $[-a, a]$에 받침을 갖는 $L^p(\mathbb{R})$에 속하는 함수공간을 $L^p(-a, a)$로 나타내기로 하고 푸리에 변환에 의한 그의 상을 $\widehat{L^p}(-a, a)$로 나타낸다.

다음은 샘플링 이론의 기본정리인 섀논의 샘플링정리[23, p.16]이다.

정리 2.1 (Whittaker-Shannon-Kotel'nikov). 함수 f가 $F \in L^2(-a, a)$의 푸리에 변환이면 f는 다음과 같이 재구성 할 수 있다.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi k}{a}\right) \frac{\sin(at - \pi k)}{at - \pi k} \tag{2.1}$$

여기서 위의 급수는 유계집합 위에서 고르게 수렴(uniformly convergent)한다.

위의 정리를 신호이론 측면에서 보면 다음과 같다. 우선 푸리에 역변환공식에 의하여 f의 푸리에 변환을 F로 생각해도 무방하다. 이 때 $f(t)$는 시각 t에서의 신호의 크기(amplitude)이고 그 푸리에 변환 $F(x)$는 주어진 신호에서 주파수가 x인 신호의 크기이다. 신호의 총 에너지가 유한이므로 $f \in L^2$이고 파세발(Parseval)의 등식에 의하여 $F \in L^2$이다. 또한 주파수의 높낮이는 유계이므로 $F \in L^2[-a, a]$이다. 위의 정리가 말해 주는 것은 이러한 신호는 시각 $t_k = \pi k/a$, $k \in \mathbb{Z}$에서의 값으로 복원할 수 있음을 의미한다.

위의 정리는 얼핏 보면 매우 신기하게 여겨질 수도 있으나 사실 푸리에 해석 이론을 조금 알면 쉽게 이해할 수 있다. 좀 더 특별한 경우, 예로서 f가

$[-a,a]$에 받침을 갖는 유계변동 (bounded variation)인 연속함수 F 의 푸리에 변환이라 하자. 우선 F 를 푸리에 급수 전개하고 양변에 특성함수 $\chi_{[-a,a]}$를 곱하면

$$F(x) = \frac{1}{2a}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\frac{\pi k}{a}) e^{\frac{i\pi k x}{a}} \chi_{[-a,a]}(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

위의 급수는 고르게 수렴하므로 양변에 푸리에 변환을 취하면 공식 (2.1)을 얻게된다. 위 정리 2.1의 경우도 이와 비슷한 방법으로 증명할 수 있다.

이제 $F \in L^2(-a,a)$의 푸리에 변환 F을 특징짓는 페일리-위너 정리[18, p.101]를 서술한다.

정리 2.2 (페일리-위너 정리). 다음 두 명제 (i)과 (ii)는 동치이다.

(i) f는 $F \in L^2(-a,a)$의 푸리에 변환이다.

(ii) f는 전해석함수이고 다음 두 조건을 만족한다; 적당한 양수 C에 대해

$$|F(x+iy)| \le C\exp(a|y|) \tag{2.3}$$

$$F|_{\mathbb{R}} \in L^2. \tag{2.4}$$

즉, f가 정리 2.2의 조건 (2.3)과 (2.4)를 만족하는 전해석함수이면 f는 (2.1)의 형태로 샘플링 급수 전개된다.

이제 (2.1)과 같은 형태의 샘플링 급수를 가지는 좀 더 큰 함수 공간인 페일리-위너 공간과 번스타인 공간을 소개한다.

정의 2.3. 양수 a와 $1 \le p \le \infty$인 양수 p에 대해 페일리-위너 공간 PW_a^p를 $F \in L^p(-a,a)$의 푸리에 변환들의 공간, 즉

$$PW_a^p = \widehat{L^p}(-a,a)$$

로 정의한다.

정의 2.4. $1 \leq p \leq \infty$, $a > 0$일 때 다음 두 조건을 만족하는 전해석함수들의 공간을 B_a^p로 나타내고 번스타인 공간이라 부른다.

(A) 적당한 양수 C에 대해

$$|F(x+iy)| \leq C\exp(a|y|),$$

(B)

$$F|_{\mathbb{R}} \in L^p(\mathbb{R}).$$

횔더(Hölder) 부등식으로부터 $1 \leq p \leq q$이면 $PW_a^q \subset PW_a^p$임을 쉽게 알 수 있다. 또한 공간 B_a^p는 L^p-노름을 택하면 바나흐 공간이 되고 $1 \leq p \leq q \leq \infty$일 때 $B_a^p \subset B_a^q$인 관계가 성립함이 알려져 있다[16, p.p. 82-99]. 따라서 $1 \leq p \leq 2$이고 $q \geq 2$일 때 $B_a^p \subset B_a^2 = PW_a^2 \supset PW_a^q$이므로 섀논의 샘플링정리 2.1에 의해 임의의 $f \in B_a^p, (1 \leq p \leq 2)$ 또는 $f \in B_a^q(q \geq 2)$는 (2.1)과 같은 형태로 샘플링 급수 전개할 수 있다. $p > 2$인 경우 $f \in B_a^p$는 일반적으로 유계받침(compact support)을 갖는 함수의 푸리에 변환으로 표현되지 않기 때문에 섀논의 샘플링정리를 증명할 때 많이 쓰는 일반적인 방법으로 확장할 수 없으나, $p \neq \infty$인 경우는 [2]에서 도입한 방법을 이용하면 정리 2.1과 똑같은 형태의 결과를 얻게 된다.

정리 2.5 [23, p.27]. $1 \leq p < \infty$일 때 임의의 $f \in B_a^p$는 샘플링 급수 (2.1)로 전개된다. 즉,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi k}{a}\right)\frac{\sin(at-\pi k)}{at-\pi k}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

여기서 위의 급수는 유계인 집합 위에서 고르게 수렴한다.

위의 정리와 $1 < q \leq 2$일때의 페일리-위너 형의 정리 $PW_a^q \subset B_a^p, 1/p + 1/q = 1$ [9, p.68]을 이용하면 $L^q(-a,a)(q > 1)$의 푸리에 변환인 페일리-위너 공간 $PW_a^q(q > 1)$에 대한 샘플링 정리를 얻게 된다.

정리 2.6. $F \in L^q(-a,a)(q > 1)$의 푸리에 변환 $f \in PW_a^q$는 샘플링 급수 (2.1)로 재구성 할 수 있다.

위 정리 2.6은 $q \neq 1$일 때 번스타인 공간 $B_a^p, 2 \leq p < \infty$, 에서의 샘플링 정리로부터 알 수 있으나 사실 $q = 1$인 경우까지 포함해서 독립적으로 증명할 수 있다 [9, p.53]. 단, $q > 1$인 경우는 급수 (2.1)이 절대 수렴하고 $q = 1$인 경우는 그렇지 않다. 이제 번스타인공간에서 제일 큰 B_a^∞에 대한 샘플링 정리를 소개한다. 이 경우는 $[-a, a]$에 받침을 갖는 측도(measure)의 푸리에 변환인데 일반적으로 $f \in B_a^\infty$ 는 (2.1)과는 약간 다른 형태의 샘플링 급수를 갖게 된다. 즉, 같은 형태의 샘플링 함수로서 전개할 수 있으나 단지 표본을 좀 더 촘촘히 택해야 한다는 것이다.

정리 2.7 [15]. 함수 $f \in B_a^\infty$는 임의의 $b > a$에 대해

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi k}{b}\right) \frac{\sin(bt - \pi k)}{bt - \pi k} \tag{2.5}$$

로 재구성 할 수 있다. 여기서, 위의 급수는 유계인 집합 위에서 고르게 수렴한다.

참고로 위의 정리는 $b = a$이면 성립하지 않는다. 왜냐 하면 전해석함수 $f(z) = \sin(az)$는 $|f(x + iy)| \leq \exp(a|y|)$이고 $|f(x)| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$이므로 B_a^∞이나 $f(\pi k/a) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$이므로 위 식 (2.5)의 우변이 0이 된다.

이제까지 우리는 새논의 샘플링 정리가 성립하는 번스타인 공간과 페일리-위너 공간에 대해 알아보았다. 결론적으로 말하면 페일리-위너 공간에서 가장 큰 공간인 PW_a^1까지는 샘플링 급수 (2.1)과 똑 같은 형태의 급수로 전개 할 수 있고 이 공간을 포함하는 더 큰 공간 B_a^∞에서는 표본의 간격을 더 좁게 택할 때 같은 샘플링 함수로서 급수 전개 됨을 알 수 있었다. 사실 (2.5)와 같은 형태로 전개되는 B_a^∞ 보다 더 큰 공간은 또 존재한다.

예를 들면, 지수형의 전해석함수 $f(z)$가 실수 집합 위에서 유계가 아니더라도 $(1 + x^2)^{-1/2} f(x) \in L^2(\mathbb{R})$이면 f는 (2.1)과 같이 전개 할 수 있음이 알려져 있다 [19].

다음 절에서는 실수 집합에서 다항식 정도로 증가하는 지수형의 전해석함수에 대한 샘플링 정리를 소개하겠다.

3. 초함수의 푸리에 변환에 관한 샘플링 정리

1940년대 말 로랑 슈와르츠(L. Schwartz)가 초함수를 도입하여 연속함수의 미분과 다항식 정도로 증가하는 연속함수의 푸리에 변환을 가능하게 하였다. 어떤 공간에 속하는 함수에 대한 샘플링 정리를 얻는 일반적인 방법은 그 함수를 푸리에 변환을 한 후 적당한 작업을 하여 다시 역변환 하는 것이다. 따라서 어떤 공간에 속하는 함수의 푸리에 변환을 자유롭게 할 수 있다는 것은 샘플링 정리를 확장하는데 결정적인 도움을 주게 된다. 이 절에서는 초함수 이론을 이용하여 실공간에서 다항식정도로 증가 하는 지수형의 전해석함수 즉 정당한 양수 C와 N이 존재하여

$$|f(z)| \leq C(1+|z|)^N \exp(a|y|),\ z = x + iy \tag{3.1}$$

을 만족하는 전해석함수에 대한 샘플링 정리를 다루겠다. 먼저 조건 (3.1)을 만족하는 전해석함수를 초함수로 특징짓는 페일리-위너-슈와르츠 정리를 서술한다.

정리 3.1 (Paley-Wiener-Schwartz 정리)[7]. 함수 f가 증가조건 (3.1)을 만족하는 전해석함수이기 위한 필요충분조건은 f가 $[-a, a]$에 받침을 갖는 초함수의 푸리에 변환이 되는 것이다.

즉, 증가조건 (3.1)을 만족하는 전해석함수에 대한 샘플링 정리는 곧 $[-a, a]$에 받침을 갖는 초함수의 푸리에 변환에 관한 샘플링 정리로부터 얻어지게 된다. 함수 f가 유계인 받침을 갖는 초함수의 푸리에 변환이면 적당한 양수 N에 대해 $|k| \to \infty$일 때 $f(k) = O(k^N)$이므로 2절의 (2.1)과 같은 형태의 급수로 전개할 수 없다. 왜냐하면 이 경우 (2.1)의 우변이 수렴하지 않기 때문이다. 그러나 (2.1)의 우변에 수렴인자를 적당히 곱해 주면 (2.1)과 유사한 형태의 샘플링 정리를 얻을 수 있다. 이러한 공간에서의 샘플링 정리는 캠벨 (L. L. Campbell)의 다음 결과가 섀논의 샘플링 공식과 유사한 가장 고전적인 결과이다.

정리 3.2 [3]. $f(t)$가 $(-\Omega + \delta, \Omega - \delta)$에 받침을 갖는 초함수의 푸리에 변환이면 f는 다음과 같이 재구성 할 수 있다.

$$(3.2) \qquad f(t) = \frac{1}{2\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) \hat{\omega}\left(t - \frac{\pi k}{\Omega}\right).$$

여기서 $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$이고 $|t| \leq \Omega - \delta$일 때 $\omega(t) = 1$이고 $|t| \leq \Omega + \delta$에 받침을 갖는 함수이다.

캠벨은 또한 ω를 구체적으로 구성하여 절단오차

$$E_N(t) = f(t) - \sum_{|k| \leq N} f\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) \hat{\omega}\left(t - \frac{k\pi}{\Omega}\right)$$

를 계산하였는데 4절에서 유사한 방법을 도입하여 ω를 구성하고 오차 $E_N(t)$를 더 개선된 방법으로 계산하므로 여기서는 캠벨의 결과만 서술하겠다.

정리 3.3 [3]. $f(t)$가 $|t| < (1-q)\Omega$, $0<q<1$에서 받침을 갖는 초함수의 푸리에 변환이면

$$(3.3) \qquad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t - \pi k)}{\Omega t - \pi k} S(q(\Omega t - \pi k))$$

로 재구성할 수 있다. 여기서

$$S(y) = \frac{\int_{-1}^{1} \exp(-(1-x^2)^{-1} - ixy)dx}{\int_{-1}^{1} \exp(-(1-x^2)^{-1})dx}.$$

오차 $E_N(t)$는 임의의 $j \in \mathbb{N}$에 대해

$$(3.4) \qquad |E_N(t)| \leq \frac{c_j |\sin \Omega t|}{q^j (N\pi - |\Omega t|)^j} \left(\frac{N\pi}{\Omega}\right)^r$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} c_j &= 4 \cdot q^{j-1} [(j-1)!]^2 (2j)! j^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{3}{2}} bK, \\ K &= \left(\int_{-1}^{1} \exp((1-x^2)^{-1}) dx \right)^{-1} \end{aligned}$$

이고 b와 r은

$$|f(t)| \leq b|t|^r, \quad |t| > \frac{N\pi}{\Omega}$$

를 만족하는 상수이다.

서론에서도 언급한 바와 같이 섀논의 샘플링 정리는 또 다른 형태의 샘플 데이터 또는 다른 형태의 샘플링 함수를 이용하여 샘플링 급수 전개하는 등 이론적인 측면에서 보면 더 풍부하고 실질적인 응용 측면에서는 더 효율적인 방향으로 발전되어 왔다.

섀논의 샘플링 정리 2.1에서 샘플 데이터는 $a_k = f(\pi k/a)$, $k \in \mathbb{Z}$이고 샘플링 함수는 $S_k(t) = sinc(at - \pi k)$이었다 (여기서 $sinc(t) = \sin t/t$). 다음 정리는 샘플의 간격을 두배로 했을 때 샘플 데이터 $f(2\pi k/a)$와 $f'(2\pi k/a)$, $k \in \mathbb{Z}$를 이용하여 $f \in B_a^2$를 재구성 할 수 있음을 보여준다.

정리 3.4 [20, p.75]. f가 B_a^2에 속하는 함수이면

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f(kT) + (t - kT)f'(kT))sinc^2\left(\frac{a}{2\pi}(t - kT)\right) \tag{3.5}$$

로 전개된다. 여기서 $T = 2/\pi a$이다.

다음 정리는 $(-a, a)$에 받침을 갖는 초함수의 푸리에 변환 f에 관한 위와 유사한 형태의 정리로서 샘플 데이터를 원점에서 유한개의 미분값 $f^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \cdots, p+1$과 $f(k/2a)$, $k \in \mathbb{Z}$의 값으로 f를 재구성 할 수 있음을 보여준다.

정리 3.5 [11]. f가 $(-a, a)$에 받침을 갖는 초함수의 푸리에 변환이면 f는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} f(t) = \ & e^{-2\pi iat} M_p G(t) + t^{p+1} \left(\frac{G^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} sinc(2\pi at) \right. \\ & \left. + \sum_{k \neq 0} (-1)^k R_p G(\frac{k}{2a})(\frac{2a}{k})^{p+1} sinc(\pi(k - 2at)) \right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

여기서 $f(t) = \langle F_x, e^{2\pi itx} \rangle$이고 $G(t) = f(t)e^{2\pi iat}$, M_pG는 G는 p차 테일러 다항식이고 $R_pG(t) = G(t) - M_pG(t)$는 잉여항이다.

위의 샘플링 공식 (3.6)과 앞의 공식 (3.3)을 비교하면 (3.6)은 (3.3)에 비해 샘플링 데이터를 좀 더 많이 선택하였으나 (원점에서 $p+1$차 미분값 까지) 대신 샘플링 함수를 공식 (3.3)의 수렴인자 S없이 구성한 것이다.

4. 지수적으로 증가하는 전해석함수의 샘플링정리

앞에서 우리는 실공간 $\mathbb{R}$위에서 다항식 정도로 증가하는 전해석함수, 다시 말해 유계인 받침을 갖는 초함수의 푸리에 변환에 대한 몇몇 형태의 샘플링 정리를 알아 보았다. 이 절에서는 유계인 받침을 갖는 위수 s의 $(s > 1)$제브레(Gevrey) 꼴의 초함수의 푸리에 변환을 이용하여 지수적으로 증가하는 전해석 함수 즉, 주어진 $s > 1$과 $a > 0$에 대해 적당한 양수 C와 L이 존재하여

$$|f(z)| \leq C \exp(L|z|^{1/s} + a|y|), \quad z = x + iy \tag{4.1}$$

을 만족하는 전해석함수에 대한 샘플링 정리를 얻고자 한다. 우선 위의 증가조건 (4.1)을 만족하는 전해석함수에 대한 샘플링 함수를 만들기 위해 유계인 받침을 갖는 무한번 미분가능한 함수를 하나 도입하자. 즉, 주어진 $s > 1$에 대해 $1 < r < s$인 r을 선택하고 ψ_r을 다음과 같이 정의하자.

$$\psi_r(x) = \begin{cases} q_r \exp(-(1-x^2)^{-\frac{1}{r-1}}), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1\,. \end{cases} \tag{4.2}$$

여기서 $q_r = \left(\int_{-1}^{1} \exp\left(-(1-x^2)^{-\frac{1}{r-1}}\right) dx\right)^{-1}$.

사실 위의 함수는 위수 r의 제브레 공간에 속하는 함수 즉, 양수 A와 h가 존재하여

$$|\psi_r^{(p)}(x)| \leq Ah^p p!^r \tag{4.3}$$

을 만족하는 함수이다. 이제 $S_r(t) = \hat{\psi}_r(t)$라 두면 3절의 캠벨의 결과와 유사한 샘플링 정리를 얻게 된다.

정리 4.1 [5]. f가 증가조건 (4.1)을 만족하는 전해석함수이면 임의의 $b > a$와 $0 < \delta < b - a$에 대해

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi k}{b}\right) \frac{\sin(bt - \pi k)}{bt - \pi k} S_r\big(\delta(t - \pi k)\big). \tag{4.4}$$

위의 급수는 유계인 집합에서 고르게 수렴하지만 등식 (4.4)는 $s = 1$일 때는 성립하지 않는다.

위의 정리는 제브레 꼴의 초함수 이론에서 페일리-위너 정리와 푸리에 급수 전개를 이용하여 증명할 수 있는데 위 정리의 개략적인 증명 과정을 주기 위해 제브레 초함수 공간과 이 공간에서의 페일리-위너정리를 서술 한다.

$s > 1$일 때 임의의 유계인 닫힌 집합 $K \subset \mathbb{R}$과 임의의 $H > 0$에 대해 적당한 $C > 0$가 존재하여

$$\sup |\psi^{(p)}(x)| \leq C H^p p!^s, \qquad \forall p \in \mathbb{N} \tag{4.5}$$

을 만족하는 함수 ψ들의 공간을 $\mathcal{E}^{(s)}(\mathbb{R})$로 나타내고 이러한 함수 ψ를 위수 s의 제브레 함수라고 한다.

위 공간 $\mathcal{E}^{(s)}(\mathbb{R})$에 정의된 선형 범함수(linear functional) u가 옹근(compact) 집합 K의 임의의 근방 K'에 대해 적당한 $C, H > 0$가 존재하여 임의의 $\varphi \in \mathcal{E}^{(s)}(\mathbb{R})$와 $p \in \mathbb{N}$에 대해

$$|u(\varphi)| \leq \sup_{x \in K'} \frac{|\varphi^{(p)}(x)|}{H^p p!^s} \tag{4.6}$$

을 만족할 때 u를 K에 받침을 갖는 제브레 초함수라 하고 $\mathcal{E}^{(s)'}(K)$로 나타낸다.

함수 χ를 집합 $[-b, b]$ 위의 특성 함수라 하고 $\psi_{r,\delta}(x) = \delta^{-1}\psi_r(x/\delta)$라 하자. 이때 $1 < r < s$일 때 함수 $w(x) = (\psi * \psi_{r,\delta})(x)$로 정의하면 $w \in \mathcal{E}^{(s)}(\mathbb{R})$이고

$|x| \le b-\delta$일 때 $w(x)=1, |x| \ge b+\delta$일 때 $w(x)=0$인 함수이다. 이때 w의 푸리에 변환은

$$\hat{w}(x) = \hat{\chi}(x)\hat{\psi}_{r,\delta}(x) = \frac{2\sin(bx)S_r(\delta x)}{x}$$

가 된다.

도움정리 4.2 (페일리-워너 정리; [13]). 다음 두 사실은 동치이다.

f가 $[-a,a]$에 받침을 갖는 제브레 초함수의 푸리에 변환이다.

f는 전해석함수이고 증가조건 (4.1)을 만족한다.

위의 페일리-워너 정리로부터 정리 4.1의 함수 f는 적당한 $u \in \mathcal{E}'^{(s)}[-a,a]$의 푸리에 변환이고 $u_\epsilon(x) = (u * \psi_{r,\epsilon})(x)$은 $[-a,a]$ 근방에 받침을 갖는 함수이므로 푸리에 급수 전개하여 위에서 정의한 $w(x)$를 양변에 곱하면 $b > a$이고 $\epsilon > 0$이 충분히 작으면

$$u_\epsilon(x) = \frac{1}{2b}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_\epsilon\left(\frac{\pi k}{b}\right) e^{\frac{i\pi k x}{b}} w(x), x \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

이제 $\epsilon \to 0^+$이면 식 (4.7)은 $\mathcal{E}'^{(s)}(K)$의 위상으로

$$u = \frac{1}{2b}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}\left(\frac{\pi k}{b}\right) e^{\frac{i\pi k x}{b}} w(x) \tag{4.8}$$

를 얻는다. 식 (4.8)의 양변을 푸리에 변환하면 샘플링 공식 (4.4)를 얻게 된다. 샘플링 정리 4.1의 결과로 다음과 같은 전해석함수 공간에서의 유일성 정리와 제브레 초함수 공간에서의 불확정성 정리를 얻는다.

따름정리 4.3. 함수 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$가 양수 C와 L 그리고 $s > 1$에 대해 $|a_n| \le CL^n/n!^s$이면 $f(z)$는 임의의 $T > 0$에 대해 점 $\{Tk\}, k \in \mathbb{Z}$에서의 값으로 재구성 할 수 있다. 특히 $f(Tk) = 0, k \in \mathbb{Z}$이면 $f \equiv 0$이다.

어떤 함수와 그 푸리에 변환이 동시에 급격히 감소할 수 없다는 불확정성 정리의 여러 형태가 알려져 왔다. 다음 정리는 제브레 초함수 공간에서의 불확정성 정리로 볼 수 있다.

따름정리 4.4. u가 $[-a,a]$에 받침을 가지는 제브레 초함수이고 그 푸리에 변환 $\hat{u}$이 $\hat{u}(bk)=0, k\in\mathbb{Z}$이고 $ab<\pi$이면 $u\equiv 0$이다.

위의 정리는 어떤 제브레 초함수의 받침과 그 푸리에 변환이 0 이 되는 점의 간격이 동시에 작을 수 없음을 의미한다.

5. 오차 추정

샘플링 공식 (4.4)에서 특히 f가 열린 구간 $(-a,a)$에 받침을 갖는 제브레 초함수의 푸리에 변환이면 식 (4.4)에서 $\delta=b-a$로 둘 수 있고 이때 절단 오차 (truncation error)

$$E_N(t)=f(t)-\sum_{|k|\le N} f\left(\frac{\pi k}{b}\right)\frac{\sin(bt-\pi k)}{bt-\pi k}S_r\left(\frac{b-a}{b}(t-\pi k)\right) \tag{5.1}$$

를 생각하자. $k\to\infty$일 때의 수렴인자 S_r의 크기를 추정하기 위해 우선 코시 적분 공식을 이용하여 함수

$$\phi(x)=\begin{cases}\exp\left(-x^{-\frac{1}{r-1}}\right) & : \ x>0\\ 0 & : \ x\le 0\end{cases}$$

의 p차 미분을 평가(estimate)하고 합성함수의 미분공식인 Faà di Bruno 공식을 이용하여 4절의 식 (4.2)에서 정의된 함수 ψ_r의 p차 미분을 추정하여 그 푸리에 변환 S_r에 대한 크기를 추정할 수 있다.

도움정리 5.1 [5]. 함수 ψ_r의 푸리에 변환 S_r은 다음 증가조건을 만족한다; 임의의 $|t|\ge h$에 대해

$$|S_r(t)|=q_r e^r\left|\frac{t}{h}\right|\exp\left(-r\left|\frac{t}{h}\right|^{\frac{1}{r}}\right). \tag{5.2}$$

여기서

$$\begin{aligned} h &= 1+2\left(\frac{1+\sin\theta_0}{\sin\theta_0}\right)\left(\frac{r-1}{\cos(\theta_0/(r-1))}\right)^{r-1}, \\ \theta_0 &= \min\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}(r-1)\} \end{aligned}$$

이다.

위 도움정리 5.1와 $k \to \infty$일 때 $f(\pi k/b)$의 증가 조건으로부터 다음을 얻는다.

정리 5.2 [5]. 절단 오차 $E_N(t)$는 임의의 $|t| \le \frac{\pi N}{b} - \frac{h}{b-a}$에 대해

$$(5.3) \qquad |E_N(t)| = C'|\sin(bt)|\exp r\left(\frac{b-a}{h}\right)^{\frac{1}{r}}\left(|t|^{\frac{1}{r}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi N}{b}\right)^{\frac{1}{r}}\right).$$

여기서 h는 도움정리 5.1에서 주어진 상수이고

$$C' = \frac{Cq_r e^r b(b-a)(2s)^{2s}}{3h(Le)^{2s}}\exp\left(\frac{2(s-r)}{s}\left(\frac{4}{s}\right)^{\frac{r}{s-r}} L^{\frac{r}{s-r}}\left(\frac{h}{b-a}\right)^{\frac{1}{s-r}}\right).$$

위의 정리에서 두 가지 사실을 주목할 필요가 있다. 우선 주어진 샘플 데이터의 간격 π/b에 대해 샘플의 크기 N이 점점 커지면 오차 $E_N(t)$는 적당한 유계인 $|t| \le M$에서

$$E_N(t) = O\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{b}N\right)^{\frac{1}{r}}\right)\right)$$

이고 한편 표본 데이터를 적당한 유계인 구간 $|\pi k/b| \le 2M$에서 모두 뽑을 경우 데이터의 간격을 점점 좁게 하면 즉, b를 점점 크게 하면 (이를 초과 샘플링(over-sampling)이라 한다) $|t| \le M$인 범위에서는 $E_N(t) \to 0$임을 알 수 있다.

이제 $f(t)$가 $(-a, a)$에 받침을 갖는 초함수의 푸리에 변환이면 적당한 양수 C와 β에 대해

$$(5.4) \qquad \left|f\left(\frac{\pi k}{b}\right)\right| \le C|\frac{\pi k}{b}|^{\beta}, \quad |k| \ge N$$

을 만족하므로 정리 4.1에서 $r=2$로 두고 위 정리 5.1의 방법을 그대로 적용하면 다음과 같이 정리를 얻는다.

정리 5.2 [5]. $f(t)$가 $(-a,a)$에 받침을 갖는 초함수의 푸리에 변환이면 절단오차 $E_N(t)$는 $|t| \le \pi k/b - h/(b-a)$에서

$$|E_N(t)| \le C'|\sin(bt)| \exp\left(\frac{b-a}{h}\left(\sqrt{|t|} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi N}{b}}\right)\right). \tag{5.5}$$

여기서 $h = (8\sqrt{3}+15)/30$이고 $C' = \frac{3}{4}Cb((2\beta+4)/e)^{2\beta+4}((b-a)/h)^{\beta+1}$.

위 (5.5)에서 계산한 오차와 캠벨 의 오차 (3.4)를 비교하면 표본의 개수 N이 적당히 커져 가면 (5.5)의 오차가 캠벨의 (3.4)에서 주어진 오차보다 훨씬 빨리 감소함을 알 수 있다. 왜냐하면 (3.4)에서 $N \to \infty$일 때 $\frac{1}{N}$에 대한 다항식 정도로 감소하고 (5.5)에서는

$$|E_N(t)| = O\left(\exp\left[-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi N}{b}}\right]\right)$$

임을 알 수 있다.

참고문헌

[1] E. Borel, *Memoire sur les sries divergentes*, Ann. Ecole Norm. sup. **16** (1899), 9–131.

[2] P. L. Butzer, W. Splettstsser and R. L. Stens, *The sampling theorem and linear prediction in signal analysis*, Jahresbar. Deutsch. Math. Verein, **90** (1988), 1–70.

[3] L. L. Campbell, *Sampling theorem for the Fourier transform of a distribution with bounded support*, SIAM J. Appl. Math. **16** (1968), 627–636.

[4] S.-Y. Chung and D. Kim, *Representation of quasianalytic ultradistributions*, Ark. Mat. **31** (1993), 51–60

[5] J. Chung, S.-Y. Chung and D. Kim, *Sampling theorem for entire functions of exponential growth*, Preprint.

[6] A. G. Garcia, J. Moro and M. A. Hernandez-Medina, *On the distributional Fourier duality and its applications*, J. Math. Anal. Appl. **227** (1998), 43–54.

[7] I. M. Gelfand, G. E. Shilov, *Generalized functions*, Academic Press, New York, **2** (1968).

[8] J. Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, Scientia, **12** (1901), 1–100.

[9] J. R. Higgins, *Sampling theory in Fourier and signal analysis*, Clarendon Press, 1996.

[10] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, **1**, **2**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.

[11] I. G. Izvekov, *Kotel'nikov-Shannon formula for Fourier transforms of distributions with compact supports*, Ukrainian Math. J. **47** (1995), 500–503.

[12] H. Komatsu, *Ultradistributions I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA **20** (1973), 25–105.

[13] ———, *Ultradistributions II*, J. Fac. Sci. Univ. Sect. IA **24** (1977), 607–628.

[14] T. Matsuzawa, *A calculus approach to hyperfunctions II*, Tran. Amer. Math. Soc. **313** (1990), 619–654.

[15] A. Papoulis, Signal Analysis, McGraw-Hill, New York, 1977.

[16] K. Seip, *An irregular sampling theorem for functions band limited in a generalized sense*, SIAM J. Appl. Math. **47** (1987), 1112–1116.

[17] E. T. Whittaker, *On the functions which are represented by the expansion of the interpolation theory*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, sec. A, **35** (1915), 181–194.

[18] R. M. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series*, Academic Press, 1980.

[19] M. Zakai, *Band-limited functions and the sampling theorem*, Inform. Control, **8** (1965), 143–158.

[20] A. I. Zayed, *Advances in Shannon's sampling theory*, CRC Press Inc. 1993.

김도한

서울대학교 자연과학대학 수학과

서울 관악구 신림동 산 56-1, 151–747

E-mail: dhkim@math.snu.ac.kr

정순영
서강대학교 이과대학 수학과
서울 마포구 신수동 1, 121–742
E-mail: sychung@ccs.sogang.ac.kr

정재영
군산대학교 자연과학대학 수학과
전북 군산 미룡동 산 68, 573–701
E-mail: jychung@ks.kunsan.ac.kr