Comm. Korean Math. Soc. **15** (2000), No. 3, pp. 391–434

초청논문

심플렉틱 다양체의 불변량

조 용 승

요약문. 심플렉틱 구조는 국소적으로는 모두 같기 때문에 심플렉틱 다양체 연구는 대역적으로 연구해야 한다. 그로모브가 복소해석학적 곡선을 원소를 하는 모듈라이 공간의 연구가 심플렉틱 다양체를 연구하는 물고를 텃다. 특이점이 없는 복소곡선의 개수를 세는 그로모브 불변량은 도낼슨의 비선형 게이지 이론의 간략화라 할 수 있는 아벨리안 게이지 이론에서 사이버그-위튼 불변량과 같음을 타우브스가 발견하였다. 또한 사이버그-위튼 불변량은 심플렉틱 다양체의 불변량으로 심플렉틱 구조연구에 큰 이바지하고 있다. 그로모브의 모듈라이 공간의 컴팩트하는 과정에서 자연스럽게 마크점과 특이점을 갖은 곡선의 그로모브-위튼 모듈라이 공간이 켐팩트가 되고 여기서 그로모브-위튼 불변량이 얻어진다. 이 그로모브-위튼 불변량은 대수기하와 이론 물리학의 끈이론에서 찾는 대수곡선의 개수를 나타내고, 코호몰로지의 컵곱의 일반화라 할 수 있는 퀀텀곱을 유도하고, 그로모브-위튼 포텐셜함수의 계수를 결정한다. 퀀텀곱의 결합법칙은 포텐셜함수의 WDVV-방정식과 동치를 나타내며 이는 프로베니우스 구조가 평탄함을 나타낸다. 그로모브-위튼 불변량은 앞으로 활발히 연구되고 수학에 광범하게 이바지 할 것 이다.

Received May 10, 2000.

2000 Mathematics Subject Classification: 57S17, 57R42, 58D10, 58B15.

Key words and phrases: 심플렉틱 다양체, 사이버그-위튼 모듈라이 공간, 사이버그-위튼 불변량, 그로모브 불변량, 그로모브-위튼 모듈라이 공간, 안정곡선, 그로모브-위튼 불변량, 프로베니우스구조, 퀀텀곱, 퀀텀코호몰로지, 그로모브-위튼 포텐셜 함수, WDVV-방정식.

This research was supported by the MOST through Natural R & D program 99-N6-01-01-A-1 for Women's Universities, and the BK21 project.

서론

심플렉틱 다양체에 관한 연구는 물리학이나 공학에서 오랜동안 연구되어 왔다. 1980년대 이전에도 여러 수학자들이 연구하고 있었으나, 1984년 그로모브(Gromov)의 유사복소해석학적 곡선을 이용한 논문 발표후에 심플렉틱 다양체 연구에 새로운 장이 열렸다.

심플렉틱 다양체의 2차원 호몰로지류에 대한 유사복소해석학적 곡선들의 모듀라이 공간연구는 대수기하학의 오랜 연구결과들을 이용하여 컴팩트화 할 수 있고 이를 이용한 불변량의 발견은 수학에 커다란 이바지를 하고 있다.

이 불변량을 그로모브불변량이라 하고 위튼(Witten)은 이를 보다 일반화하여 그로모브-위튼 불변량을 유도하였다. 이 불변량으로 코호몰로지환에 새로운 연산인 퀀텀곱을 정의할 수 있게 되었다. 퀀텀곱을 갖는 새로운 코호모롤지군을 퀀텀코호몰로지 군이라고 한다. 퀀텀곱은 결합법칙을 만족하여 그로모브-위튼 불변량에 의하여 정의된 포텐셜함수가 편미분 방정식을 만족한다.

이 편미분 방정식을 이용하여 콘세비치(Kontsevich)는 2차원 호몰로지류를 나타내는 복소곡선의 수를 구했다. 이는 이론 물리학자들도 오랜동안 예측한 수이다.

또한, 그로모브 불변량으로 유도된 퀀텀곱은 포앙카레(Poincaré) 쌍으로 유도된 계량과 더불어 퀀텀코호몰로지 환상에 평탄(flat)한 접속(connection)을 정의한다. 이 접속을 드브로빈(Dubrovin)이 이용하여 프로베니우스 대수(Frobenius Algebra)라는 새로운 연구의 막을 열었다.

또한, 1982년 도넬슨(Donalson)이 게이지이론을 이용한 사차원 다양체 연구로 게이지 이론이 저차원 다양체연구에 혁혁한 공헌을 하였다. 그 결과로 사차원 다양체의 도넬슨 불변량에 따른 미분구조, 특히 페이그(fake) $\mathbb{R}^4$ 존재, 사차원의 포앙카레가설 증명, 연구는 상상을 뛰어 넘는 결과들이다.

또한, 게이지이론의 아류라 할 수 있는 프로에(Floer)의 호몰로지 연구로 다양체연구에 큰 공헌을 하고 있다. 그러나 도넬슨의 게이지이론은 비선형편미방으로 다루기가 아주 어렵다.

이에 대하여 1994년 이론물리학자인 사이버그(Seiberg)와 위튼이 물리학의 초대칭을 이용한 U(1)-게이지 이론으로 도넬슨이론을 아주 간략화 했다.

이 U(1)-게이지 이론을 이용하여 크론하이머(Kronheimer)와 므로오카(Mrowka)는 탐(Thom)의 가설을 증명하였으며, 타우브스(Taubes)는 사차원 심플렉틱 다양체에서 그로모브-위튼불변량과 사이버그-위튼 불변량이 같음을 보였다. 이로인한 사이버그-위튼 불변량은 심플렉틱 다양체 연구에 중요한 도구가 되었다.

제 1장에서는 사이버그-위튼 불변량을 정의하고 그의 성질과 타우브스와 크론하이머-므로오카 연구 결과를 소개한다.

제 2장에서는 사이버그-위튼 불변량과 연관하여 유사복소곡선들의 모듀라이 공간으로부터 그로모브 불변량을 연구하고, 두 불변량이 같다는 타브스의 정리를 소개한다.

제 3장에서는 2장의 그로모브 불변량의 일반화라 할수있는 안정(stable) 유사복소곡선들의 모듀라이 공간을 소개하고, 이 공간으로부터 그로모브-위튼 불변량을 유도하고 그로모브의 비짜내기(non-squeezing)정리, 루안(Ruan)의 변형동치가 아닌 예와 여러가지 그로모브 -위튼 불변량의 예를 소개한다.

제 4장에서는 그로모브-위튼불변량을 이용하여 코호몰로지환에 새로운 곱, 퀀텀곱을 정의하여 퀀텀 코호몰로지를 정의한다. 퀀텀곱의 여러 가지 성질을 소개하고 여기서 자연스럽게 프로베니우스 대수가 유도된다.

또한, 퀀텀곱은 결합법칙을 만족하며 이와동치로 포텐셜 함 수가 WDVV방정식을 만족함이며 또한 퀀텀곱으로부터 유도된 접속이 평탄함(flat)과 동치임을 소개했다.

그라스만(Grassmann) 다양체, 깃발(flag) 다양체와 복소사영공간의 퀀텀 코호몰로지 예로 소개하였다.

제 1 장. 사이버그–위튼 (Seiberg-Witten) 불변량

사이버그와 위튼이 발견한 방정식은 정수계수의 코호몰로지 류를 가지는 컴팩트 유향 4차원 다양체에 대해 미분 위상적인 불변량을 준다. 이 불변량과 그 결과들을 수학적으로 소개하고자 한다. 사이버그-위튼 불변량은 특성수 ${b_2}^+(X) > 1$를 가지는 컴팩트 유향 4차원 다양체에서 정의된다. 만일 ${b_2}^+(X) =$ 1이면 이 불변량은 X위에서의 계량(metric)에 따라 달라진다. 여기에서

$$ {b_2}^+(X) = (1/2)[H_2(X)\text{의 위수} + H_2(X)\text{의 부호수}] $$

는 $H_2(X;\mathbb{R})$에서 교차형식의 고유값이 +1인 것의 개수와 같다. X의 사이버그-위튼 불변량은 틀속(frame bundle)을 덮는 X상의 스핀C 구조의 동치류의 집합 스핀족에서 정수로 가는 사상을 구성한다. 이러한 불변량들은 X상의 어떤 연립 미분방정식의 해에 적절한 부호를 줘서 더한 값으로 정의된다.

[1.1] 리군

$$ SO(4) = [SU(2) \times SU(2)]/\{\pm 1\}\text{와} $$
$$ Spin^{\mathbb{C}}(4) = \frac{SU(2) \times SU(2) \times U(1)}{\pm 1} $$

임을 기억하자.

[1.2] X위에 리만계량을 고정하면 X위의 유향 정규직교 틀의 $SO(4)$ 주속(principal SO(4) bundle)이 정의된다. 스핀 구조는 $SO(4)$ 주 속(principal SO(4) bundle)의 스핀 주 속으로의 올림(lift)이다. 이 올림의 동치류의 집합은 한 점에서의 $H^2(X;\mathbb{Z})$ 주 속의 구조를 갖는다.

이 $H^2(X;\mathbb{Z})$ 주 속(=스핀족)은 앞에서 고정한 X의 계량에 관계없이 표준적으로(canonically) 정의된다. 따라서 사이버그-위튼 불변량은 스핀족에서 정수($\mathbb{Z}$)로의 사상이다.

[1.3] $SO(4)$군은 $SO(3) = SU(2)/\{\pm1\}$에 대한 두 개의 표준표현(canonical representation) ρ_+와 ρ_-을 갖는다. 두 개의 표준표현중 ρ_+는 연관된 X의 틀속(frame bundle)에 대한 R^3 속(bundle)이 자기쌍대(self dual) 2형식들(2 forms)인 Λ^+속과 동형이고 ρ_-는 반자기쌍대(anti-self-dual) 2형식들인 Λ^-속과 동형이 된다.

또한, $Spin^c(4)$군도 $U(2) = [SU(2)\times U(1)]/\{\pm1\}$로 가는 두 개의 표준표현 s_+와 s_-를 갖는다. s_+와 상(quotient) 준동형사상(homomorphism) $U(2) \to U(2)/$중심 $= SO(3)$의 합성은 ρ_+에 대한 SO(4)군으로 인수분해한다. X위에 스핀구조 $\mathcal{L}$이 주어지면 s_+와 s_-에 대해 $\mathcal{L}$에 연관된 $\mathbb{C}^2$-벡터 속

$$W^+ \to X, W^- \to X$$

가 있다.

$e \in H^2(X;\mathbb{Z})$일 때, $\mathcal{L}$과 $e\dot{\mathcal{L}}$은 스핀족안의 원소라 하자. 이 두 개의 스핀구조에 대해 속 $W^+(\mathcal{L})$은 $W^+(e\dot{\mathcal{L}}) \equiv W^+(\mathcal{L}) \otimes E$ 에 의해 관계지어진다. 여기서 E는 첫 번째 천류(Chern class) $c_1(E) = e$를 가지는 복소 선 속이다.

[1.4] 클리포드 곱 (Clifford multiplication)c는 T^*X에서 $W^+ \oplus W^-$의 반수반 자기준동형사상(skew adjoint endomorphism)으로의 사상이다. 이것은 $c(v)^2$이 $-|v|^2$에 의한 곱이라는 것에 의해 특성화 된다.

특별히 c는 사상

$$\sigma : W^+ \otimes T^*X \to W^-\text{와}$$

$$c_+ : \Lambda^+ \to End(W^+)$$

를 유도한다.

c_+의 수반(adjoint)은

$$\tau : End(W^+) \to \Lambda^+ \otimes \mathbb{C}$$

로 나타낸다.

즉, τ는 자기 수반(self-adjoint) 자기준동형사상(endomorphism)을 허수값(imaginary valued)을 갖는 형식(form)이다.

[1.5] A는 선속 $L = det(W^+)$위의 접속이라 하자. A와 T^*X에서 레비-시비타(Levi-Civita)접속은 W^+에서 공변 도함수를 유도하고, 이 도함수는 W^+의 단면을 $W^+ \otimes T^*X$ 단면으로 사상한다.

이렇게 주어진 도함수와 σ와의 합성은 W^+의 단면을 W^-의 단면으로 사상하는 1차 타원적 (elliptic)연산자인 디락연산자(Dirac operator)

$$D_A : \Gamma(W^+) \to \Gamma(W^-)$$

를 정의한다.

[1.6] A가 $L = det(W^+)$의 접속이고, ϕ는 W^+의 단면일 때, 쌍 (A, ϕ)에 대한 사이버그-위튼 방정식은 다음과 같다.

$$D_{A\phi} = 0$$

$$F_+^A = 1/4\tau(\phi \otimes \phi^*)$$

여기서 $F_A{}^+$는 곡률F_A의 자기쌍대 부분이다.

매끄러운 모듈라이 공간을 얻기위해 다음과 같은 형식에 대한 섭동된(perturbed) 방정식을 생각한다.

$$D_{A\phi} = 0$$

$$F_+^A = 1/4\tau(\phi \otimes \phi^*) + \mu$$

여기서 μ는 고정된 허수값 자기 쌍대 2형식이다.

주어진 스핀C 구조 $L \in$ 스핀족에 대한 사이버그-위튼 불변량은 이 방정식의 해를 적절히 셈해서 얻어진다.

게이지군 $C^\infty(X, S^1)$은 방정식

$$g \cdot (A, \phi) = (A - 2g^{-1}dg, g\phi)$$

에 의해 사이버그-위튼 방정식의 해들의 공간에서 작용하고, 이 게이지군의 행렬선속 작용은 ϕ가 항등적으로 0이 아니면 자유작용(free action)이다. $L \equiv det(W^+)$의 (사이버그-위튼) 모듈라이 공간은 사이버그-위튼 방정식의 해들의 공간의 $C^\infty(X; S^1)$에 의한 상(quotient)이고 $M(L)$로 나타낸다.

(성질 1.1) $b_2{}^+(X) \geq 1$이면 X상의 일반적(generic) 계량 또는 μ의 선택에 대해 $c_1(L)$이 0이 아니고 $\phi \equiv 0$일 때, 모듈라이 공간은 공집합이다. 여기서 일반적(generic)이라는 것은 여차원 $b_2{}^+(X)$인 집합의 밖의 점을 의미한다.

(성질 1.2) 공간 $M(L)$은 실해석 변화체(variety)의 구조를 갖는다. $b_2{}^+(X) \geq 1$이면 모듈라이 공간 $M(L)$은 일반적 μ에 대해 매끄러운 다양체이다. 아티아-싱어(Atiyah-Singer) 지표정리를 이용해 이 다양체의 차원을 계산하면

$$2d = 1/4[c_1(L)^2 - (2\xi(X) + 3\sigma(X))]$$

차원이다.

(성질 1.3) 선속 L에 준 방향

$$detH^0(X;\mathbb{R}) \otimes detH^1(X;\mathbb{R}) \otimes detH^{2,+}(X;\mathbb{R})$$

은 $M(L)$의 방향을 결정한다.

(성질 1.4) 기저점 $x_0 \in X$를 고정하고 $C_0{}^\infty(X, S^1)$는 기저점 x_0를 1로 보내는 사상들의 부분집합이라 하자. 또한, $M^0(L)$은 $C_0{}^\infty(X, S^1)$에 의한 사이버

그-위튼 방정식의 해들에 의해 이뤄진 공간의 상(quotient) 이라고 하면, 사영 $M^0(L) \to \mathcal{M}(L)$은 S^1 주 속을 정의한다.

(성질 1.5) 모듈라이 공간 $M(L)$은 컴팩트이다. 이제 사이버그-위튼 불변량을 정의하자.

정의. X는 $b_2{}^+(X) > 1$인 컴팩트 유향 4차원 다양체이고, $L \in$ 스핀족은 X위의 스핀C구조라 하자. (성질1.3)을 만족하는 방향이 주어지면 L에 대한 사이버그-위튼 불변량 $SW(L)$은 다음과 같이 정의된다.

(1) $d < 0$인 경우: 사이버그-위튼 불변량은 0이다.

(2) $d = 0$인 경우: $M(L)$이 매끄러운 다양체가 되는 μ를 잡는다. 그러면 $M(L)$은 부호가 붙은 점들에 의한 유한 집합이 되고 사이버그-위튼 불변량은 부호 ± 1을 가지는 점들의 합이다.

(3) $d > 0$인 경우: $M(L)$이 매끄러운 다양체가 되는 μ를 잡는다. 그러면 $M(L)$은 컴팩트이고 유향이다. 이때의 사이버그-위튼 불변량은 선 속

$$M^0(L) \times_{S^1} \mathbb{C} \to M(L)$$

의 첫 번째 천류(Chern class)의 d번곱과 기본류(fundamental class) $M(L)$의 쌍으로 주어진다. 이때 $\mathcal{M}(L)$의 차원은 짝수 2d이고, $b_2{}^+(X) + b_1(X)$가 짝수이면 사이버그-위튼 불변량은 0이다.

정리 1.1. X는 $b_2{}^+(X) > 1$인 매끄러운 컴팩트 유향 연결 4차원 다양체이면 사이버그-위튼 불변량 SW는 X의 매끄러운 구조에 의해서만 달라지는 X의 스핀족으로부터 $\mathbb{Z}$로 가는 사상을 정의한다. 즉, $SW(L)$의 값은 방정식에서 선택한 계량과 섭동된(PERTURBED) 항 μ에 의해서는 변하지 않으며 L과 동형이면 같은 값을 갖는다.

또한, 스핀C구조에 대한 SW의 역할은 다음과 같은 의미의 자기 미분동형사상 아래에서는 불변이다. 즉, h가 X의 미분동형사상이면, h^*L상의 SW의

값과 L상의 SW의 값은 부호를 제외하면 같은 값이다.

정리 1.2. X는 심플렉틱 형식 ω를 가지는 컴팩트 심플렉틱 4차원 다양체이면 X상의 의복소 구조(ALMOST COMPLEX STRUCTURE)와 연관된 첫 번째 천류의 사이버그-위튼 불변량이 ± 1이다.

s가 X의 스칼라 곡률일 때, 디락 연산자에 대한 바이젠복(Weitzenbock) 식은 다음과 같이 표현된다.

$$D_A D_A \phi = \nabla_A^* \nabla_A \phi + (s/4)\phi - (1/2)F_A^* \cdot \phi.$$

만일 (A, ϕ)가 사이보그-위튼 방정식의 해이면

$$|\phi|^2 \leq max(0, -s)$$

이다.

정리 1.3. X는 $b_2{}^+(X) > 1$인 매끄러운 컴팩트 유향 4차원 다양체라 하자. $b_2{}^+(X_i) \geq 1 \quad (i = 1, 2)$일 때, X가 매장된(EMBEDDED) 3차원 구에 의해 $X = X_1 \sharp X_2$로 쪼개지면 SW는 X위에서 항등적으로 0이다.

따름정리 1.4. 만일 $n > 1$이고 $m \geq 0$이면 $(\sharp n\mathbb{C}P^2)\sharp(\sharp m\overline{\mathbb{C}P^2})$ 는 심플렉틱 형식을 갖지 않는다.

따름정리 1.5. Σ가 차수 d인 대수적 곡선의 호몰로지류를 나타내는 $\mathbb{C}P^2$에 매끄럽게 매장된 유향 2차원 다양체이면 Σ의 종수(GENUS)는 다음과 같이 주어진다 :

$$g(\Sigma) \geq 1/2(d-1)(d-2).$$

제 2 장. 그로모브(Gromov) 불변량

[2.1] X는 X상의 비퇴화(nondegenerate) 닫힌(closed) 2형식인 심플렉틱 형식 ω를 가지는 심플렉틱 4차원 닫힌 다양체라 하면, 4형식 $\omega \wedge \omega$는 X에 방향을 준다.

모든 심플렉틱 다양체는 표준(canonical) 복소선속 K를 갖는다. X상에 고정된 리만 계량에 대해 선속 K는 Λ^+에서 ω의 직교사영으로의 정규직교 2차원 평면 속과 동일화(identification) 할 수 있다.

모든 곳에서 $\omega \wedge \omega \neq 0$이므로 모든 곳에서 $\omega \neq 0$이다.

상대적으로 K는 양립하는 TX상의 의복소(almost complex) 구조에 의해서 정의되어 질 수 있다. 그러면 K는 $det(T^{1,0}X)$이다. 그러한 의복소 구조를 지정하는 것은 ω가 자기 쌍대가 되도록 하는 X위의 계량을 지정하는 것과 동치이다.

만일 ω_t가 X상의 심플렉틱 형식의 연속인 1-매개변수 족이면 (X, ω_0)와 (X, ω_1)에 대한 표준 속은 서로 동형이다.

[2.2] 심플렉틱 다양체는 표준 스핀C구조를 갖는다.

심플렉틱 형식 ω가 길이 $\sqrt{2}$가 되게 하는 계량을 고정하자. 그러한 계량에 대해 표준 스핀C구조는 그것의 연관된 속 W^+가 $1 \oplus K^{-1}$과 동형이라는 사실에 의해 특성화 된다. 여기서 1은 자명한(trivial) 복소선속이고, ω는 클리포드 곱에 의해 1에서는 고유값 $-2i$로 작용하고 K^{-1}에서는 고유값 $+2i$로 작용한다.

이 표준 스핀C구조는 X위에서의 복소 선 속들의 동치류의 집합을 가지는 X상의 스핀C구조의 동치류의 집합인 스핀족과 동일화한다. 즉,

$$Spin \leftrightarrow \{E \to X : U(1) - \text{속}\} \leftrightarrow H^2(X; \mathbb{Z})$$

$$W^+ = E \oplus K^{-1} \otimes E \leftrightarrow E \leftrightarrow c_1(E).$$

ω에 의한 W^+의 클리포드 곱은 고유값 $-2i$를 가지는 가피수(summand) E를 갖는 분할을 보존한다.

[2.3] (X, ω)를 $b_2{}^+(X) > 1$을 가지는 심플렉틱 4차원 다양체라 하면 사이버그-위튼 불변량은 $SW(K^{\pm 1}) = \pm 1$이다. 만일 스핀C구조 $W^+ = E \oplus K^{-1} \otimes E$가 0이 아닌 사이버그-위튼 불변량을 가지면

$$0 \leq \omega \cdot c_1(E) \leq \omega \cdot c_1(K).$$

여기서 왼쪽의 등호는 $E = 1$ 일 때에만 성립하고 오른쪽의 등호는 $E = K$일 때에만 성립한다.

[2.4] 선 속 $L = K^{-1} \oplus E^2$의 스핀C 구조에 대해 모듈라이 공간의 차원은

$$2d = dim\mathcal{M}(L) = -c_1(K) \cdot c_1(E) + c_1(E) \cdot c_1(E)$$

이다. 심플렉틱 다양체에 대해 모듈라이 공간 $\mathcal{M}(L)$의 표준 방향이 존재한다.

[2.5] (X, ω)를 심플렉틱 다양체라 하자. 의복소 구조 J가

$$\omega(v_1, Jv_2) = -\omega(Jv_1, v_2), \omega(v, Jv) \geq 0\text{이고}$$

등호는 $v = 0$ 일때만 성립한다는 조건을 만족하면 ω와 양립가능(compatible)이라고 한다.

양립가능한 의복소 구조의 공간은 축약가능이고

$$T^*X \otimes \mathbb{C} = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$$

이므로 $K = det(T^{1,0})$은 심플렉틱 구조 ω에 대해 연관되어 존재한다고 볼 수 있다.

[2.6] Σ는 컴팩트인 X에 매장된 2차원 다양체라고 하자. 만일 J가 Σ의 접공간을 Σ의 접공간으로 사상하면 Σ는 X의 유사(pseudo) 복소해석적(holomorphic) 부분다양체라 한다. Σ가 X의 유사 복소해석적 부분다양체일 때의 J를 Σ의 복소 구조라 한다.

복소 곡선으로부터 X로의 사상이 유사 복소해석적 이라는 것은 주어진 J와 곡선위의 복소구조에 대해 미분이 교환할 수 있음을 말한다.

[2.7] 심플렉틱 형식 ω의 유사 복소해석적 부분다양체로의 제한(restriction)은 심플렉틱이 되고 Σ에 방향도 준다. 이 방향을 갖는 X의 유사 복소해석적 부분다양체는 Σ상에서 ω의 적분이 양수이므로 $H_2(X;\mathbb{Z})$에서 0이 아닌 기본류를 갖는다.

[2.8] 연결된 유사 복소해석적 부분다양체 Σ의 종수 $g(\Sigma)$는 첨가 공식(adjunction formula)에 의해

$$2-2g(\Sigma)=-\Sigma\cdot\Sigma-c_1(K)\cdot\Sigma$$

이다.

[2.9] Map $(\Sigma, X; A)$는 호몰로지 류 $A\in H_2(X;\mathbb{Z})$를 나타내는 모든 매끄러운 사상 $u:\Sigma\to X$의 공간이라 하자. 이 공간 Map $(\Sigma, X; A)$ 는 u에서의 접공간이 u를 따라 있는 모든 매끄러운 벡터 장 $\xi(x)\in T_{u(x)}$들의 공간

$$T_uMap(\Sigma, X; A)=C^\infty(u^*TX)$$

인 무한 차원 다양체이다.

u에서 파이버(fiber)가 u^*TX에서 값을 갖는 매끄러운 J-반-선형(J-anti-linear) 1형식들의 공간 $E_u=\Omega^{0,1}$ (u^*TX)인 무한 차원 벡터 속 $E\to Map$ $(\Sigma,\ X;A)$를 생각하자.

du의 복소 반 선형 부분은 이 벡터 속의 단면

$$\overline{\partial_J} : Map(\Sigma, X; A) \to E$$

를 정의한다.

모듈라이 공간 $\mathcal{M}(A) = \overline{\partial_J}^{-1}(0)$은 주어진 호몰로지 류 $A \in H_2(X;\mathbb{Z})$를 나타내는 모든 단순(simple) J-복소해석적 곡선들의 공간이다. 만일 $\overline{\partial_J}$가 0-단면에 대해 횡단(transversal)이면 모듈라이 공간 $\mathcal{M}(A)$는 다양체이다.

[2.10] 선형화된 연산자

$$D_u \equiv D\overline{\partial_J}(u) : \Omega^0(u^*TX) \to \Omega^{0,1}(u^*TX)$$

는 모든 $u \in \mathcal{M}(A)$에 대해 전사(surjective)여야 한다.

D_u는 타원적(elliptic) 1차 부분 미분 연산자이고 프레드홀름(Fredholm) 이다.

리만-로크(Riemann-Roch) 정리에 의해 $\mathcal{M}(A)$의 차원은

$$\begin{aligned}\dim\mathcal{M}(A) &= \text{지표}(D\overline{\partial}_J(u)) + (\Sigma\text{의 복소구조의 차원})\\ &= 2(2-2g) + 2c_1(u^*TX) + (6g-6)\\ &= -c_1(K)\cdot\Sigma + \Sigma\cdot\Sigma\end{aligned}$$

이다.

정리 2.1. 일반적으로 의복소 구조 J를 잡으면 모듈라이 공간 $\mathcal{M}(A)$는 차원이

$$d = -c_1(K)\cdot\Sigma + \Sigma\cdot\Sigma$$

인 매끄러운 다양체이다.

또한 $\mathcal{M}(A)$는 표준 방향을 갖는다.

[2.11] $c_1(K)$는 두 번째 스티펠-위트니(Stiffel-Whitney) 류와 $mod(2)$ 로 같다. 이때 차원 d는 짝수이다.

만일 d가 양수이면 X에서 $d/2$개의 서로 다른 점들 P를 선택해서 $\mathcal{M}_P(A)$를 P안의 모든 점들을 포함하는 부분다양체 $\Sigma \in \mathcal{M}(A)$들의 부분공간이라 하자. 일반적 의복소 구조$J$와 점들 P을 잡으면 $\mathcal{M}_P(A) \in \mathcal{M}(A)$는 컴팩트 유향 0차원 다양체이다.

[2.12] $\mathcal{M}(A)$안의 수열은 극한을 취했을 때 다중 성분(multi-component)이나 몰입된(immersed) 곡면으로 가거나 또는 특이점을 갖는 다중 성분이나 몰입된 곡면으로 가서 수렴하지 않을 수 있다. 스매일-사드(Smale-Sard) 정리와 차원-셈(dimension-counting) 논증에 의해 의복소 구조 J가 일반적이면 그런 극한을 없앨 수 있음이 증명된다.

실제로 극한이 될 수 있는 것들의 집합은 프레드홀름 선형화의 방정식에 의해 국소적으로 정의되는 $\mathcal{M}(A)$와 유사한 차원이 $d-2$보다 작거나 같은 모듈라이 공간이 된다.

$d=0$일 경우 이러한 모듈라이 공간의 차원은 음수가 되지만 일반적인 J에 대해서는 그런 모듈라이 공간이 없다는 것이 스매일-사드 정리에 의해 증명된다.

[2.13] $\mathcal{M}(A)$에서 수열의 극한이 연결된 몰입 곡선이라고 가정하면 그 극한 곡선은 교차수가 모두 양수인 이중점들의 수 n을 가지는 의 복소해석적 곡선이다.

퇴화(degeneration)의 국소 모형은 $\mathbb{C}^2$안에서 $\varepsilon \to 0$에 따르는 $z_1 \cdot z_2 = \varepsilon$의 궤적이다. 몰입 곡선은 차수가

$$\lambda = \Sigma \cdot \Sigma - 2n$$

인 법 속(normal bundle)을 갖는다. 또한 첨가(adjuction) 공식에 의해 g'가 몰입된 곡선의 종수이일 때

$$2 - 2g' + \lambda = -c_1(K) \cdot \Sigma$$

임을 알 수 있다.

몰입된 곡선은 몰입의 상(image)이 아니면 부분다양체가 되지않는 것들을 제외한 $\mathcal{M}(A)$과 유사한 모듈라이 공간안에 있다. 적절한 일반적 J에 대해 위와 같은 다양체는 다음과 같은 차원을 갖는 매끄러운 곡선이 된다.

$$\begin{aligned} d' &= 2 - 2g' + 2\lambda \\ &= -c_1(K) \cdot \Sigma + \Sigma \cdot \Sigma - 2n \end{aligned}$$

여기서 d'는 차원 d보다 2n 작다. 따라서 $d = 0$이면 $d' < 0$이다.
J가 일반적이면 $[\Sigma]$를 나타내는 기본 류를 갖는 연결된 몰입 곡선은 존재하지 않는다.

[2.14] X를 컴팩트 심플렉틱 4차원 다양체라 하면 그로모브 불변량

$$Gr : H^2(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

는 류 e를 이용해 다음과 같이 정의한다. 일반적 의복소구조 J에 대하여 X안의 서로 다른 $d/2$개의 점들의 집합 P, 그리고 부호가 붙은 점들의 유한 집합인 $\mathcal{M}_P(PD(e))$에 대해 $Gr(e)$는 $\mathcal{M}_P(PD(e))$의 점들의 합이다.

정리 2.2. 불변량 $Gr : H^2(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$는 컴팩트 유향 4차원 다양체 X와 심플렉틱 형식 ω의 쌍 (X, ω)에만 의존한다. 즉, Gr의 값은 일반적 의복소구조 J와 집합 P의 선택에 의해서는 달라지지 않는다.

또한 만일 $\{w_t : t \in [0,1]\}$가 X상의 심플렉틱 형식들의 연속 족(FAMILY)이면 불변량 Gr은 ω_0와 ω_1에 대해 같은 값을 갖는다.

$h : X \to X$가 미분동형사상이면 류 e에 대해 ω에 의해 정의된 Gr의 값은 류 $h^*(e)$에 대해 $h^*\omega$에 의해 정의된 Gr의 값과 같다.

[2.15] 이제 사이버그-위튼 불변량과 그로모브 불변량에 대한 타부스(Taubes)의 정리를 소개한다.

정리 2.3 (타우부스정리) X가 컴팩트 유향 심플렉틱 4차원 다양체이고 E는 X상의 자명하지 않은 복소 선 속이라 하자. $W^+ = E \oplus K^{-1} \otimes E$가 연관된 $Spin^{\mathbb{C}}$ 구조이고 $L = detW^+$로 주어질 때,

$$SW(L) = \pm Gr(c_1(E))$$

이다.

따름정리 2.4. X가 컴팩트 유향 심플렉틱 4차원 다양체이고 E는 연관된 스핀C구조가 0이 아닌 사이버그-위튼 불변량을 가지는 X상의 자명하지 않은 복소 선속이라 하자. 그러면 $c_1(E)$의 포앙카레 쌍대는 몰입된 심플렉틱 곡선의 기본 류에 의해 표현된다. 특히, $c_1(K)$의 포앙카레 쌍대는 심플렉틱 곡선에 의해 표현된다. 차수가 -1인 매장된 구면이 없으면 $c_1(K) \cdot c_1(K) \geq 0$이다.

제 3 장. 그로모브-위튼 (Gromove-Witten) 불변량

[3.1] M을 매끄러운 $2n$차원 다양체라 하자. M상의 심플렉틱(symplectic structure)란 비퇴화(nondeqeuerate) 닫힌 2-형식 ω를 말한다. 여기서 비퇴화라는 것은 최고 차원 형식이 어디에서도 0이 아닌것이다.

다부정리(Darboux's theorm)에 의해, 모든 심플렉틱 형식은 유클리드 공간 $\mathbb{R}^{2n}$ 상의 표준선형형식

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$$

과 국소적으로 미분동형이다. 이 때문에 심플렉틱 다양체의 전체적인 구조를 다루기가 힘들다.

임의의 $v \in TM$에 대해 $< v,\ v >= \omega(v,\ Jv)$ 를 만족하는 M상의 의복소 구조 J가 존재한다. 이런경우 심플렉틱 형식 ω는 J를 테임(tame)한다고 말한다.

심플렉틱 형식 ω가 주어지면, ω에 테임된 의복소 구조들의 집합 $\Im_\tau(M,\omega)$는 공집합이 아니고, 축약가능하다.

[3.2] 의복소 구조 J가 다양체 M상의 복소구조로부터 얻어진 것이면, J는 적분가능 (integrable)하다고 한다. 다양체 M의 차원이 2이면, M상의 모든 의복소구조 J는 적분가능 하다. 더 높은 차원에 대해서는 이것은 더이상 사실이 아니다.

[3.3] 리만곡면$(\Sigma,\ j)$에서 심플렉틱 다양체(M, J)로 가는 매끄러운 사상 $u : (\Sigma,\ j) \to (M,\ J)$를 생각하자. u의 도함수

$$du_z : T_z\Sigma \to T_{u(z)}M$$

이 복소선형, 즉

$$du_z \circ j = J_{u(z)} \circ du_z$$

를 만족하면, 매끄러운 사상 u를 J-복소해석적(J-holomorphic)이라고 한다. 대개$(\Sigma,\ j)$로 리만구 $S^2 = \mathbb{CP}^1$을 택한다.

u가 매장(embedding)이면, u의 상C는 M상의 2차원 부분다양체이고, 접공간 T_xC는 J-불변이면서 T_xM 안에서 복소직선이다.

역으로, M안의 임의의 2차원 부분 다양체 C가 J-불변 접다발 TC를 가지면, (2)에 의해 J-복소해석적 매개변수화 $u : \Sigma \to M$이 존재한다.

[3.4] 의복소 구조 J가 M상의 심플렉틱 형식ω에 의해 테임되었다고 하자. ω를 J-복소해석학적 곡선C로 제한한 것은 양(positive)이다. 따라서, C는 심플렉틱 부분다양체다.

역으로, M안의 임의의 2차원 부분다양체 C가 주어지면, TC를 J-불변이게 하는 ω-테임된 J가 존재한다.

사실, 먼저 TC상에 J를 정의한 다음, 모든 $x \in C$에 대해 T_xM으로 확장한 후, 마지막으로 M의 나머지 부분으로 단면 J를 확장하면 된다. 따라서, J-복소해석적 곡선은 M상의 2차원 심플렉틱 부분다양체와 같은 것이다.

[3.5] $A \in H_2(M;\mathbb{Z})$를 호몰로지 류라 하자. A를 나타내는 J-복소해석적 곡선 $u : \Sigma \to M$ 들의 집합을 $\mathcal{M}(A, J)$라 하자. 곡선M이 1보다 큰 차수(degree)를 가진 복소해석적 분지피복사상 $(\Sigma,\ j) \to (\Sigma',\ J')$와 J-복소해석적 사상$\Sigma' \to M$ 과의 합성이면, u를 다중피복(multiply-covered)이라고 하고, 다중피복이 아니면 단순(simple)이라 한다.

흔히, 다중피복곡선은 모듈라이 공간 $\mathcal{M}(A, J)$ 안에서 특이점이 된다.

$du(z) \neq 0,\ u^{-1}u(z) = \{z\}$인 점 $z \in \Sigma$가 존재하면 곡선 u를 어떤곳에 단사(somewhere injective)라고 한다. 이런 점$z \in \Sigma$를 u의 단사점(injective point)라 부른다. 모든 J-복소해석적 단순 곡선 u는 Σ안에서 조밀하면서 열린 집합인, 단사점들의 집합을 가진다.

[3.6] 종수(genus) g를 갖는 리만곡면$(\Sigma,\ j)$를 고정하자. $A \in H_2(M,\ \mathbb{Z})$를 나타내는 모든 단순 J-복소해석적 곡선 $u\ :\ \Sigma,\ j) \to (M,\ J)$들의 집합을

$\mathcal{M}(A, J)$라 하자.

정리 3.1. $\Im_\tau(M,\ \omega)$안에 베에르(BAIRE) 부분집합$\Im_{reg}(A)$가 존재해서, 각 $J \in \Im_{reg}(A)$에 대해 $\mathcal{M}(A,\ J)$는 매끄러운 다양체로서,

$$dim\mathcal{M}(A,\ J) = 2c_1(TM)[A] + (2-2g)dim_{\mathbb{C}}M,$$

이 되고, 표준방향을 갖는다.

[3.7] $\Sigma = \mathbb{CP}^1,\ G = PSL(2, \mathbb{C})$라하자. 그리고 $(M,\ \omega)$를 컴팩트 심플렉틱 다양체라고 하자. $J \in \Im_\tau(M,\ \omega)$ 와 $A \in H_2(M,\ \mathbb{Z})$에 대해 비매개변수화된 모듈라이 공간 $\mathcal{C}(A,\ J) = \mathcal{M}(A,\ J)/G$는 컴팩트가 아닐 수 있다.

A-곡선들의 수열은 극한에서 첨점 곡선(cusp-curve) C로 바꾸어 질 수 있다. 이는 J-복소해석적 구 c_j들의 연결 합집합 $C = c_1 \cup \cdots \cup c_n$을 말한다. 각 c_j는 매끄러우면서 상수가 아닌 J-복소해석적 사상 $u_j : \mathbb{CP}^1 \to M$에 의해 매개변수화 된다.

[3.8] J-복소해석적 곡선 $u^i : \mathbb{CP}^1 \to M$들의 수열이 다음을 만족하면 곡선 $u = (u_1, \cdots, u_n)$ 에 약수렴한다고 한다.

(1) 임의의 $j \le n$에 대해 분수선형변환들의 수열 $\Phi^i_j : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$과 유한집합$X_j \subset \mathbb{CP}^1$이 존재해서 $u^i \circ \Phi^i_j$는 u에 균등하게 수렴하고, $\mathbb{CP}^1 - X_j$의 컴팩트 부분집합상에서 도함수를 가진다.

(2) 방향보존 미분동형사상 $f_i : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$의 수열이 존재해서 $u^i \circ f_i$ C^0-위상안에서 첨점곡선 u의 매개변수화 $v : \mathbb{CP}^1 \to M$에 수렴한다.

[3.9] 합집합 $C = \cup_i u_i(\mathbb{CP}^1)$은 $u^j(\mathbb{CP}^1)$의 극한이다. 충분히 큰 i에 대해서 사상 $u^i : \mathbb{CP}^1 \to M$은 연결집합 $u_1 \# u_2 \# \cdots \# u_n : \mathbb{CP}^1 \to M$과 호모토픽

하다. 따라서,

$$\omega(A^i) = \sum_{j=1}^{n} \omega(A_j),\ c_1(A^i) = \sum_{j=1}^{n} c_1(A_j)$$

이다. 여기서 $A^i \in H_2(M, \mathbb{Z})$는 u^i의 호몰로지 류이고 A_i는 u_j의 호몰로지 류이다.

그러므로, 모든 u는 같은 호몰로지 류 $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$를 나타내고, 연결합 $u_1 \# u_2 \# \cdots \# u_n$도 A를 나타낸다.

정리 3.2 (그로모브) M은 컴팩트이고, ω-테임 의복소구조들의 수열인 $J_i \in \Im_\tau(M, \omega)$가 C^∞-위상안에서 J에 수렴한다고 하자. 그러면

$$Sup_i E(u_i) \equiv Sup_i \int_{\mathbb{CP}^1} u_i^* \omega < \infty$$

인 J_i-복소해석적 구조 구들의 수열 $u^i : \mathbb{CP}^1 \to M$은 J-복소해석적 곡선 $u = (u_1, \cdots, u_n)$에 약수렴하는 부분수열을 갖는다.

호몰로지 류 $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$가 구면적(spherical)이라는 것은 A가 후레비치 준동형사상 (Hurewicz homomorphism) $\pi_2(M) \to H_2(M)$의 상일 때를 말한다. $0 < \omega(B) < \omega(A)$인 구면적 호몰로지 류 $B \in H_2(M)$가 존재하지 않으면, 공간 $\mathcal{M}(A,\ J)/G$는 컴팩트이다. 여기서 G는 [3.10]에서 정의한다.

[3.10] $G = PSL(2, \mathbb{C})$를 $\mathbb{CP}^1$의 재매개변수화 군(repara metrization group)이라 하자. 그러면 G는 $g(u, (z_1, \cdots, z_p)) = (u \circ g^{-1}, (g(z_1), \cdots, g(z_n))$으로 $\mathcal{M}(A, J) \times (\mathbb{CP}^1)^P$ 상에 작용한다. 따라서 $e_p(u, (z_1, \cdots, z_p)) = (u(z_1), \cdots, u(z_p))$ 로 주어진 값매김 사상 (evaluation map)

$$e_p : W(A, J, P) = \mathcal{M}(A, J) \times_G (\mathbb{CP}^1)^p \to M^p$$

가 존재한다. 정의역 $W(A,J,P)$는 차원이 $2n+2c_1(A)+2p-6$인 다양체이다.

일반적으로 공간 $W(A,J,P)$는 컴팩트가 아니다. 그러나 상 $e_p[W(A,J,P)] \subset M^p$를 $W(A,J,P)$의 차원보다 적어도 2 작은 차원의 조각들을 덧붙여서 컴팩트로 만들 수 있다.

심플렉틱 다양체 (M,ω)가 단조(monotone)이란 것은 임의의 구면류 $B \in H_2(M,\mathbb{Z})$에 대해 $\omega(B)=\lambda c_1(B)$인 양의 상수 $\lambda>0$가 존재하는 것이다.

[3.11] 곱 심플렉틱 형식을 갖는 곱 $\mathbb{CP}^1 \times V$를 M이라 하고, $\pi_2(V)=\{0\}$라 하자. 그리고 $A=\mathbb{CP}^1 \times \{점\}$ 이라 두자. 그러면 A는 M안의 2차원 구면류의 집합을 생성한다. 그래서 $\omega(A)$는 구면류상의 가장 작은 값이다.

일반적으로 J에 대해 공간 $W(A,J,1) \equiv \mathcal{M}(A,J) \times_G \mathbb{CP}^1$은 컴팩트 다양체이고, M의 차원과 같은 2n 차원을 갖는다. 값매김 사상

$$e_1 : \mathcal{M}(A,\ J) \times_G \mathbb{CP}^1 \to M = \mathbb{CP}^1 \times V$$

는 $g \in G,\ v_0 \in V$에 대해

$$e_1(u,z) = u(z) = (g(z), v_0)$$

로 주어진다. 따라서 사상 e_1 은 차수 1을 가진다.

정리 3.3 (그로모브 : 비짜내기(NON-SQUEEZING) 정리) 반지름 r인 공 $B^{2n}(2r)$과 $\pi_2(V)=0$인 실린더 $B^2(R) \times V$를 생각해 보자. $\Psi : B^{2n}(r) \to B^2(R) \times V$를 심플렉틱 매장이라고 하면, $r \le R$이다.

증명. 원판 $B^2(R)$을 $\pi R^2+\epsilon$의 면적을 갖도록 2타원-구를 $\mathbb{CP}^1$속에 매장하고, ω를 $\mathbb{CP}^1 \times V$상의 곱심플렉틱 구조라 하자. J'를 $\mathbb{CP}^1 \times V$ 상의 ω-테임된 의복소 구조라 하면, $Im\Psi$상에서, J'는 공 $B^{2n}(r)$ 의 표준 구조 J_0의 Ψ에

의한 푸쉬-포워드(push-forward)와 같다. 값매김 사상 e_1의 차수가 1이므로, $\mathbb{CP}^1 \times V$의 모든 점을 지나는 J_0-복소해석적 곡선이 존재한다. $\Psi(0)$를 지나는 이런 곡선을 C라 하자.

이 곡선은 Ψ에 의해 $B^{2n}(r)$의 중심을 지나는 J_0-복소해석적 곡선 C로 당긴다. 최소곡면이론에 의해, 유클리드 공간에서 공의 중심을 지나면서 최소의 면적을 갖는 곡면은 면적 πr^2을 갖는 편편한 원판이다. (C, J_0)가 복소해석적이고 $B^{2n}(r)$안에서 최소곡면이므로,

$$\pi r^2 \leq \int_c \omega_0 = \int_{\Psi-1(c')} \Psi^*(\omega) < \int_{c'} \omega = \omega(A) = \pi R^2 + \epsilon$$

이다. 여기서 $\Psi(c)$가 유일한 c'의 부분이므로, 가운데 부등식이 성립한다. 이것이 모든 $\epsilon > 0$에 대해 참이므로, 정리가 증명되었다. □

[3.12] 값매김 사상

$$e_p : W(A, J, p) \to M^p$$

M^p안에서 잘 정의된 호몰로지 류를 나타낸다: m을 $W(A, J, P)$의 차원이라 하면, e_p의 상은 $m-$사슬(cycle)이고, 그것의 경계는 많아야 $m-2$의 차원을 갖게 된다. 이런 사슬을 의사슬(pseudo-cycle)이라 부른다.

그로모브 불변량(Gromov invariant)은 M^p안에서 여차원을 갖는 사슬들의 교차 (intersection)를 취함으로써 얻어진다.

등식 $d + dim\ W(A, J, p) = 2np$이고, $\alpha = \alpha_1 \times \cdots \times \alpha_p \in H_d(M^p)$ 라 하자. 점들의 유한집합에서 $e_p : W(A, J, P) \to M^p$의 상과 횡단하게 만나는 α의 대표값을 잡을 수 있다. 그러므로 그로모브 불변량(Gromov invariant)

$$\Phi_A(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) = e_p \cdot \alpha$$

를 부호로 세는 교차수라 정의한다.

이는 사슬 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$와 각각 만나는, 호몰로지류 A안의 $J-$복소해석적 곡선 u의 개수가 된다.

[3.13] 서로 다른 p개의 점 $z_1, \cdots, z_p \in \mathbb{CP}^1$을 고정하자. $d = 2np - dim\mathcal{M}(A, J)$일 때 그로모브-위튼 불변량 (Gromove-Witten invariant)

$$\Psi_{A,p} : H_d(M^p; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

를

$$\Psi_{A,p}(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) = \#\{u \in \mathcal{M}(A, J) | u(z_j) \in \alpha_j\}$$

로 정의하자. 재매개변수화 군 G는 삼인자 추이적(triply transitive)이기 때문에, $p \geq 3$일 때만 살펴보면 된다. 더욱이 $p = 3$인 경우 $\Phi_A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \Psi_{A \cdot 3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 이지만, $p > 3$일 때에는 두 불변량은 다른 것이다.

[3.14] 몇가지 예를 들어보자.

(1) $L = [\mathbb{CP}^1] \in H_2(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$, 점 $\in H_0$ $(\mathbb{CP}^n ; \mathbb{Z})$을 생각해 보자. $\mathcal{M}(L, J)$ $\times_G$ $(\mathbb{CP}^1)^2$의 차원은 $4n = dim(\mathbb{CP}^n)^2$이다. $\mathbb{CP}^n$안에서 두 점을 지나는 직선은 유일하므로, Φ_L(점, 점) $= 1$이 된다.

(2) $A = 2L \in H_2(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$라 하자. $\mathbb{CP}^2$안에서는 5점을 지나는 원추곡선이 유일하게 존재하므로,

$$\Phi_{2L}(\text{점}, \text{점}, \text{점}, \text{점}) = 1$$

이 된다. α_i를 점이라 하면, $n > 2$인 $\mathbb{CP}^n$안에서 $\Phi_{2L}(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) = 0$이다.

예를 들면, $n = 3$이면 $p = 4$이어야 한다. 이 때 같은 평면에 있지 않는 네 점을 지나는 원추 곡선은 존재하지 않는다. 왜냐하면, 임의의 세 점은 한 개

의 평면 p를 결정한다. 이 세 점을 지나는 원추곡선을 C라 두면 $c \subset P$이거나 $c\dot{P} \geq 3$이 된다. $c \cdot p = 2$ 이므로 $c \subset P$여야 하는데 이는 모순이다.

또 $n > 3$이면 차원 조건을 만족하도록 P를 잡는 것이 불가능하다.

또한, $\mathbb{CP}^3$안에서 Φ_{2L}(점, 점, 점, 직선, 직선) $= 1$임을 쉽게 보일 수 있다.

(3) $M = \mathbb{CP}^1 \times V,\ \pi_2(V) = 0,\ dimV \leq 4,$ 그리고 $A = \mathbb{CP}^1 \times$ 점 $\in H_2(\mathbb{CP}^1 \times V)$ 라 하자. 그러면 Φ_A(점) $= 1$이 된다.

(4) $\overline{\mathbb{CP}}^2$를 $\mathbb{CP}^2$의 방향과 반대방향을 갖는 복소사영 평면이라 하자. $A = \mathbb{CP}^1 \in H_2(\overline{\mathbb{CP}}^2, \mathbb{Z})$이면 $A \cdot A = -1$이 된다.

M을 복소 케러 곡면이라 하고, $\overline{M}$를 M상의 한 점 x를 갑자기 부풀려 올린 공간이라 하자. 즉, 점 $x \in M$를 X를 지나는 모든 직선들의 집합으로 바꾼 것을 말한다. 이 직선들의 집합은 예외인자(execptional divisor)Σ 라 불리우는 것으로 $\mathbb{CP}^1$과 같은 것이다. Σ의 법다발은 오일러수 -1를 갖는 $\mathbb{CP}^1$상의 표준 직선 다발이다.

따라서 모듈라이 공간 $\mathcal{M}(\Sigma,\ J)$는 하나의 J-복소해석적 곡선으로 구성되게 되는데, 이 하나의 원소는 예외인자 그 자신이다. 왜냐하면, 다른 J-복소해석적 곡선은 Σ와 교차수 -1를 가지고 만난다. 그러나 서로 다른 두 개의 J-복소해석적 곡선의 교차수는 음수가 아니기 때문에, 이는 불가능하다.

모듈라이 공간의 차원은 $dim\mathcal{M}(E, J) = 4 + 2c_1(E) = 6$이다. 따라서

$$\Phi_E(E) = E \cdot E = -1$$

이다.

(5) $\mathbb{CP}^2$에서 5개의 점을 지나는 원추곡선이 하나뿐이므로

$$\Phi_{2L}(\text{점}, \text{점}, \text{점}, \text{점}, \text{점}) = 1$$

이다. $p \neq 4$ 이면 차원조건에 의해서

$$\Psi_{2L,p}(\text{점}, \cdots, \text{점}) = 0$$

이 되고, 또한 $\Psi_{2L,4}(\text{점}, \text{점}, \text{점}, \text{점}) = 1$ 임을 확인할 수 있다.

[3.15] (Ruan) X는 $\mathbb{CP}^2$상의 8점들을 부풀려 올려 생긴 공간이고, Y는 바로우(Barlow)곡면이다. 그러면 X와 Y는 단순연결이고 같은 교차 형식을 갖는다. 따라서 X와 Y는 위상동형이지만 미분동형은 아니다.

월(Wall)의 정리에 의해, $X' = X \times \mathbb{CP}^1$과 $Y' = Y \times \mathbb{CP}^1$은 미분동형이고, 둘 다 모두 케일러이다. 따라서 각각의 복소구조의 천류를 보존하는 미분동형사상

$$\Psi : X' \to Y'$$

를 찾을 수 있다. 합곱(cup-product)을 사용하면,

$$\Psi_*[X \times \text{점}] = [Y \times \text{점}]$$

이고 $A = [\Sigma \times \text{점}] \in H_2(X')$는 $\Psi_*(A) = [\Sigma' \times \text{점}] \in H_2(Y')$로 보내진다. 케일러 다양체상의 케러 형식들의 집합은 볼록 원추이고, 이런 두개의 케러 형식은 변형동치 (deformation equivalent)이다. 즉 ω_1과 ω_2는 변형 $t\omega_1 + (1-t)\omega_2$로 연결되어 진다.

두 케러 다양체 $(X', \omega_{X'})$와 $(Y', \omega_{Y'})$가 변형도치일까? 답은 아니다. $E \in H_2(X', \mathbb{Z})$를 X의 부풀어 올린 점들 중 하나의 류를 나타낸다고 하자. 그러면 $c_1(E) = p = 1$이고

$$2c_1(E) = 2(n-1)(p-1) + 4 - \dim\alpha$$

를 만족한다. E를 나타내는 X안의 복소해석적 구 Σ는 하나뿐이므로, $X' = X \times \mathbb{CP}^1$안의 E-곡선은 $z \in \mathbb{CP}^1$에 대해 정확히 곡선 $\Sigma \times \{z\}$와 같다. 그러므로 J_X-복소해석적 E-곡선들 상에 있는 점들 $X(E, J_X)$의 집합은 $\Sigma \times \mathbb{CP}^1$이

된다. X안에서 $E \cdot E = -1$이므로 교차수 $E \cdot X(E, J_X) = -1$이고 따라서 $\Phi_E(E) = -1$이다.

그러나, 바로우(Barlow)곡면 Y는 최소(mininal)이고, 그래서 자기교차수 -1를 갖는 복소해석적 곡선은 존재하지 않는다. 그러므로 $Y' = Y \times \mathbb{CP}^1$상에 $\Psi_* E$를 나타내는 J_Y구들은 존재하지 않는다.

왜냐하면, $\Psi_* E = [\Sigma' \times 점]$이고, $\Psi_* E$에 대한 J_Y-복소해석적 곡선은 $\Sigma' \cdot \Sigma' = -1$인 $\Sigma' \times$ 점의 형태이어야 하기 때문이다. 따라서 Y'상에서 $\Phi_{\Psi_* E} = 0$이다. 그러나 Ψ가 변형동치였다면, $\Phi_{\Psi_* E}(\Psi_* E) \neq 0$이다.

제 4 장. 퀀텀(Quantum) 코호몰로지

[4.1] 이제 드람(de Rham) 코호몰로지의 정수부분 $H^*(\mathrm{M}) = H^*_{dR}(\mathrm{M}, \mathbb{Z})$를 생각하자. 그러면 $H^k(\mathrm{M})$ 을 $\mathrm{Hom}(H_k(\mathrm{M}, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$와 동일시할 수 있다. 비슷하게 $H_*(\mathrm{M}, \mathbb{Z})$의 자유부분을 $H_*(\mathrm{M})$로 표시하자. $a \in H^k(\mathrm{M})$, $\beta \in H_k(\mathrm{M})$일 때 $a(\beta) = \int_\beta a$로 $\alpha \in H_{2n-k}(\mathrm{M})$, $\beta \in H_k(M)$의 교차쌍(intersection pairing)을 $\alpha \cdot \beta$로 표시하자.

따라서 $\alpha \in H_{2n-k}(\mathrm{M})$을 $a = PD(\alpha) \in H^k(\mathrm{M})$로 보내는 준동형 사상 $H_{2n-k}(M) \to H^k(M)$을 생각할 수 있다. 이는 $\beta \in H_k(M)$에 대해

$$\int_\beta a = \alpha \cdot \beta$$

를 만족하게 만들어진 준동형사상이다. 두 개의 코호몰로지류 $a \in H^k(M)$, $b \in H^l(M)$ 에 대해 포앙카레 쌍대를 $PD(a) = \alpha \in H_{2n-k}(M)$, $PD(b) = \beta \in H_{2n-l}(M)$ 로 표시하자.

그러면 합곱 $a \cup b \in H^{k+l}(\mathrm{M})$이고, $\gamma \in H_{k+l}(\mathrm{M})$에 대해

$$\int_\gamma a \cup b = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$$

를 삼중교차(triple intersection)이라고 하자. $a, b \in H^*(\mathrm{M})$ 이 서로 여차원을 갖고, $\alpha = PD(a)$, $\beta = PD(b)$라 할 때

$$< a, b >= a \cdot b = \int_M a \cup b = \alpha \cdot \beta = \int_\beta a$$

로 표기하자.

[4.2] (M,ω)를 최소 천수 $N \geq 2$를 갖는 2n 차원 단조 심플렉틱 다양체라 하자. 여기서 최소천수(minimal Chern number) N은 $< c_1, \pi_2(M) >= N\mathbb{Z}$로 정의된 수이다. ω를 적당히 잘 바꾸어 $\omega(\pi_2(\mathrm{M}))= \mathbb{Z}$되도록 하는 $[\omega] \in H^*(M, \mathbb{Z})$라 가정하자.

퀀텀 코호몰로지(quantum cohomology)를 로렌츠 다항식들의 환과의 텐서곱

$$QH^*(M) = H^*(M) \otimes \mathbb{Z}[q]$$

로 정의하자. 여기서 q는 차수 2N의 변수이고, 차수 k인 $QH^*(\mathrm{M})$안의 원소는 유한합

$$a = \Sigma_{i \in \mathbb{Z}} a_i q^i, a_i \in H^{k-2Ni}(M)$$

으로 표시할 수 있다. $QH^k(\mathrm{M})$을 차수 k인 원소들의 집합이라 하자.

두 원소 $a = \Sigma_i a_i q^i \in QH^k(M), b = \Sigma_j b_j q^j \in QH^l(M)$에 대해 포앙카레 쌍대 쌍(Poincaré duality pair)를

$$<,> : QH^*(M) \otimes QH^*(M) \to \mathbb{Z}$$

$$a, (a, b) \mapsto < a, b > \equiv \Sigma_{2N(i+j)=k+l-2n} a_i \cdot b_i$$

로 정의하자.

이 쌍 $<,>$은 비퇴화이다. 즉 모든 b에 대해 $< a, b >= 0$ 이면 $a = 0$이다.

[4.3] q를 곱함으로써 얻어진 자연스런 동형사상

$$QH^k(M) \simeq QH^{k+2N}(M)$$

이 존재한다. 더욱이, 동형사상

$$QH^k(M) \simeq \oplus_{j\equiv k(\mathrm{mod}\ 2\mathrm{N})} H^j(M)$$

도 존재한다. 그러므로 M의 퀀텀 코호몰로지는 2N 등급을 가진 코호몰로지의 보편 피복으로 볼 수 있다.

[4.4] 퀀텀곱은 준동형사상

$$* : QH^l(M) \times QH^m(M) \to QH^{l+m}(M)$$

이다. 포앙카레 쌍대쌍은 정상적이기 때문에, 임의의 $a = \Sigma_i a_i q^i \in QH^l(M)$과 $b = \Sigma_j b_j q^j \in QH^m(M)$ 의 곱 $a * b$ 를 $c = \Sigma_k c_k q^k \in QH^{2n-l-m}(M)$과의 내적을 가지고 정의할 수 있다.

$a_i \in H^{l-2Ni}(M)$, $b_j \in H^{m-2Nj}(M)$, $c_k \in H^{2n-l-m-2Nk}$(M)이고 각각의 포앙카레 쌍대를 $\alpha_i = PD(a_i)$, $\beta_j = PD(b_j)$, $\gamma_k = PD(c_k)$로 표기하자. 그러면 $a * b \in QH^{l+m}$(M)을

$$< a * b, c >= \Sigma_{i,j,k}\Sigma_A \Phi_A(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)$$

가 되도록 정의한다. 여기서, 마지막의 합은 $N(i+j+k) + 2c_1$(A)=0을 만족하는 모든 $A \in H_2$(M)에 대한 합이다. 이것은

$$deg(a_i) + deg(b_j) + deg(c_k) = 2n + 2c_1(A)$$

와 같은 조건이다.

이로 인해 $-n \leq c_1(A) \leq 2n$이 되고, 따라서 단지 유한개의 c_1(A)값만이 이 합에서 나타난다. M이 단조이므로, 어떤 λ >0에 대해 $\omega(A) = \lambda c_1$(A)이다.

그러므로 합에 기여하는 A는 균등한 유계 에너지를 갖는다. 따라서 이런 A는 단지 유한개만 나타나고, 합의 우변은 유한합이 된다.

[4.5] 두 코호몰로지 원소 $a \in H^l(\mathrm{M})$ 와 $b \in H^m(\mathrm{M})$이 주어지면 퀀텀곱(quantum product) $a * b$를

$$a * b = \Sigma_A (a * b)_A q^{c_1(A)/N} \in QH^{l+m}(M)$$

으로 정의한다. 여기서 $(a*b)_A \in H^{l+m-2c_1(A)}(M)$이므로 $\gamma \in H_{l+m-2c_1(A)}(M)$에 대해 $\alpha = PD(a) \in H_{2n-l}(M)$, $\beta = PD(b) \in H_{2n-m}(M)$, $deg\alpha + deg\beta + deg\gamma = 4n - 2c_1(A)$라 하면

$$\int_\gamma (a * b)_A = \Phi_A(\alpha, \beta, \gamma)$$

를 만족하는 것이다.

만일 $A = 0$이면 J-복소해석적 곡선은 상수이고 $\Phi_0(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$는 삼중교차이다. 그러므로 $a * b$의 상수항은 합곱 $a \cup b$가 된다.

[4.6] 다음은 퀀텀코호몰로지 환에서 퀀텀곱의 기본성질을 알아보자.

정리 4.1.

(1) 퀀텀 곱 $*$는 더하기하에서 분배법칙을 만족하고, 반교환이다. 즉, $a,b \in QH^*(\mathrm{M})$에 대해

$$a * b = (-1)^{dega \cdot degb} b * a$$

이다. 또한 $*$는 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$의 작용을 가지고 교환이다.

(2) $a \in H^0(\mathrm{M})$ 또는 $a \in H^1(\mathrm{M})$이면 모든 $b \in H^*(M)$에 대해

$$a * b = a \cup b$$

이다.

(3) 생성원 $1 \in H^0(\mathrm{M})$은 $QH^*(M)$의 단위 원소이다.

(4) $a, b, c \in QH^*(M)$ 에 대해

$$< a * b, c >=< a, b * c >$$

이다.

증명.

(1) 당연하다.

(2) $c_1(A) \neq 0$에 대해 $\Phi_A(\alpha, \beta, \gamma) = 0$임을 증명하자. 이는 일반적 위치에 있을 때, β와 γ를 동시에 지나는 A-곡선이 존재하지 않음을 증명하면 된다.

$$dimW(A, J, 2) = 2n + 2c_1(A) - 2$$

이다. $deg(a) = 0$ 또는 1이므로,

$$2n + 2c_1(A) = deg(a) + deg(b) + deg(c) \leq 1 + deg(b) + deg(c)$$

이다. 따라서

$$dimW(A, J, 2) \leq deg(b) + deg(c) - 1$$

이 된다. 그러므로

$$dimW(A, J, 2) + dim(\beta) + dim(\gamma) \leq dimM^2 - 1$$

이다. 일반적 위치에 있을 때, $\mathrm{im}\ e_2 : W(A, J, 2) \to M^2$ 와 $\beta \times \gamma$는 만나지 않는다. $*$에 기여하는 유일한 것은 $c_1(A)=0$인 경우이고, 이 경우 $(a * b)_0 = a \cup b$임을 앞에서 보였다. 따라서

$$\int_\gamma (a * b)_0 = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \int_\gamma a \cup b$$

이고 $a * b = a \cup b$ 이다.

(3) (2)에 의해 성립한다.

(4) $\Phi_A(a, b, c)$는 3개 성분의 치환하에서 반대칭이다. 즉,

$$\Phi_A(a, b, c) = (-1)^{dega(degb+degc)} \Phi_A(b, c, a).$$

이다. N(i+j+k) + $c_1(A) = 0$을 만족하는 네 쌍 (i, j, k, A)에 대한 합을 취해 보면

$$< a * b, c > = (-1)^{dega(degb+degc)} < b * c, a >$$
$$=< a, b * c >$$

를 만족한다.

(주의) 퀀텀 곱 $*$는 결합법칙을 만족한다. 퀀텀 코호몰로지환 $QH^*(M)$은 프로베니우스 대수(Frobenius algebra)이다. □

[4.7] 표준 복소 구조와 케일러 형식 ω와 대응되는 푸비니-스터니 계량을 가는 n차원 복소사영 공간 $\mathbb{CP}^n$을 생각하자. $L \equiv [\mathbb{CP}^1] \in H_2(\mathbb{CP}^n)$을 표준 생성원이라 하면 $c_1(L) = n+1$이 된다. 차원관계에 의해 $m = 0, 1$일 때만 $\Phi_{mL}(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$ 이다. $m = 0$이면 $\Phi_0(\alpha, \beta, \gamma) = \int_\gamma a \cup b$이다. 최소 천수 $N = n+1$이고 퀀텀 코호몰로지 $QH^k(M)$은 k가 짝수일 때 $\mathbb{Z}$, k가 홀수일 때 0이다.

$a \in H^l$(M), $b \in H^m$(M) 이라 하자. $l+m \leq 2n$이면 $a*b = a \cup b$이다. 그리고 $l+m = 2n+2$인 경우, $a = p \in H^2(\mathbb{M})$이 표준 생성원이면 $p(L) = 1$이 되고 $b = p^n \in H^{2n}(\mathbb{CP}^n)$이다.

$p*p^n = q$가 $QH^{2n+2}(\mathbb{CP}^n)$의 생성원이 됨을 보이고자 한다. $(p*p^n)_0 = p \cup p^n = 0$이므로, $(p*p^n)_L = 1 \in H^0(\mathbb{CP}^n)$임을 증명하면 된다. 이는 $[\mathbb{CP}^{n-1}] = PD(p)$ 이고 점 $= PD(p^n)$라 할 때

$$\int_{\text{점}} (p*p^n)_L = \Phi_L([\mathbb{CP}^{n-1}], \text{점}, \text{점}) = 1$$

이므로 $(p*p^n)_L = 1 \in H^0(\mathbb{CP}^n)$이 된다.

따라서, $p*p^n = q \in QH^{2n+n}(\mathbb{CP}^n)$이다. 다른 0이 아닌 항 $\Phi_L(\alpha, \beta, \gamma)$는 $k+l \geq n+1$에 대해 $p^k * p^l = p^{k+l-n-1} \cdot q$의 관계로 주어진다. k가 짝수인

$a_k \in QH^k(M)$ 을 생성원이라 하자. 그러면 퀀텀곱은 $a_k * a_l = a_{k+l}$로 주어진다. 따라서

$$QH^*(\mathbb{CP}^n) = \frac{\mathbb{Z}[p, q, q^{-1}]}{< p^{n+1} = q, qq^{-1} = 1 >}$$

이다.

[4.8] 퀀텀 코호몰로지에서 퀀텀곱이 결합법칙을 성립함은 가장 중요한 사실이며 모듀라이 공간의 기하학적인 성질, 대수기하학적 성질, 해석학적 성질 등 다양한 응용을 제공해 준다.

정리 4.2. (M, ω)를 최소 천수 $N \geq 2$이면서 단조인 컴팩트 심플렉틱 다양체라 하자. 그러면 퀀텀 코호몰로지군 $QH^*(\mathrm{M})$상의 퀀텀곱 $*$은 결합법칙을 만족시킨다.

[4.9] E_j 의 복소차원 $\dim_{\mathbb{C}} E_j = \mathrm{j}$인 $\mathbb{C}^{n+1}$의 부분공간 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n$의 수열들의 공간을 F_{n+1}이라 하자. F_{n+1}를 깃발다양체(flag manifold)라 한다. 그러면 F_{n+1}는 단순연결이며 복소구조를 수반하고 있고, $N = 2$ 이다.

각 $j = 0, ..., n$에 대해 $L_j \to F_{n+1}$을 파이버 E_{j+1}/E_j를 갖는 표준직선다발이라 하고 $u_j = c_1(L_j)$라 놓자. $L_0 \oplus \cdots \oplus L_n$이 자명하므로, $u_0 + \cdots + u_n = 0$이다. $\sigma_j(u)$ 를 기본 대칭 함수라 하면 F_{n+1}의 코호몰로지환은

$$H^*(F_{n+1}) = \frac{\mathbb{Z}[u_0, \cdots, u_n]}{< \sigma_1(u), \cdots, \sigma_{n+1}(u) >}$$

가 된다.

각 $j = 0, ..., n$에 대해 $p_j = u_j + \cdots + u_n$로 놓으면

$$c_1 = 2(p_1 + \cdots + p_n)$$

이다. 기저 $p_1, \cdots, p_n \in H^2(F_{n+1})$의 쌍대기저를 나타내면서 각 차수가 4인 n개의 보조 변수 $q_1, \cdots, q_n$을 취하자. 그러면 F_{n+1}의 퀀텀 코호몰로지는

$$\begin{aligned} QH^*(F_{n+1}) &= H^*(F_{n+1}) \otimes \mathbb{Z}[q_1, \cdots, q_n] \\ &= \frac{\mathbb{Z}[u_1, \cdots, u_n, q_1, \cdots, q_n]}{I} \end{aligned}$$

가 된다. 여기서 I는 아래의 행렬 A_n의 특성다항식의 계수에 의해 생성된 아이디얼이다:

$$A_n = \begin{pmatrix} u_0 & q_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & u_1 & q_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & u_2 & q_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & u_{n-1} & q_n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & u_n \end{pmatrix}.$$

[4.10] $G(k,N)$을 $\mathbb{C}^N$상의 k-평면들의 그라스마니안(Grassmannian)이라 하자. $E \oplus F = G(k,N) \times \mathbb{C}^N$이 되는 랭크(rank) k인 표준 복소벡터다발 $E \to G(k,N)$과 랭크(rank) $N-k$인 복소벡터다발 $F \to G(k,N)$을 생각해 보자. $x_j = c_j(E^*), y_j = c_j(F^*)$라 하면 $j = 1, \cdots, N$에 대해

$$\Sigma_{i=0}^{j} x_i y_{j-i} = 0$$

이다. 그리고 코호몰로지 환은

$$H^*(G(k,N)) \simeq \frac{\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k]}{< y_{N-k+1}, \cdots, y_N >}$$

이 된다.

정리 4.3 (위튼) 그라스마니안의 퀀텀 코호몰로지는

$$QH^*(G(k,N)) \simeq \frac{\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k, q]}{< y_{N-k+1}, \cdots, y_{N-1}, y_N + (-1)^{N-k} q >}$$

이다. 여기서 x_j는 차수 $2j$의 생성원이고, q는 차수 $2N$의 생성원이다. 또 $y_N + (-1)^{N-k}q = 0$은 $-x_k y_{N-k} + (-1)^{N-k}q = 0$으로 다시 쓸 수 있다.

[4.11] $\mathcal{H} = \oplus_i H^{2i}(M, \mathbb{C})$라 하자. $a, b \in \mathcal{H}$ 에 대해 포앙카레 쌍을 $< a, b >= \int_M \bar{a} \wedge b$ 로 $\alpha = PD(a),\ \beta = PD(b),\ \gamma = PD(c)$일 때

$$< a * b, c >= \Sigma_A \Phi_A(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma)$$

로 정의하자. 그리고 $a \in \mathcal{H}$와 벡터장 X, Y : $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$에 대해

$$\nabla_Y X(a) = dX(a)Y(a) + iX(a) * Y(a)$$

하자. 더 일반적으로 보면, $a \in \mathcal{H}$, X, Y : $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$에 대해

$$A_a(x)(y) = ix *_a y$$

로, 접속

$$\nabla = d + A : C^\infty(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \to \Omega^1(\mathcal{H}, \mathcal{H})$$

는

$$\nabla_Y X(a) = dX(a)Y(a) + iX(a) *_a Y(a)$$

로 주어진다.

정리 4.4. (1) 접속 ∇이 꼬임이 없음(TORSION FREE)와 필요충분조건은 $a, x, y \in \mathcal{H}$에 대해 $x *_a y = y *_a x$이다.

(2) ∇을 꼬임없는 접속이라 하자. ∇가 에르미트(HERMITIAN) 구조와 양립하는 것과의 필요충분조건은 $a, x, y, z \in \mathcal{H}$ 에 대해 $< \bar{x} *_{\bar{a}} \bar{y}, z > = < \bar{x}, y *_a z >$ 이다.

(3) ∇을 꼬임없는 에르미트 접속이라 하자. 1형식 A가 닫힌 형식이라는 것과 동치는

$$< \bar{x} *_{\bar{a}} \bar{y}, z >= \partial^3 S_a(x, y, z)$$

를 만족하는 복소해석적 함수 $S : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ 가 존재하는 것이다.

(4) ∇을 꼬임없는 에르미트 접속이라고 하자. 그러면 닫힌 1형식 A가 $A \wedge A = 0$을 만족하는 것은 결합법칙을 만족하는 것과 동치이다.

[4.12] [4.11]에서 본 복소해석적 함수 $S : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$에 대해서 다음 조건들은 서로 동치이다.

(1) $*_a$가 결합법칙을 만족한다.

(2) 접속 ∇ 가 평탄접속이다.

(3) 함수 S는 아래의 WDVV 방정식(Witten, Dijkaraaf, E.Verlinde, H.Verlinde)을 만족한다.

$$\Sigma_i \partial^3 S_a(\omega, x, e_i)\partial^3 S_a(f_i, y, z) = \Sigma_i \partial^3 S_a(x, y, e_i)\partial^3 S_a(f_i, \omega, z).$$

여기서 e_i는 $\mathcal{H}$의 기저이고 f_i의 $< \bar{f}_i, e_j >= \delta_{ij}$를 만족하는 쌍대기저이다.

[4.13] WDVV 방정식을 이용하여, $\mathbb{CP}^2$상에서 유리곡선의 개수를 계산하자.

$$N(d) \equiv \Phi_{dL,3d-1}(\text{점}, \cdots, \text{점})$$

을 $p = 3d - 1$개의 일반적 점들과 만나는 $\mathbb{CP}^2$안의 차수 d의 유리곡선을 개수라 하자.

그러면 $N(1) = 1$이고 $d \geq 2$에 대해, [4.12]의 (3)으로부터

$$N(d) = \Sigma_{k+l=d} N(k)N(l)k^2 l \Big(l \begin{pmatrix} 3d-4 \\ 3k-2 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 3d-4 \\ 3k-1 \end{pmatrix} \Big), d \geq 2$$

의 관계식을 유도할 수 있다.

$N(d)$의 처음 몇 개를 값을 구해보면 다음과 같다.

$N(1) = 1, N(2) = 2, N(3) = 12, N(4) = 620, N(5) = 87304,$

$N(6) = 26312976.$

제 5 장. 부록

[5.1] [정리 4.2] 의 증명 요약:

점$z_0 \in \mathbb{C}P^1$을 고정하고 일반적 J에 대해 $2n + 2c_1(A+B)$차원 다양체인 첨점(cusp) 곡선의 공간 $\mathcal{M}(A,B,J) = \{(u,v) \in \mathcal{M}(A,J) \times \mathcal{M}(B,J) \mid u(z_0) = v(z_0)\}$을 생각하자.

$z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$를 $\mathbb{CP}^1$안의 서로 다른 점들이라 하면 값매김(evaluation) 함수

$$e_z : \mathcal{M}(A,B,J) \to M^4$$

는 $e_z(u) = (u(z_1), u(z_2), u(z_3), u(z_4))$로 주어지고 e_z의 상은 일반적 J에 대해 유사 사이클이다.
$\xi_A = PD(a*b)_A$일 때, 불변량 $\Psi_{A,B}$를 다음과 같이 교차수로 정의하자.

$$\begin{aligned}\Psi_{A,B}(\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta) &\equiv e_z \cdot (\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta)\\ &= \Phi_B(\xi_A, \gamma, \delta).\end{aligned}$$

여기서 $\{\varepsilon_i\}$는 호몰로지 $H_A(M)$의 기저이고, $\{\phi_i\}$는 (교차 쌍 $\phi_j \cdot \varepsilon_i = \delta_{ij}$에 대한) 쌍대 기저라 하자.
그러면 $\Psi_{A,B}(\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta) = \Sigma_i \Phi_A(\alpha, \beta, \varepsilon_i)\Phi_B(\phi_i, \gamma, \delta)$이다. 그리고 $(a*b)*c = \Sigma_A((a*b)*c)_A q^{c_1(A)/N}$를 생각하면,
$((a*b)*c)_A \in H^{j+k+l-2c_1(A)}(M)$와 주어진 $\delta \in H_{j+i+l-2c_1(A)}(M)$에 대해

$$\begin{aligned}\int_\delta ((a*b)*c)_A &= \Sigma_B \Phi_{B,A-B}(\xi, \gamma, \delta)\\ &= \Sigma_B \Psi_{B,A-B}(\alpha, \beta; \gamma, \delta)\end{aligned}$$

이다.

보조정리. (M, ω)이 최소 천(CHERN) 수 $N \geq 2$을 갖는 단조(MONOTONE) 다양체이고 $A \in H_2(\mathrm{M})$라 하면 $\Sigma_j deg\alpha_j = 6n - 2c_1(A)$인 호몰로지 류 $\alpha_j \in H_*(M)$에 대해

$$\Psi_A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \Sigma_B \Psi_{B,A-B}(\alpha_1, \alpha_2; \alpha_3, \alpha_4)$$

이다.

주어진 $z = (0, 1, \infty, z) \in (\mathbb{CP}^1)^4, z \in \mathbb{C} \backslash \{0, 1\}$에 대해

$$e_z : \mathcal{M}(A, J) \to M^4$$

$$(*) \qquad e_z(u) = (u(\infty), u(1), u(0), u(z)) \in \alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3 \times \alpha_4 \subset M^4$$

이고 $\Psi_A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$는 위 조건 $(*)$를 만족시키는 곡선의 수 이다.

z가 0에 가까워지면 위와 같은 A-곡선과 $\Psi_{A-B,B}(\alpha_1, \alpha_2; \alpha_3, \alpha_4)$에 의해 셈한 곡선들의 연결 쌍 사이에는 일대일 대응 관계가 있다.

대응하는 z_i가 0에 가까워 질 때 $(*)$를 만족하는 수열 $u_i \in \mathcal{M}(A, J)$을 생각해 보면 $u_i(z_i)$와 $u_i(0)$는 $\alpha_3 \cap \alpha_4$안에 있는 같은 점으로 수렴하거나 서로 다른 점으로 수렴한다. 같은 점으로 수렴하는 경우, 그 극한은

$$\Psi_A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cap \alpha_4) = \Psi_{A,0}(\alpha_1, \alpha_2; \alpha_3, \alpha_4)$$

에 값을 주는 A-곡선 이다. 서로 다른 점으로 수렴하는 경우에는 0의 근방과 z의 근방의 점들은 서로 멀리 떨어진 점들로 사상되고 u_i의 도함수는 0근방 어디에선가 갑자기 커진다. 도함수가 갑자기 커지는 그 지점에 임의의 류 B에 있고 α_3와 α_4를 지나는 거품(bubble)이 있다. u_i를 $\mathbb{CP}^1 \backslash \{0\}$의 컴팩트 부분집합으로 제한하면 그 제한 곡선은 $u(\infty) \in \alpha_1$ and $u(1) \in \alpha_2$인 곡선 $u \in \mathcal{M}(A \backslash B, J)$로 수렴한다.

따라서 극한 뾰족 곡선은 $\Psi_{A\backslash B,B}(\alpha_1,\alpha_2;\alpha_3,\alpha_4)$에 값을 준다. 여기에서는

$$\Psi_A(\alpha_1\cap\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4)=\Psi_{0,A}(\alpha_1,\alpha_2;\alpha_3,\alpha_4).$$

에 대응하는 극한 곡선 u가 상수인 경우까지 포함한다.

그러므로, z가 0에 가까워짐에 따라 불변량 $\Psi_A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$의 계산에서 셈한 u는 모두 $\Sigma_B\Psi_{A\backslash B,B}(\alpha_1,\alpha_2;\alpha_3,\alpha_4)$에 값을 주는 상대짝(counter part)을 갖는다.

역으로 $u(\mathbb{CP}^1)$는 α_1와 α_2에서 교차하고 $v(\mathbb{CP}^1)$는 α_3과 α_4에서 교차하는 교차하는 곡선들의 쌍 $(u,v)\in\mathcal{M}(A\backslash B,B,J)$은 모두 z가 0에 가까워짐에 따라 $(*)$를 만족하는 유일한 곡선 $\omega\in\mathcal{M}(A,J)$를 결정한다. 따라서 $((a*b)*c)_A=\Sigma_B((a*b)_{A-B}*c)_B$ 이고,

$$\begin{aligned}\Psi_{A\backslash B,B}(\alpha,\beta;\gamma,\delta)&=\Sigma\Phi_{A-B}(\alpha,\beta,\varepsilon_i)\Phi_B(\phi_i,\gamma,\delta)\\&=\Sigma\Phi_{A\backslash B}(\beta,\gamma,\varepsilon_i)\Phi_B(\phi_i,\alpha,\delta)\\&=\Sigma_B((\beta*\gamma)_{A-B}*\alpha)_B\\&=\Sigma_B(\alpha*(\beta*\gamma)_{A-B})_B\\&=(\alpha*(b*c))_A\end{aligned}$$

이다. 또한 $a*(b*c)=\Sigma_A((a*b)*c)_Aq^{c_1(A)/N}$ 이고,

$$\begin{aligned}\int_\delta((a*b)*c)_A&=\Sigma_B\Phi_B(\xi_{A\backslash B},\gamma,\delta)\\&=\Sigma_B\Psi_{A\backslash B,B}(\alpha,\beta;\gamma,\delta)\\&=\Psi_A(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\\&=\Sigma_B\Sigma_i\Phi_{B\backslash A}(\alpha,\beta,\varepsilon_i)\Phi_B(\phi_i,\gamma,\delta)\\&=\Sigma_B\Sigma_i\Phi_{B\backslash A}(\beta,\gamma,\varepsilon_i)\Phi_B(\phi_i,\gamma,\delta).\end{aligned}$$

여기서 $\{\varepsilon_i\}$와 $\{\phi_i\}$는 $H_*(M)$에서 쌍대 기저이다.

[5.2] [정리 4.4] 의 증명

(1)

$$\begin{aligned}\nabla_Y X - \nabla_X Y &= dX \cdot Y + iX * Y - dY \cdot X - iY * X \\ &= dX \cdot Y - dY \cdot X, \ X * Y = Y * X\text{인 경우} \\ &= [X, Y].\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}& d < Y, Z > \cdot X \\ &=< dY \cdot \bar{X}, Z > + < Y, dZ \cdot X > \\ &=< \nabla_{\bar{X}} Y - iY * \bar{X}, Z > + < Y, \nabla_X Z - iZ * X > \\ &=< \nabla_{\bar{X}} Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >\end{aligned}$$

일 필요충분조건은 $< Y * \bar{X}, Z > = < Y, X * Z >$ 이다.

(3) 함수 $\phi_a(X, Y, Z) =< \bar{X} *_{\bar{a}} \bar{Y}, Z >$는 X, Y, Z에서 대칭이다. 그리고, 도함수

$$\psi_a(W, X, Y, Z) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \phi_{a+tW}(X, Y, Z)$$

가 W, X, Y, Z에서 대칭일 필요충분조건은 접속 1형식 A가 닫힌 형식이라는 것과 $\phi_a(X, Y, Z) = \partial^3 S_a(X, Y, Z)$인 복소해석적 함수 $S : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$가 존재한다는 것이다.

(4)

$$\begin{aligned}F_A = dA + A \wedge A = 0 &\Leftrightarrow A \wedge A = 0, dA = 0\text{이므로} \\ &\Leftrightarrow *_a \text{ 가 결합법칙을 만족한다.} \\ &\Leftrightarrow \text{A 는 평탄(flat)하다.}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(A \wedge A)(X,Y)Z &= A(X)A(Y)Z - A(Y)A(X)Z = 0 \\
&\Leftrightarrow X * (Y * Z) = Y * (X * Z) \\
&= Y * (Z * X) = Z * (X * Y) = (X * Y) * Z. \qquad \square
\end{aligned}
$$

참고문헌

[1] N. Aronszajn, *A unique continuation principle for elliptic differential equations or inequalities of the second order*, Journal de Mathematiques Pures et Appliques, **36** 1957, 235-239.

[2] M. F. Atiyah and I. Singer, *The index of elliptic operations. III*, Ann. of Math. **87** (1968), no. 2, 546–604.

[3] M. F. Atiyah, N. Hitchin. and I. Singer, *Self duality in four-dimensional Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London Ser. **A 362** (1978), 425–461.

[4] M. F. Atiyah and G. B. Segal, *The index of elliptic operations. II.*, Ann. of Math. **87** (1968), no. 2, 531–545.

[5] D. Auckly, *Homotopy* **K***3 surfaces and gluing results in Seiberg-Witten Theory*, Three lectures for the GARC, 1996.

[6] M. Audin. and J. Lafontaine, *eds. Holomorphic Curves in Symplectic Geometry*, Progress in Mathematics. Birkhauser, Basel, **117** 1994.

[7] K. Behrend, *Gromov-Witten invariants in algebraic geometry*, Preprint.

[8] N. Brand, *Necessary conditions for the existence of Branched coverings*, inventions math. **54** (1979), 1–10.

[9] G. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, 1972.

[10] Y. S. Cho, *Cyclic group actions on gauge theory*, Diff. Geo. and Appl. **6** (1996), 87–99.

[11] ______, *Equivariant metric for smooth moduli spaces*, Topl. and Appl. **62** (1995), 77–85.

[12] ______, *Finite group actions on 4-manifolds*, Jour. of Australian Math. Soc. (series A), **66**, **Part 3**, (1999), 287–296.

[13] ———, *Finite group actions on the moduli space of self-dual connections I*, Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), 233–261.

[14] ———, *Finite group actions on the moduli space of self-dual connections II*, Michigan Math. J. **37** (1990), 125–132.

[15] ———, *Finite group actions on SpinC bundles*, Acta Math. Hungar, **84**(1–2) (1999), 97–114.

[16] ———, *Seiberg-Witten invariants on non-symplectic 4-manifolds*, Osaka J. Math. **34** (1997), 169–173.

[17] Y. S. Cho and M. S. Cho, *Genus Minimizing in sympletic 4-manifolds*, Chin. Ann. of Math. **21B** (2000), no. 1, 115–120.

[18] C. Conley, and E. Zehnder, *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I.*, Arnold. Inventiones Mathematicae. **73** (1983), 33–49.

[19] P. Deligne, and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given gemnus*, Publications Mathemathiques IHES, **36** (1969), 75–110.

[20] S. Donaldson, *An application of gauge theory to four-manifold theory*, J. Differential Geom. **18** (1983), 279–315.

[21] S. K. Donaldson, *Polynomial invariants for four manifolds*, Topology **29** (1990), 257–315.

[22] S. Donaldson, *The Seiberg-Witten equations and 4-manifold topology*, Bull. of A. M. S. **33:1** (1995), 45–70.

[23] S. K. Donaldson and P. Kronheimer, *Geometry of Four Manifolds*, Oxford University Press, 1990.

[24] F. Fang, *Smooth group actions on 4-manifolds and Seiberg-Witten invariants*, Inter. Jour. of Math. **9** (1998), no. 8, 957–973.

[25] R. Fintushel and R. Stern, *Pseudofree orbifolds*, Ann, of Math. **122** (1985),

[26] ———, *SO(3)-connections of topology of 4-manifols*, J. Differential Geom. **20** (1984), 523–539.

[27] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, Journal of Differential Geometry, **28** (1998), 513–547.

[28] ———, *The unregularized gradient flow of the symplectic action*, Communications in Pure and Applied Mathematics, **43** (1988), 576–611.

[29] ———, *Witten's complex and infinite dimensional Morse theory*, Journal of Differential Geometry, **30** (1989), 207–221.

[30] R. Fredman and J. Morgan, *On the diffeomorphism type of certain algebraic surface I*, J. Diff. Geom. **27** (1988), 297–369.

[31] D. S. Freed and K. K. Uhlenbeck, *Instantons and Four-Manifols*, M.S.R.I. Pub. **1** (1984).

[32] M. Freedman, *The topology of four dimensional manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1983), 357–454.

[33] K. Fukaya and K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant*, Topology **38** (1999), no. 5, 933–1048.

[34] M. Furuta, *Monopole equation and the 11/8 conjecture*, preprint.

[35] R. Gompf, *A new construction of symplectic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.

[36] M. Gromov, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.

[37] F. Hirzebruch, *The signature of ramified coverings, in:Global Analysis* (Papers in Honors of K. Kodaira), Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1969, pp. 253–266.

[38] R. Kirby, *Problems in low-dimensional topology*, Berkeley, 1995.

[39] M. Kontsevich, *Enumeration of Rational Curves Via Torus Actions*, hepth/9405035 V_2 27 Jun 1995.

[40] M. Kontsevich and Y. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry*, Hep-th/9402147 (1994).

[41] D. Kotschick, *On irreducible four-manifolds*, preprint.

[42] D. Kotschick, S. Morgan and C. Taubes, *Four-manifolds without symplectic structures but with nontrivial Seiberg-Witten invariants*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 119–124.

[43] P. Kronheimer and T. Mrowka, *The geneus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Research Letters I (1994), 794–808.

[44] N. Kuiper, *The quotient space of* $\mathbb{CP}^2$ *by the complex conjugation is the 4-sphere*, Math. Ann. **208** (1974), 175–177.

[45] N. H. Kuiper, *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, Topology, **3** (1965), 19–30.

[46] Kuranishi, *New proof for the existence of local free complete families of complex structrues*, Conference on Complex Analysis. Springer, Minneapolis, 1964.

[47] D. McDuff and D. Salamon, **J**-*holomorphic curves and Quantum cohomol ogy*, Univ. Lecture Series, **6** (1994), A.M.S.

[48] D. McDuff, *Elliptic methods in symplectic geometry*, Bulletin of American Mathematical Society, **23** (1990), 311–358.

[49] ———, *Example of symplectic structures*, Inventiones Mathematicae, **89** (1987), 13–36.

[50] ———, *The structure of rational and ruled symplectic 4-manifolds*, Jour. of A. M. S. **3** (1990), 679–712.

[51] S. Novikov, *Multivalued functions and functionals-an analogue of the Morse theory*, Soviet Mathematics Doklady, **24** (1981), 222–225.

[52] T. Parker, *Gauge theories on four dimensional Riemannian manifolds*, Comm. Math. Phys. **85** (1982), 1–40.

[53] T. Parker and J. Wolfson, *Pseudo holomorphic maps and bubble trees*, Journal of Geometry and Analysis, **3** (1993), 63–98.

[54] T. Petrie, *Pseudo equivalence of G-manifolds*, Proc. Sympos. Pure Math. **32**, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1978, pp. 169–210.

[55] Y. Ruan, *Topological sigma model and Donaldson type invariant in Gromov theory*, Duke Mathematical Journal, **83** (1998), 461–500.

[56] Y. Ruan and G. Tian, *A mathematical theory of quantum cohomogy*, Journal of Differential Geometry, **42** (1995), 259–367.

[57] I. Satake, *The Gauss-Bonnet theorem for V-manifolds*, Journal of Mathe matical Society of Japan, **9** (1957), 464–492.

[58] P. Shanahan, *The Atiyah-Singer Index Theorem*, Lect. Notices In Math. **638** (1976).

[59] I. Singer and J. Thorpe, *The curvature of 4-dimensional Einstein spaces*, Global Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1969, pp. 335–365.

[60] S. Smale, *An infinite dimensional version of Sard's theorem*, Amer. J. Math. **87** (1968), 861–866.

[61] C. Taubes, *Counting pseudo holomorphic submanifolds in dimension 4*, Preprint.

[62] ———, *More constraints on symplectic forms from Seiberg-Witten invariants*, Math. Res. Letters, **2** (1995), 9–13.

[63] ———, *Self-dual connections on manifolds with indefinite intersection matrix*, Journal of Differential Geometry, **19** (1984), 517–560.

[64] ———, *Self-dual connections on non-self-dual 4-manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), 139–170.

[65] ———, *The Geometry of the Seiberg-Witten invariants*, preprint.

[66] ———, *The Seiberg-Witten and teh Gromov invariants*, Math. Res. Letters, **2**(1995), 221–238.

[67] ———, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Letters, **I** (1994), 809–822.

[68] S. Wang, *Gauge theory and involutions*, 1990, Oxford thesis.

[69] E. Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Letter, **1** (1994), 769–796.

[70] ———, *Supersymmetry and Morse theory*, Journal of Differential Geometry, **117** (1982), 353–386.

[71] ———, *Topological sigma model*, Communications in Mathematical

[72] ——, *The index of elliptic operations.* IV. V. Ann of Math. **93** (1971), no. 2, 119–149.

[73] —— , *Connections, cohomology and the intersection forms of 4-manifolds*, J. Differential Geom. **24** (1986), 275–341.

[74] 조용승, 다양체의 미분위상수학, 대우총서 432, 아르케, 1999.

[75] ———, 수학에서 게이지 이론, 이론물리의 수학적 접근, 민음사, 1996, 75–90.

조 용 승
이화여자대학교 자연과학대학 수학과
서울시 서대문구 대현동 11-1
120-750
E-mail: yescho@mm.ewha.ac.kr