

# 임의의 경계조건을 갖는 비등방성 탄성체의 3차원 유한차분 해석

## Three-Dimensional Finite Difference Analysis of Anisotropic Body with Arbitrary Boundary Conditions

이 상 열<sup>1)</sup> · 임 성 순<sup>2)</sup> · 장 석 윤<sup>2)</sup>

*Lee, Sang Youl · Yhim, Sung Soon · Chang, Suk Yoon*

요 약 : 본 논문에서는 일반화된 21개 강성 매트릭스의 독립 변수를 모두 사용하였고 비등방성 3차원 탄성체의 지배 방정식 및 수치 해석 근사식을 유도하였다. 일반화된 3차원 해석은 2차원 해석의 제한성을 극복하는 정밀해를 보여줄 수 있으며, 두꺼운 보나 판, 또는 셸에서 전단 변형 효과에 의한 처짐의 증가 효과를 더욱 정밀하게 해석할 수 있다. 따라서 본 논문은 3차원 비등방성 탄성체에 대하여 다양한 경계조건에 따른 유한 차분식을 유도하였으며 이를 전산화하여 해석 프로그램을 개발하였다. 특히, 본 논문에서는 자유경계조건에 대하여 개선된 유한차분법의 적용 방식을 제시하였다. 또한 탄성체의 각 방향 자유경계면에서 경계조건을 해결할 수 있는 일반화된 방식을 제시하였다. 몇가지 수치예제를 통하여 이러한 유한차분 경계처리 방식에 의한 비등방성 3차원 탄성체 해석의 타당성 및 거동을 분석하였다.

ABSTRACT : The main object of this study is to analyze mechanical behaviors as anisotropic three-dimensional body under various static loads. This paper presents the applicability of the finite difference method to three dimensional problem of anisotropic body. The finite difference method as applied here is generalized to anisotropic three-dimensional problem of elastic body where the governing differential equations of equilibrium of such bodies are expressed in terms of the displacement  $u$ ,  $v$ , and  $w$  in the coordinates axes  $x$ ,  $y$ , and  $z$ , care being taken to modify the finite difference expressions to satisfy the appropriate boundary conditions. By adopting a new three dimensional finite difference modelling including elimination of pivotal difference points in the case of free boundary condition, the three dimensional problem of anisotropic body was successfully completed. Several numerical results show quick convergence and numerical validity of finite difference technique in three dimensional problem.

핵심용어 : 비등방성, 3차원 탄성체, 유한차분법, 자유경계 처리기법

KEYWORDS : Anisotropy, Three dimensional body, F.D.M., Boundary solution technique

1) (주)서영기술단 구조3팀 과장, 공학박사  
2) 서울시립대학교 토목공학과 교수, 공학박사

본 논문에 대한 토의를 2000년 12월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

본 논문은 일반화된 21개 강성 매트릭스의 독립 변수를 모두 사용하였고 비등방성 3차원 탄성체의 지배 방정식 및 수치 해석 근사식을 유도하였다. 일반화된 3차원 해석은 2차원 해석의 제한성을 극복하는 정밀 해를 보여줄 수 있으며 특히 두꺼운 보나 판, 또는 셸에서 전단 변형 효과에 의한 처짐의 증가 효과를 더욱 정밀하게 해석할 수 있다. 기존 3차원 탄성체 해석은 Airy 응력 함수를 이용한 고전적인 방법이 많으며<sup>[5,8]</sup> 이와 같은 해석적인 방법은 경계조건과 탄성 매트릭스 성분의 연계성으로 제한된 범위 내에서만 가능하므로 주로 경계조건이 단순하고 연계성이 없는 등방성체의 해석에 국한되었다. 본 논문에서 제시한 유한차분법은 대부분의 역학 문제를 표현하는 미분 지배 방정식을 수학적 근사식으로 비교적 간편하게 변환하여 수치적으로 해석할 수 있다는 점에서 편리한 기법이다.<sup>[3,9]</sup> 특히, 본 논문에서는 자유경계면에 대하여 개선된 유한차분 기법을 제시하였다. 기존의 유한차분법을 이용한 연구에서 사용한 경계조건처리는 경계에 대하여 기하학적으로 만족하는 방식이었으며, 이러한 방식은 가상점(Pivotal Points)를 포함하는, 즉 자유면을 갖는 비등방성인 경우에 대하여 충분히 만족하지 못하였다. 본 논문에서 제시하고자 하는 기법은 차분식을 직접 적용한 자유경계조건의 해결이라는 점에서 기존의 해석과 다른 방식이라 할 수 있다. 이는 힘과 변위의 역학관계를 이용한 가상점의 소거에 의한 개선된 기법이며 자유경계에서의 완전한 수치적 타당성을 갖는다. 본 논문은 각각의 경계 조건에 대한 가상점의 소거식을 유도하여 상세히 수록하였다. 또한, 본 논문에서는 각 자유면에서의 경계조건을 해결할 수 있는 일반화된 방식을 제시하였다. 또한, 몇 가지 수치예제 통하여 개선된 자유경계 처리 기법에 의한 3차원 비등방성 탄성체 해석의 타당성 검토 및 거동 특성을 규명하였다.

## 2. 기본이론

### 2.1 일반 후크 법칙

탄성체의 응력과 변형도의 관계는 일반 후크의 법칙에 의하여 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_c = C_{cf} \epsilon_f \quad (c, f = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (1.a)$$

식 (1.a)에서 탄성계수 텐서  $C_{cf}$ 는 탄성 특성이 기준축과 독립적인 경우 등방성, 그렇지 않은 경우 비등방성으로 정의한다. 일반적인 비등방성체의 탄성계수는 36개의 서로 다른 형태의 매트릭스를 갖는다<sup>[5]</sup>. 이 경우,  $C_{cf} = C_{fc}$ 이므로 36개의 상수는 21개로 줄어들며 식 (1.b)와 같이 표현된다. 또한, 임의의 탄성 대칭평면이 존재한다면, 즉,  $x_3$ 축이 탄성대칭평면에 직각이라면 21개의 상수는 13개로 줄어들며 식 (1.c)와 같이 표현된다. 또한 재료가 탄성대칭의 3개의 직각평면상에 놓여 있다면 재료는 직교이방성을 가지며 식 (1.d)와 같이 9개의 독립상수로 표현된다.

$$[C_{cf}]_{Ani} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.b)$$

$$[C_{cf}]_{sym} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.c)$$

$$[C_{cf}]_{orth} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.d)$$

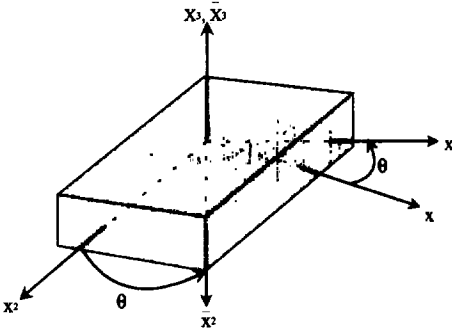


그림 1. 3차원 탄성체의 구조축 및 재료축 정의

그림 1은 3차원 탄성체의 재료축과 구조축을 정의한 것이며,  $\theta$ 는 구조축과 재료축이 이루는 각도를 의미한다. 이와 같이 구조축과 재료축이 서로 달라지는 경우 식 (1.a)은 식 (2)와 같은 응력-변형도 간의 변환관계가 성립된다.

$$[\sigma'] = [T][\sigma] = [T][C][\epsilon] = [T][C][T]^T[\epsilon']$$

$$[\bar{C}] = [T][C][T]^T \quad (2)$$

식 (2)에서 [T]는 구조축과 재료축사이의 변환매트릭스를,  $[\bar{C}]$ 는 변환매트릭스에 의한 탄성계수행렬의 변환매트릭스를 의미한다.

## 2.2 지배 방정식

탄성체의 3차원 지배방정식은 식 (2)를 탄성체의 평형방정식에 대입함으로 구할 수 있다. 이러한 3차원 지배방정식은 그림 1에서  $x_1, x_2, x_3$  축에 대한 변위  $u, v, w$ 의 2차 편미분항으로 이루어지며 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{c}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \bar{c}_{15} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \bar{c}_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \bar{c}_{56} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$$

$$+ \bar{c}_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \bar{c}_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$+ (\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + (\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}$$

$$+ \bar{c}_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{c}_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \bar{c}_{45} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$$

$$+ (\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{c}_{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{c}_{46} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$+ \bar{c}_{35} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

$$\bar{c}_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$+ (\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46}) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \bar{c}_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \bar{c}_{45} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+ \bar{c}_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 \bar{c}_{46} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \bar{c}_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{c}_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$+ 2 \bar{c}_{24} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \bar{c}_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$$

$$+ (\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{c}_{56} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\bar{c}_{23} + \bar{c}_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}$$

$$+ \bar{c}_{24} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \bar{c}_{34} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

$$\bar{c}_{15} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \bar{c}_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \bar{c}_{56} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$$

$$+ \bar{c}_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \bar{c}_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$+ (\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}) + 2 \bar{c}_{56} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + (\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}$$

$$+ \bar{c}_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{c}_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \bar{c}_{45} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$$

$$+ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{c}_{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{c}_{46} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \bar{c}_{35} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

식 (3)과 같이 3개의 변위에 관한 2계 편미분항으로 지배방정식은 유한차분식을 이용하여 미리 결정된 절점에서 이웃하는 점에 대하여 각각 근사식으로 표현할 수 있다.

### 3. 유한차분법의 적용

#### 3.1 한 면이 자유경계인 경우

그림 2는 3차원에 대한 유한차분의 각 방향 절점을 정의한 것이다. 편의상 각 방향축을 1, 2, 3축으로 재정의하였다. 본 논문의 경계조건은 5번 고정 1번 자유 또는 4번 고정 2번 자유단인 경우로서 자유단에서의 유한차분법에 의한 경계조건의 처리는 자유단에서 발생하는 가상점을 내부의 점들로 치환하면서 외력을 가하는 기법을 제시하였다.

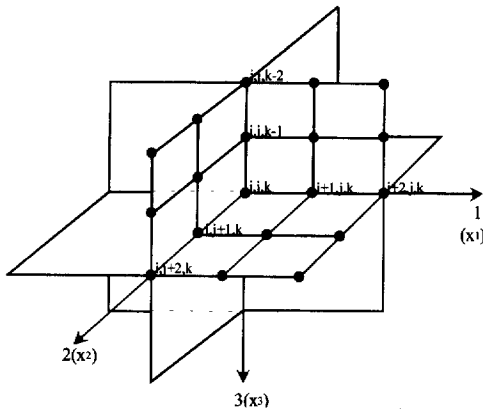


그림 2. 3차원 유한차분의 축방향 및 절점 정의

내부 분할절점에서는 중앙차분만으로 탄성체의 역학적 특성을 규명할 수 있으므로 본 연구에서는 경계 분할절점에서의 적용에 대한 기법을 중점적으로 기술하였다. 1방향으로 외력을 가했을 때 23평면이 자유경계인 경우, 발생하는 가상점은  $(u_{i-1,j,k}, w_{i-1,j,k}, v_{i-1,j,k})$ 이 되며, 응력-변위와의 관계식을 중앙차분하였을 때 발생하는 이러한 가상점에 관하여 식 (4)와 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u_{i-1,j,k} \\ w_{i-1,j,k} \\ v_{i-1,j,k} \end{bmatrix} = -2\lambda_1 [\alpha] \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}_{i,j,k} + [\alpha] \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} \\ \bar{c}_{15} \\ \bar{c}_{16} \end{bmatrix} [u_{i+1,j,k}]$$

$$\begin{aligned} & + [\alpha] \begin{bmatrix} \bar{c}_{12} \\ \bar{c}_{25} \\ \bar{c}_{26} \end{bmatrix} \xi [v_{i,j+1,k} - v_{i,j-1,k}] \\ & + [\alpha] \begin{bmatrix} \bar{c}_{13} \\ \bar{c}_{35} \\ \bar{c}_{36} \end{bmatrix} \mu [w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k-1}] \\ & + [\alpha] \begin{bmatrix} \bar{c}_{14} \\ \bar{c}_{45} \\ \bar{c}_{46} \end{bmatrix} \xi [w_{i,j+1,k} - w_{i,j-1,k}] \\ & + [\alpha] \begin{bmatrix} \bar{c}_{14} \\ \bar{c}_{45} \\ \bar{c}_{46} \end{bmatrix} \mu [v_{i,j,k+1} - v_{i,j,k-1}] \\ & + [\alpha] \begin{bmatrix} \bar{c}_{15} \\ \bar{c}_{55} \\ \bar{c}_{56} \end{bmatrix} [w_{i+1,j,k}] \\ & + [\alpha] \begin{bmatrix} \bar{c}_{15} \\ \bar{c}_{55} \\ \bar{c}_{56} \end{bmatrix} \mu [u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k-1}] \\ & + [\alpha] \begin{bmatrix} \bar{c}_{16} \\ \bar{c}_{56} \\ \bar{c}_{66} \end{bmatrix} [v_{i+1,j,k}] \\ & + [\alpha] \begin{bmatrix} \bar{c}_{16} \\ \bar{c}_{56} \\ \bar{c}_{66} \end{bmatrix} \xi [u_{i,j+1,k} - u_{i,j-1,k}] \end{aligned}$$

$$\text{여기서, } [\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{15} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{16} & \alpha_{56} & \alpha_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{15} & \bar{c}_{16} \\ \bar{c}_{15} & \bar{c}_{55} & \bar{c}_{56} \\ \bar{c}_{16} & \bar{c}_{56} & \bar{c}_{66} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\xi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \mu = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \quad \text{이다.} \quad (4)$$

식 (4)에서  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 는 각각 1, 2, 3방향으로의 분할 절점 구간의 길이를 의미한다. 식 (4)를 식 (3)에 대한 중앙차분식에 대입하면 발생하는 가상점은 내부점으로 치환되어 내부점만의 식으로 만들어진다. 식 (5)는 식 (3)의 첫 번째 방정식에 대하여 이를 정리하여 매트릭스로 나타낸 것이며 두 번째 방정식과 세 번째 방정식에 대한 가상점 소거 매트릭스는 같은 방식이며 지면상 생략하였다.<sup>(3)</sup>

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{c} \frac{\bar{c}_{56}}{2\lambda_2\lambda_3} \\ \frac{\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46}}{4\lambda_2\lambda_3} \\ \frac{\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45}}{4\lambda_2\lambda_3} \end{array} \right] u_i \quad j-1, k-1 \\
& \left[ \begin{array}{c} 3\frac{\bar{c}_{15}}{2\lambda_1\lambda_3} + \frac{\bar{c}_{55}}{\lambda_3^2} + \frac{(\bar{c}_{15}[\bar{a}_1] + \bar{c}_{55}[\bar{a}_2] + \bar{c}_{55}[\bar{a}_3])\xi}{\lambda_1^2} \\ 3\frac{\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}}{4\lambda_1\lambda_3} - \frac{\bar{c}_{45}}{\lambda_3^2} + \frac{(\bar{c}_{15}[\bar{\beta}_1] + \bar{c}_{55}[\bar{\beta}_2] + \bar{c}_{55}[\bar{\beta}_3])\xi}{\lambda_1^2} \\ 3\frac{\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}}{4\lambda_1\lambda_3} - \frac{\bar{c}_{35}}{\lambda_3^2} + \frac{(\bar{c}_{15}[\bar{\gamma}_1] + \bar{c}_{55}[\bar{\gamma}_2] + \bar{c}_{55}[\bar{\gamma}_3])\xi}{\lambda_1^2} \end{array} \right] u_i \\
& - \left[ \begin{array}{c} -2\frac{\bar{c}_{16}}{\lambda_1\lambda_3} \\ \frac{\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}}{\lambda_1\lambda_3} \\ -\frac{\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}}{\lambda_1\lambda_3} \end{array} \right] u_{i+1} + \left[ \begin{array}{c} \frac{\bar{c}_{15}}{2\lambda_1\lambda_3} \\ -\frac{\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}}{4\lambda_1\lambda_3} \\ +\frac{\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}}{4\lambda_1\lambda_3} \end{array} \right] u_{i+2} \quad j, k-1 \\
& + \left[ \begin{array}{c} \frac{\bar{c}_{56}}{2\lambda_2\lambda_3} \\ \frac{\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46}}{4\lambda_2\lambda_3} \\ \frac{\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45}}{4\lambda_2\lambda_3} \end{array} \right] u_i \quad j+1, k-1 \\
& + \left[ \begin{array}{c} 3\frac{\bar{c}_{16}}{2\lambda_1\lambda_2} + \frac{\bar{c}_{66}}{\lambda_2^2} + \frac{(\bar{c}_{16}[\bar{a}_1] + \bar{c}_{66}[\bar{a}_2] + \bar{c}_{66}[\bar{a}_3])\xi}{\lambda_1^2} \\ \frac{\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}}{4\lambda_1\lambda_2} + \frac{\bar{c}_{65}}{\lambda_2^2} + \frac{(\bar{c}_{16}[\bar{\beta}_1] + \bar{c}_{66}[\bar{\beta}_2] + \bar{c}_{66}[\bar{\beta}_3])\xi}{\lambda_1^2} \\ 3\frac{\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}}{4\lambda_1\lambda_2} + \frac{\bar{c}_{45}}{\lambda_2^2} + \frac{(\bar{c}_{16}[\bar{\gamma}_1] + \bar{c}_{66}[\bar{\gamma}_2] + \bar{c}_{66}[\bar{\gamma}_3])\xi}{\lambda_1^2} \end{array} \right] u_i \\
& + \left[ \begin{array}{c} -2\frac{\bar{c}_{16}}{\lambda_1\lambda_2} \\ -\frac{\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}}{\lambda_1\lambda_2} \\ -\frac{\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}}{\lambda_1\lambda_2} \end{array} \right] u_{i+1} + \left[ \begin{array}{c} \frac{\bar{c}_{15}}{2\lambda_1\lambda_2} \\ \frac{\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}}{4\lambda_1\lambda_2} \\ \frac{\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}}{4\lambda_1\lambda_2} \end{array} \right] u_{i+2} \quad j-1, k \\
& + \left[ \begin{array}{c} -2\frac{\bar{c}_{11}}{\lambda_1^2} - 2\frac{\bar{c}_{66}}{\lambda_2^2} - 2\frac{\bar{c}_{55}}{\lambda_3^2} \\ -2\frac{\bar{c}_{16}}{\lambda_1^2} - 2\frac{\bar{c}_{45}}{\lambda_2^2} - 2\frac{\bar{c}_{26}}{\lambda_3^2} \\ -2\frac{\bar{c}_{15}}{\lambda_1^2} - 2\frac{\bar{c}_{46}}{\lambda_2^2} - 2\frac{\bar{c}_{35}}{\lambda_3^2} \end{array} \right] u_i \\
& + \left[ \begin{array}{c} \frac{\bar{c}_{11}}{\lambda_1^2} + \frac{\bar{c}_{11}[\bar{a}_1] + \bar{c}_{15}[\bar{a}_2] + \bar{c}_{16}[\bar{a}_3]}{\lambda_1^2} \\ \frac{\bar{c}_{16}}{\lambda_1^2} + \frac{\bar{c}_{11}[\bar{\beta}_1] + \bar{c}_{15}[\bar{\beta}_2] + \bar{c}_{16}[\bar{\beta}_3]}{\lambda_1^2} \\ \frac{\bar{c}_{15}}{\lambda_1^2} + \frac{\bar{c}_{11}[\bar{\gamma}_1] + \bar{c}_{15}[\bar{\gamma}_2] + \bar{c}_{16}[\bar{\gamma}_3]}{\lambda_1^2} \end{array} \right] u_{i+1} \quad j, k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{c} 3\frac{\bar{c}_{16}}{2\lambda_1\lambda_2} + \frac{\bar{c}_{66}}{\lambda_2^2} + \frac{(\bar{c}_{16}[\bar{a}_1] + \bar{c}_{66}[\bar{a}_2] + \bar{c}_{66}[\bar{a}_3])\xi}{\lambda_1^2} \\ 3\frac{\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}}{4\lambda_1\lambda_2} + \frac{\bar{c}_{65}}{\lambda_2^2} + \frac{(\bar{c}_{16}[\bar{\beta}_1] + \bar{c}_{66}[\bar{\beta}_2] + \bar{c}_{66}[\bar{\beta}_3])\xi}{\lambda_1^2} \\ 3\frac{\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}}{4\lambda_1\lambda_2} + \frac{\bar{c}_{45}}{\lambda_2^2} + \frac{(\bar{c}_{16}[\bar{\gamma}_1] + \bar{c}_{66}[\bar{\gamma}_2] + \bar{c}_{66}[\bar{\gamma}_3])\xi}{\lambda_1^2} \end{array} \right] u_i \\
& + \left[ \begin{array}{c} \frac{2\bar{c}_{16}}{\lambda_1\lambda_2} \\ \frac{\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}}{\lambda_1\lambda_2} \\ \frac{\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}}{\lambda_1\lambda_2} \end{array} \right] u_{i+1} + \left[ \begin{array}{c} \frac{\bar{c}_{16}}{2\lambda_1\lambda_2} \\ -\frac{\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}}{4\lambda_1\lambda_2} \\ -\frac{\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}}{4\lambda_1\lambda_2} \end{array} \right] u_{i+2} \quad j+1, k \\
& + \left[ \begin{array}{c} \frac{\bar{c}_{56}}{2\lambda_2\lambda_3} \\ \frac{\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46}}{4\lambda_2\lambda_3} \\ \frac{\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45}}{4\lambda_2\lambda_3} \end{array} \right] u_i \quad j-1, k+1 \\
& + \left[ \begin{array}{c} -3\frac{\bar{c}_{15}}{2\lambda_1\lambda_3} + \frac{\bar{c}_{55}}{\lambda_3^2} + \frac{(\bar{c}_{15}[\bar{a}_1] + \bar{c}_{55}[\bar{a}_2] + \bar{c}_{55}[\bar{a}_3])\xi}{\lambda_1^2} \\ 3\frac{\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}}{4\lambda_1\lambda_3} + \frac{\bar{c}_{45}}{\lambda_3^2} + \frac{(\bar{c}_{15}[\bar{\beta}_1] + \bar{c}_{55}[\bar{\beta}_2] + \bar{c}_{55}[\bar{\beta}_3])\xi}{\lambda_1^2} \\ -3\frac{\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}}{4\lambda_1\lambda_3} + \frac{\bar{c}_{35}}{\lambda_3^2} + \frac{(\bar{c}_{15}[\bar{\gamma}_1] + \bar{c}_{55}[\bar{\gamma}_2] + \bar{c}_{55}[\bar{\gamma}_3])\xi}{\lambda_1^2} \end{array} \right] u_i \\
& + \left[ \begin{array}{c} 2\frac{\bar{c}_{15}}{\lambda_1\lambda_3} \\ -\frac{\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}}{\lambda_1\lambda_3} \\ +\frac{\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}}{\lambda_1\lambda_3} \end{array} \right] u_{i+1} - \left[ \begin{array}{c} \frac{\bar{c}_{15}}{2\lambda_1\lambda_3} \\ \frac{\bar{c}_{14} + \bar{c}_{56}}{4\lambda_1\lambda_3} \\ -\frac{\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}}{4\lambda_1\lambda_3} \end{array} \right] u_{i+2} \quad j, k+1 \\
& + \left[ \begin{array}{c} \frac{\bar{c}_{56}}{2\lambda_2\lambda_3} \\ \frac{\bar{c}_{25} + \bar{c}_{46}}{4\lambda_2\lambda_3} \\ \frac{\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45}}{4\lambda_2\lambda_3} \end{array} \right] u_i \quad j+1, k+1 \quad (5)
\end{aligned}$$

한편, 외력에 해당하는 부분도 가상점 소거에 의한 치환으로 식 (6)과 같은 매트릭스로 유도되어 표현된다.

$$\left[ \frac{2}{\lambda} \cdot ([\bar{a}_1]_1 \sigma_1 + [\bar{a}_2]_5 \sigma_5 + [\bar{a}_3]_6 \sigma_6) \right]_{i,j,k} \quad (6)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
[\bar{\alpha}_1] &= \bar{c}_{11} \cdot \alpha_{11} + \bar{c}_{15} \cdot \alpha_{15} + \bar{c}_{16} \cdot \alpha_{16} \\
[\bar{\alpha}_2] &= \bar{c}_{11} \cdot \alpha_{15} + \bar{c}_{15} \cdot \alpha_{55} + \bar{c}_{16} \cdot \alpha_{56} \\
[\bar{\alpha}_3] &= \bar{c}_{11} \cdot \alpha_{16} + \bar{c}_{15} \cdot \alpha_{56} + \bar{c}_{16} \cdot \alpha_{66} \\
[\bar{\beta}_1] &= \bar{c}_{16} \cdot \alpha_{11} + \bar{c}_{56} \cdot \alpha_{15} + \bar{c}_{66} \cdot \alpha_{16} \\
[\bar{\beta}_2] &= \bar{c}_{16} \cdot \alpha_{15} + \bar{c}_{56} \cdot \alpha_{55} + \bar{c}_{66} \cdot \alpha_{56} \\
[\bar{\beta}_3] &= \bar{c}_{16} \cdot \alpha_{16} + \bar{c}_{56} \cdot \alpha_{56} + \bar{c}_{66} \cdot \alpha_{66} \\
[\bar{\gamma}_1] &= \bar{c}_{15} \cdot \alpha_{11} + \bar{c}_{55} \cdot \alpha_{15} + \bar{c}_{56} \cdot \alpha_{16} \\
[\bar{\gamma}_2] &= \bar{c}_{15} \cdot \alpha_{15} + \bar{c}_{55} \cdot \alpha_{55} + \bar{c}_{56} \cdot \alpha_{56} \\
[\bar{\gamma}_3] &= \bar{c}_{15} \cdot \alpha_{16} + \bar{c}_{55} \cdot \alpha_{56} + \bar{c}_{56} \cdot \alpha_{66} \text{ 이다.}
\end{aligned}$$

### 3.2 공유하는 두 면이 자유경계인 경우

접하는 두 면이 자유단인 경우 두 면이 접하는 모서리 부분의 경계처리는 다소 복잡해진다. 차분식을 사용하는 경우, 모서리 부분에서는 2개의 가상점이 발생하게 되며 이러한 가상점은 순차적으로 소거한다. 먼저 양 방향으로의 연계항은 각 방향에 따라 전진 또는 후진차분법만으로 구성하며 한 방향으로의 항은 중앙차분법을 사용한다. 이러한 방식에 의하여 만나는 두 면의 모서리에서는 2개의 가상점이 발생하게 되며 각 방향에 대한 응력과 변위와의 관계식에 대한 순차적 제거 방법을 사용할 수 있다. 본 논문에서는 13평면과 23평면이 경계에서 자유단을 갖는 경우에 대한 경계처리에 관하여 기술하고자 한다.

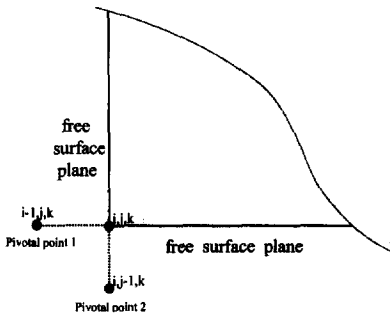


그림 3. 접하는 두 면이 자유경계인 경우

이러한 경우, 경계조건과 방향은 그림 3과 같다. 먼저 13평면을 기준으로 모서리부분의 두 개의 가상점은 식 (7.a)와 (7.b)로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} v_{i,j-1,k} \\ w_{i,j-1,k} \\ u_{i,j-1,k} \end{bmatrix} &= -2\lambda_2 [N] \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_{i,j,k} \\
&+ \frac{2\lambda_1}{\xi} [N][A][\alpha] \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_{i,j,k} \\
&+ [N][\Psi_1][u_{i+1,j,k}] + [N][\Psi_2][v_{i,j+1,k}] \\
&+ [N][\Psi_3][w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k-1}] \\
&+ [N][\Psi_4][w_{i,j+1,k}] + [N][\Psi_6][w_{i+1,j,k}] \\
&+ [N][\Psi_5][v_{i,j,k+1} - v_{i,j,k-1}] \\
&+ [N][\Psi_7][u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k-1}] \\
&+ [N][\Psi_8][v_{i+1,j,k}] + [N][\Psi_9][u_{i,j+1,k}] \quad (7.a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u_{i-1,j,k} \\ w_{i-1,j,k} \\ v_{i-1,j,k} \end{bmatrix} &= -2\lambda_1 [\alpha][I] + [A]^T [A][\alpha] \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_{i,j,k} \\
&+ 2\lambda_2 \xi [\alpha][A]^T [N] \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_{i,j,k} \\
&+ ([\alpha\beta_1] - \xi[A]^T [N][\Psi_1])[u_{i+1,j,k}] \\
&+ \xi([\alpha\beta_2] - [A]^T [N][\Psi_2])[v_{i,j+1,k}] \\
&+ ([\alpha\beta_5] - \xi[A]^T [N][\Psi_6])[w_{i+1,j,k}] \\
&+ ([\alpha\beta_6] - \xi[A]^T [N][\Psi_8])[v_{i+1,j,k}] \\
&+ \xi([\alpha\beta_6] - [A]^T [N][\Psi_9])[u_{i,j+1,k}] \\
&+ \xi([\alpha\beta_4] - [A]^T [N][\Psi_4])[w_{i,j+1,k}] \\
&+ \mu([\alpha\beta_3] - [A]^T [N][\Psi_3])[w_{i,j+1,k} - w_{i,j,k-1}] \\
&+ \mu([\alpha\beta_4] - [A]^T [N][\Psi_5])[v_{i,j,k+1} - v_{i,j,k-1}] \\
&+ \mu([\alpha\beta_5] - [A]^T [N][\Psi_7])[u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k-1}] \quad (7.b)
\end{aligned}$$

여기서 사용한 기호의 정의는 부록에 수록하였다.

### 3.3 임의의 자유경계면에 대한 적용

전술한 바와 같이 경계면에서 발생하는 3개의 가상점은 차분식을 적용하는 구조체의 면 방향에 따라 전진 또는 후진차분법의 조합으로 순차적으로 소거해야 한다. 이와 같은 3차원 구조체 전체에서 각 경계면에 대한 차분식의 적용을 정리하면 그림 4와 표 1로 나타낼 수 있다. 그림 4에서 기호 S는 면을 이루는 모서리 부분 번호를 의미한다. 표 1은 각 꼭지점과 모서리 부분이 자유경계인 경우, 발생하는 가상점과 연계항에 적용하는 전진, 후진, 중앙 차분식의 적용과 가상점 소거를 위해 사용되는 응력 관계를 정리한 것이다. 또, 표 2는 만나는 두 면이 자유경계인 경우에 대한 가상점 및 적용되는 차분식을 나타낸다. 표 1~2와 같이 3차원 요소의 자유단에서의 경계조건처리는 각 면과 모서리에 대하여 가상점과 연계항에서의 차분식 적용, 가상점 소거를 위하여 관계되는 응력항에 의하여 결정된다. 한 면과 한 모서리에 적용된 경계조건은 나머지 면과 모서리에 대해서도 방향에 따라 규칙성을 가진 동일한 방법으로 정식화하여 적용할 수 있다.

표 1. 각 자유경계면에서의 차분식 적용

경 계 면	가상점	연계항에 대한 차분적용			각자유면에서의 응력
		i-j	j-k	i-k	
S-1,3,6,10	i-1,j,k	F-C	C-C	F-C	$\sigma_1, \sigma_5, \sigma_6$
S-3,4,7,11	i,j+1,k	C-B	B-C	C-C	$\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6$
S-2,4,8,12	i+1,j,k	B-C	C-C	B-C	$\sigma_1, \sigma_5, \sigma_6$
S-1,2,5,9	i,j-1,k	C-F	F-C	C-C	$\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6$
S-5,6,7,8	i,j,k-1	C-C	C-B	C-B	$\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$
S-9,10,11,12	i,j,k+1	C-C	C-F	C-F	$\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$

표 2. 공유하는 두 모서리에서의 차분식 적용

위치	발생 가상점	연계항처리			발생 응력
		i-j	j-k	i-k	
S-1	(i-1,j,k),(i,j-1,k)	FF	FC	FC	$(\sigma_1, \sigma_5, \sigma_6)$ $(\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6)$
S-2	(i+1,j,k),(i,j-1,k)	BF	FC	BC	$(\sigma_1, \sigma_5, \sigma_6)$ $(\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6)$
S-3	(i-1,j,k),(i,j+1,k)	FB	BC	FC	$(\sigma_1, \sigma_5, \sigma_6)$ $(\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6)$
S-4	(i+1,j,k),(i,j+1,k)	BB	BC	BC	$(\sigma_1, \sigma_5, \sigma_6)$ $(\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6)$
S-5	(i,j-1,k),(i,j,k-1)	CF	FF	CF	$(\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6)$ $(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$
S-6	(i-1,j,k),(i,j,k-1)	FC	CF	FF	$(\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6)$ $(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$
S-7	(i,j+1,k),(i,j,k-1)	CB	BF	CF	$(\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6)$ $(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$
S-8	(i+1,j,k),(i,j,k-1)	BC	CF	BF	$(\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6)$ $(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$
S-9	(i,j,k+1),(i,j-1,k)	CF	FB	CB	$(\sigma_1, \sigma_5, \sigma_6)$ $(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$
S-10	(i-1,j,k),(i,j,k+1)	FC	CB	FB	$(\sigma_1, \sigma_5, \sigma_6)$ $(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$
S-11	(i,j+1,k),(i,j,k+1)	CB	BB	CB	$(\sigma_1, \sigma_5, \sigma_6)$ $(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$
S-12	(i+1,j,k),(i,j,k+1)	BC	CB	BB	$(\sigma_1, \sigma_5, \sigma_6)$ $(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$

( F : forward , C : central , B : backward )

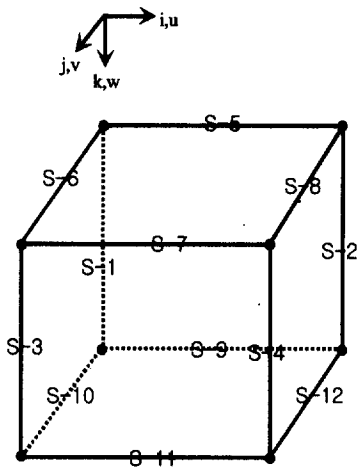


그림 4. 3차원 탄성체 각 면 및 모서리 위치 정의





$$X^S = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_k \end{bmatrix}_{3(i-1)(j-2)(k-2)} \quad F^S = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \vdots \\ \bar{F}_k \end{bmatrix}_{3(i-1)(j-2)(k-2)}$$

한 면이 자유단을 가지는 경우, 3차원 구조체의 전체 시스템 매트릭스의 크기는  $\{(i-1)(j-2)(k-2) \times 3\}^2$ 이며 식 (14)와 같이 역행렬을 구함으로써 각 분할 절점에서의 처짐을 구할 수 있다.

$$X^S = R^{-1}F^S \quad (14)$$

식 (14)에 의하여 미지의 처짐이 구해지면 응력과 변위의 관계식 식 (1.a)를 중앙차분함으로서 구할 수 있다. 여기서 내부점에 대해서는 중앙차분식을, 경계점에 대해서는 전진차분식, 또는 후진 차분식을 병용하였다.

## 4. 수치 예제

### 4.1 2차원 해석과의 비교

본 논문에서 제시한 경계조건 처리기법을 사용한 해석결과는 그림 5는 4번 고정 두꺼운 판으로 모델링한 2차원 해석과의 결과와 비교하였다. 본 논문에서는 표 3과 같은 3개의 물성을 사용하였다. 또한 두꺼운 판의 길이/두께는  $a/h$ 로 표시하였다. 그림 5는 분할 절점수 증가에 따른 23평면에서의 중앙처짐을 비교한 것이다.

표 3. 재료 성질에 따른 물성

	등방성	직교이방성	비등방성
E1	2500	2500	2500
E2	2500	100	100
E3	2500	100	100
G12	1250	50	50
G23	1250	20	20
G13	1250	50	50
$\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$	0	0.25	0.25
재료축각도	0°	0°	0°~90°

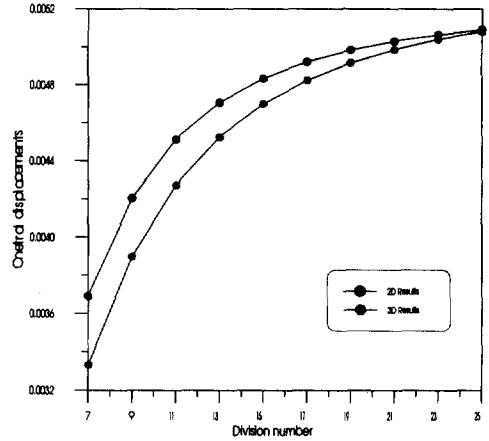


그림 5. 분할 절점에 따른 2차원해석과의 비교  
(등방성, 23-plane,  $a/h=5$ ,  $\bar{u} = uE_2t^3/qa^4$ )

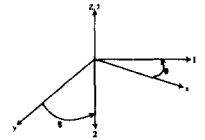


그림 6. 3차원 구조체 전체 변위형상

그림 6은 마주 보는 두 면에 자유경계이고 나머지 4면이 고정경계인 경우에 대하여 구조체 전체 변위 형상을 도시한 것이다.

### 4.2 물성변화에 따른 분석

그림 7은 탄성계수비 변화에 따른 처짐 및 응력에 대한 것이다. 그림 7.a는 재료축 각도가 60도인 경우에 대하여 탄성계수비 변화에 따른 3방향으로의 처짐을 무차원화한 것이다. 그림 7.b~7.d는 탄성계수비의 변화에 따른 1방향 깊이로 각 수직 응력을 나타낸 것이다. 결과에 의하면 수직 응력은 깊이가 깊어짐에 따라 거의 비슷한 응력 상태를 보였다.  $\sigma_1$ 의 경우는 깊이에 따라 어

는 정도 일정한 상태를 보였고,  $\sigma_2$ 는 약 1/2 깊이부터는 1방향 탄성계수의 값에 거의 영향을 받지 않았으며  $\sigma_3$ 는 약 3/4 깊이부터 일정한 값을 가지는 것으로 나타났다. 이러한 비등방성 3차원 구조체의 응력 상태는 재료축 각도에 따라 민감하므로 구조축과 재료축 사이의 관계에 따른 상세거동 규명이 필요로 된다.

그림 7.e는 재료축 각도를  $0^\circ \sim 90^\circ$ 까지  $15^\circ$ 간격으로 증가시켰을 경우, 탄성계수비 변화에 따른 구조체의 1방향 최대 중앙처짐  $u$ 를 비교한 것이다. 그림 7.e의 결과에 의하면 전체적 처짐은 재료축 각도가  $15^\circ \sim 30^\circ$ 구간에서 최소 처짐을 보이

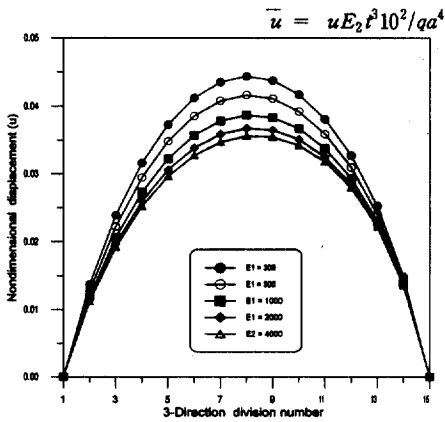


그림 7.a 탄성계수비 변화에 따른 무차원 처짐 ( $u$ ) (비등방성, 재료축 각도  $60^\circ$ )

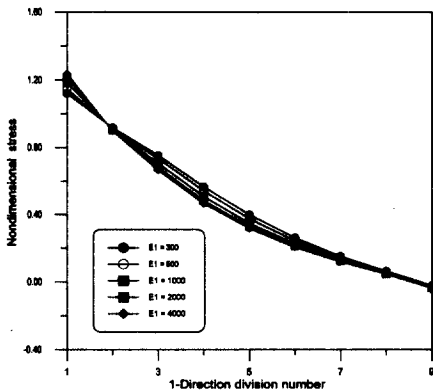


그림 7.b 탄성계수비 변화에 따른 응력 ( $\sigma_1$ ) (비등방성, 재료축 각도  $60^\circ$ ,  $\sigma_1 10/qa$ )

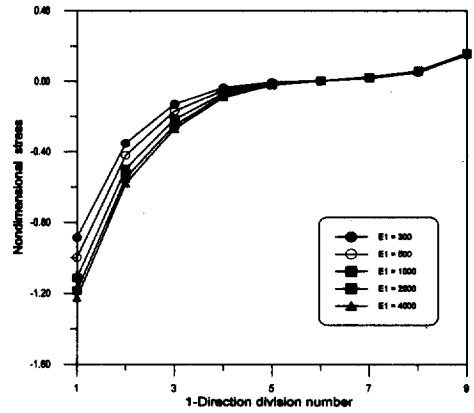


그림 7.c 탄성계수비 변화에 따른 응력 ( $\sigma_2$ ) (비등방성, 재료축 각도  $60^\circ$ ,  $\sigma_2 10/qa$ )

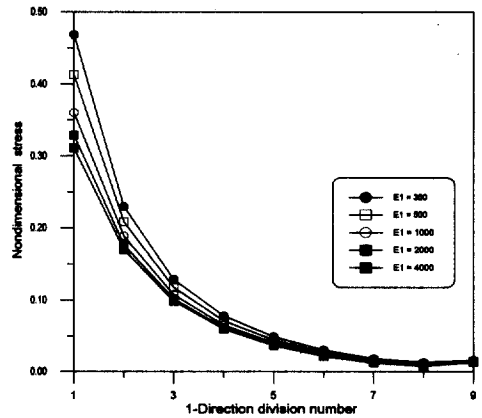


그림 7.d 탄성계수비 변화에 따른 응력 ( $\sigma_3$ ) (비등방성, 재료축 각도  $60^\circ$ ,  $\sigma_3 10/qa$ )

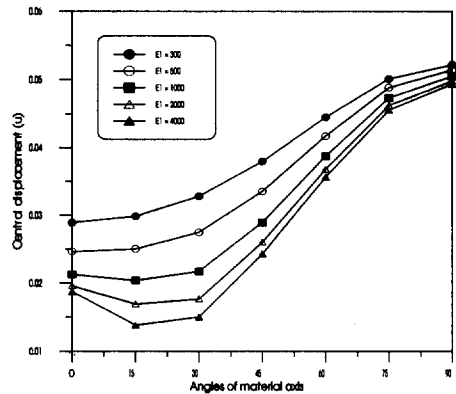


그림 7.e 탄성계수비와 재료축 각도변화에 따른 처짐 비교

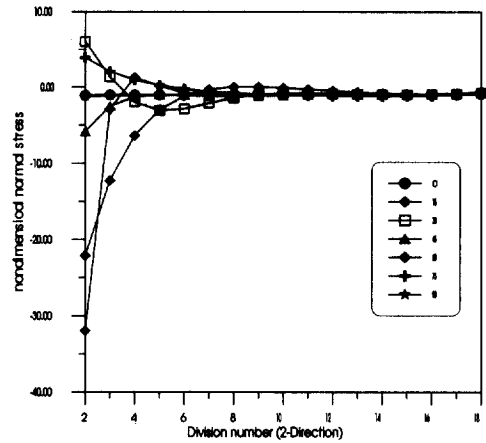
며 그 이상의 각도부터 점차 처짐이 증가하는 경향을 보였다. 또한 1방향 탄성계수가 증가할수록 강성이 증가하여 처짐은 상대적으로 작았으며 재료축 각도 변화에 따라 일정한 차이를 보임을 알 수 있었다.

### 4.3 두 면이 자유단인 경우의 분석

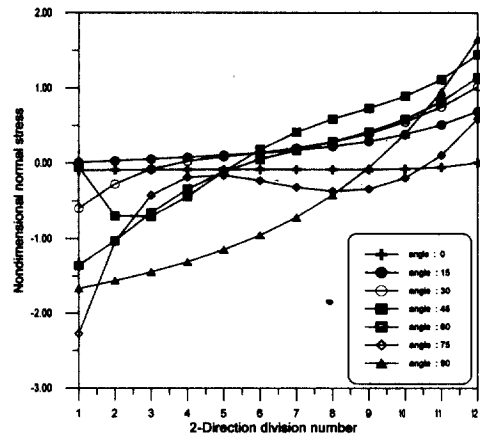
그림 8.a는 두 자유면에서의 변위분포를 등고선으로 나타낸 것이다. 또 그림 8.b는 45°의 재료축 각도를 가지는 경우에 대한 두 자유면에서의 변위 형상이다. 그림 8.a~b와 같이 공유하는 두 자유면에서는 변위의 변화가 크게 발생함을 알 수 있다. 또한, 본 논문에서는 인접하는 두 면이 자유단을 가지는 경우에 대하여 재료축 각도 변화에 따른 2방향 응력을 분석하였다. 재료축 각도는 0°~90°까지 15°간격으로 하였으며 나머

그림 8.a 두 자유면에서의 변위 분포 ( 0° )

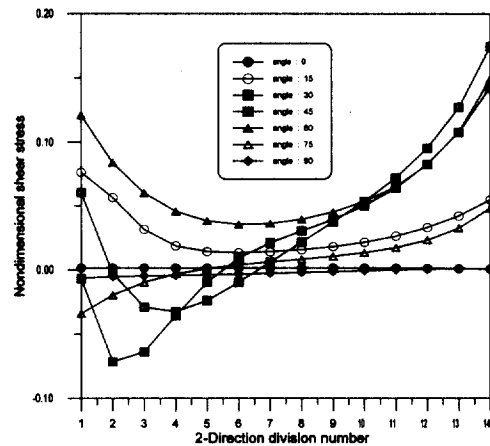
그림 8.b 두 자유면에서의 변위 형상 ( 45° )



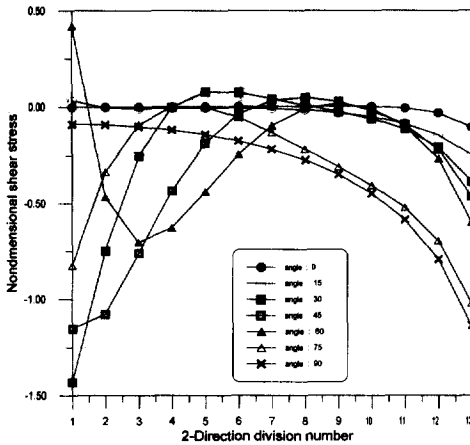
(a) 2방향으로의 수직응력 분포(  $\sigma_1 10/qa$  )



(b) 2방향으로의 수직응력 분포(  $\sigma_4 10/qa$  )



(c) 2방향으로의 전단응력 분포(  $\sigma_5 10/qa$  )



(d) 2방향으로의 전단응력 분포 ( $\sigma_6 10/qa$ )

그림 9. 공유하는 두 자유면에서의 2방향으로의 응력 분포 (재료축각도  $0^\circ \sim 90^\circ$ )

지 물성은 모두 동일하다. 그림 9는 이러한 2면이 자유단인 3차원 구조체의 응력을 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 두 면이 자유단인 경우는 재료축 각도에 따라 매우 큰 응력 차이를 보였다. 특히 두 면이 만나는 모서리 부분에서의 응력은 각도변화에 따라 상이하며 약  $45^\circ$ 를 중심으로 역대칭 값을 가지는 것으로 나타났다.

## 5. 결론

본 논문에서는 임의의 자유면을 갖는 일반화된 비등방성 3차원 구조체의 해석을 수행하였다. 본 논문의 특징은 21개의 독립된 공학상수를 모두 사용한 일반화된 비등방성 3차원 탄성체의 지배방정식을 유도하였으며 임의의 경계조건에 대한 해결방식을 제시한 점이다. 본 연구는 자유경계면에 대한 차분식의 전개과정에서 불가피하게 발생하는 가상점에 대하여 응력과 변위의 관계에 의한 소거방식을 제시하였다. 또한 본 논문에서는 각 방향 자유경계면에 대하여 적용 가능한 일반 자유경계 해결기법을 제시하였다. 수치예제에서, 2차원 해석과 본 논문의 3차원 해석 결과를 비교하면, 3차원 해석 결과치가 다소 작게 나타났으

며 분할 절점수 변화에 따라 거의 일정한 비율의 처짐 오차를 보였다. 탄성계수비의 변화에 따른 응력 분석은 일방향 탄성계수의 증가에 따라 1방향으로 감소하는 경향을 보였으며, 그 차이는 탄성계수비의 증가에 반비례하였다. 또한 공유하는 두 자유면에 대한 분석은 공유하는 모서리부분에서 등방성, 직교이방성, 비등방성에 따라 응력의 변화가 매우 상이함을 알 수 있었다.

결론적으로 본 논문은 기존의 해석적 방법으로 접근할 수 없는 일반화된 비등방성 3차원 구조체의 복잡한 지배방정식에 대하여 유한차분법을 적용한 개선된 자유경계처리방식을 제시하였다. 이러한 방식을 적용한 수치해석 결과들은 비등방성 3차원 구조체의 다양하고 복잡한 역학적 거동을 규명하는데 도움이 될 것으로 기대된다.

## 참고 문헌

- (1) 장석윤, 유철수, "The Stress Distributions of a Partial Uniform Load Applied to Timber," 11th Congress Vienna, IABSE, Sep., 1980.
- (2) 장석윤, 박원태, "Analysis of Anisotropic Symmetric Laminated Curved Plates," 2nd Japan-Korea Joint Seminar on Steel Bridges, Tokyo Japan, pp. 265-276, 1992
- (3) 이상열, "비등방성 3차원 구조체의 해석," 서울 시립대학교 공학박사 학위논문, 2000.2
- (4) 이상열, 임성순, 장석윤, "유한차분법을 이용한 복합적층 원형곡선요소의 평면응력 문제연구," 한국강구조학회 논문집 제9권 1호, pp. 65-79, 1997
- (5) Lekhnitskiy, S. G., "Theory of elasticity of an anisotropic body," Moscow, 1950
- (6) S. F. NG and N. Bencharif, "A Finite Difference Computer Program for the Modelling of Thick Rectangular Plates," Computer & Structures Vol. 33 No.4 pp. 1011-1016, 1989
- (7) Reddy, J. N., "Mechanics of Laminated Composite Plates," CRC Press pp. 30-57, 1997

- (8) N. J. Pagano, "Interlamina Stress in Composite Laminates under Uniform Axial extension," J. Composite Material 4, 538, 1970
- (9) Szilard, R., "Theory and Analysis of Plates," Prentice-Hall, INC., pp. 161-169, 1974

### 부 록

식 (7.b)에서 정의한 기호는 다음과 같다.

$$[H] = [CC] - [A][\alpha][A]^T, \quad [A] = \begin{bmatrix} \bar{c}_{12} & \bar{c}_{25} & \bar{c}_{26} \\ \bar{c}_{14} & \bar{c}_{45} & \bar{c}_{46} \\ \bar{c}_{16} & \bar{c}_{56} & \bar{c}_{66} \end{bmatrix}$$

$$[\Psi_1] = \left( \begin{bmatrix} \bar{c}_{12} \\ \bar{c}_{14} \\ \bar{c}_{16} \end{bmatrix} - [A][\alpha\beta_1] \right) \frac{1}{\xi}$$

$$[\Psi_2] = \left( \begin{bmatrix} \bar{c}_{22} \\ \bar{c}_{24} \\ \bar{c}_{26} \end{bmatrix} - [A][\alpha\beta_2] \right)$$

$$[\Psi_3] = \left( \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \bar{c}_{23} \\ \bar{c}_{34} \\ \bar{c}_{36} \end{bmatrix} - \frac{\mu}{\xi} [A][\alpha\beta_3] \right)$$

$$[\Psi_4] = \left( \begin{bmatrix} \bar{c}_{24} \\ \bar{c}_{44} \\ \bar{c}_{46} \end{bmatrix} - [A][\alpha\beta_4] \right)$$

$$[\Psi_5] = \left( \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \bar{c}_{24} \\ \bar{c}_{44} \\ \bar{c}_{46} \end{bmatrix} - \frac{\mu}{\xi} [A][\alpha\beta_4] \right)$$

$$[\Psi_6] = \left( \begin{bmatrix} \bar{c}_{25} \\ \bar{c}_{45} \\ \bar{c}_{56} \end{bmatrix} - [A][\alpha\beta_5] \right) \frac{1}{\xi}$$

$$[\Psi_7] = \left( \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \bar{c}_{25} \\ \bar{c}_{45} \\ \bar{c}_{56} \end{bmatrix} - \frac{\mu}{\xi} [A][\alpha\beta_5] \right)$$

$$[\Psi_8] = \left( \begin{bmatrix} \bar{c}_{26} \\ \bar{c}_{46} \\ \bar{c}_{66} \end{bmatrix} - [A][\alpha\beta_6] \right) \frac{1}{\xi}$$

$$[\Psi_9] = \left( \begin{bmatrix} \bar{c}_{26} \\ \bar{c}_{46} \\ \bar{c}_{66} \end{bmatrix} - [A][\alpha\beta_6] \right)$$

$$[\alpha\beta_1] = [a] \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} \\ \bar{c}_{15} \\ \bar{c}_{16} \end{bmatrix}, \quad [\alpha\beta_2] = [a] \begin{bmatrix} \bar{c}_{12} \\ \bar{c}_{25} \\ \bar{c}_{26} \end{bmatrix}$$

$$[\alpha\beta_3] = [a] \begin{bmatrix} \bar{c}_{13} \\ \bar{c}_{35} \\ \bar{c}_{36} \end{bmatrix}, \quad [\alpha\beta_4] = [a] \begin{bmatrix} \bar{c}_{14} \\ \bar{c}_{45} \\ \bar{c}_{46} \end{bmatrix}$$

$$[\alpha\beta_5] = [a] \begin{bmatrix} \bar{c}_{15} \\ \bar{c}_{55} \\ \bar{c}_{56} \end{bmatrix}, \quad [\alpha\beta_6] = [a] \begin{bmatrix} \bar{c}_{16} \\ \bar{c}_{56} \\ \bar{c}_{66} \end{bmatrix}$$

(접수일자 : 2000년 2월 21일)