

역대칭 Angle-Ply 적층판의 변형에너지 특성에 관한 연구

Strain Energy Characteristics of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates

박 승 진¹⁾

Park, Sung Jin

요 약 : 두 변이 단순지지된 역대칭 Angle-Ply 적층판의 자유진동에 대하여 Yang, Norris, Stavsky의 YNS 이론을 이용하여, 적층판의 자유진동해석 및 변형에너지 해석을 하였다. 적층판의 운동방정식은 선점법을 사용하여 해석하였고, 탄성계수비와 적층수가 고유진동수에 미치는 영향을 검토하였다. 또한 변형에너지 분포 해석을 이용하여 적층판의 진동특성을 명확히 규명하였다.

ABSTRACT : A powerful analytical procedure and strain energy analysis to investigate the free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates, having one pair of opposite edges simply supported, are developed on the basis of the Yang, Norris and Stavsky(YNS) theory.

The equation of motion of the plate are solved by the use of collocation method. A range of results are presented for plates to show the effects of modulus ratio and number of layers on natural frequency. In addition, an analysis of the strain energy distributions is used as an aid for the better understanding of the vibration characteristics of the plates.

핵심용어 : 적층판, 선점법, 고유진동수, 변형에너지

KEYWORDS : laminated plates, collocation method, natural frequency, strain energy

1. 서론

적층판을 형성하고 있는 복합재료는 그것을 구성하고 있는 재료들 사이의 큰 강성의 차로 인하여 단일재료로서는 얻을 수 없는 큰 비강성과 비강도 등의 여러 가지 우수한 역학적 성질을 가지고 있기 때문에 구조물의 경량화를 요구하는 많은

공학 분야에서 널리 사용되고 있다.

여기서 말하는 강성 및 강도란 정적인 거동상태에서 얻어지는 역학적 특성으로서 복합층 구조 설계에 주로 반영되고 있고, 또한 최근 복합재료의 이용 분야가 보다 폭 넓게 요구됨에 따라 동적인 거동을 받는 구조물의 응용이 절실하게 요구되고 있다.

1) 정회원, 인천전문대학 토목과 부교수, 공학박사

본 논문에 대한 토의물 2001년 6월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

그러나 정적인 거동상태에서 역학적 성질이 우수한 복합재료가 반드시 동적인 거동에서도 우수하다고는 할 수 없으므로 동적인 거동상태에 적합한 역학적 특성을 찾아 이를 바탕으로 구조 설계를 하기 위하여서는 적층 구조 요소의 동역학적 성질의 규명이 필요 불가결하다. 따라서 본 연구에서는 층과 층사이를 강화제인 수지로 굳혀 형성한 역대칭 Angle-Ply 적층판의 동적 거동을 규명하기 위하여 자유진동 해석을 실시하였다.

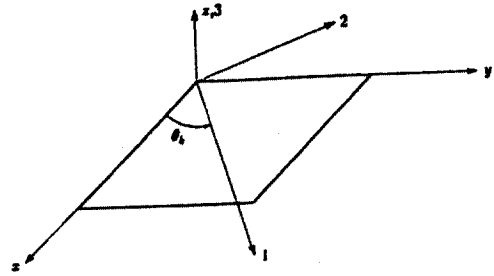


그림 1. 좌표축과 재료주축의 관계

최근 이 분야의 연구 동향은 Leissa, A. W.¹⁾와 Bert, C. W.²⁾의 문헌에서 자세히 기술되어 있다. 적층판은 강한 이방성을 보이며 박판인 경우 면내강성과 휨강성에 대한 면의 전단강도가 극히 작다는 것이 특징이다. 그 때문에 등방성에 대한 Mindlin 이론을 확장한 Yang, Norris, Stavsky의 1차 전단 변형이론 (YNS 이론)³⁾이나 전단 보정계수를 도입하지 않고 해석할 수 있는 보다 고차적인 이론의 연구도 보고되고 있지만, 이방성 적층판의 자유진동 특성에 대한 규명은 등방성 판에 비하여 아직 미흡한 편이다.

더욱이 해석 방법은 엄밀해로 구할 수 있는 4변 단순지지된 이방성 적층판의 경우를 제외하면 지금까지는 유한요소법⁴⁾이나 전달매트릭스법⁵⁾ 등의 근사 해법이 주로 보고되고 있는 실정이고, 보다 정확한 해를 구할 수 있는 해석방법이 요구되고 있다. 이에 본 연구는 마주보는 2변이 단순지지이고, 다른 2변이 임의지지인 역대칭 Angle-Ply 적층판을 대상으로 하여 선점법(Collocation Method)의 자유진동 문제의 적용성 검토와 진동 특성을 변형 에너지와 연관시켜 휨-신장 강성이 자유진동 특성에 미치는 영향을 명확히 규명하고자 한다.

2. 기초 방정식

그림 1과 같이 일정한 두께 h 를 갖는 균일한 직교 이방성 재료로 구성된 적층판의 중앙면에 직교 좌표 (x, y, z) 를 형성하였다. 재료의 직교 이방성

주축을 (1,2,3)으로 표시하였고, 주축 3은 z 축에 평행하도록 배치하였으며, 주축 1과 2는 x 축과 y 축에 대하여 각각 경사각 θ (ply 배향각)을 갖도록 하였다.

여기서, 역대칭(Anti-symmetric)란 판은 중앙면에 대해서 대칭이 되지 않고 x, y 에 대해서 회전 대칭한 적층구성을 말한다. Angle-Ply란 그림 2과 같이 x 축에 대해서 섬유방향이 $+\theta, -\theta$ 방향으로 오도록 단층판을 겹친 것이며, 적층판의 적층순서(4층인 경우)는 그림 3과 같다. 그림에서 배향각 θ 의 단층판을 4장 겹쳐진 역대칭 Angle-Ply는 밑에서 차례로 $+\theta, -\theta, +\theta, -\theta$ 로 배열되어 있으며 이것을 $(+\theta/-\theta/+\theta/-\theta)$ 로 표기하였다.

YNS 이론³⁾에 따르면 역대칭 Angle-Ply 적층판의 기초 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - P \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - R \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - P \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - R \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - P \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x - I \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y - I \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} - R \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

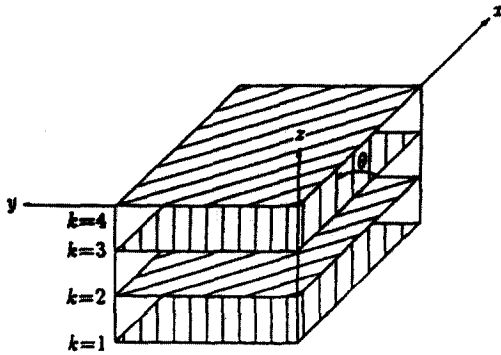


그림 2. 역대칭 Angle-Ply 적층판

여기서, $(u, v, w) = (x, y, z$ 방향의 변위 성분), $(\psi_x, \psi_y) = (x-z, y-z$ 평면의 회전 각 성분), $(N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y) =$ 합응력, $(M_x, M_y, M_{xy}) =$ 합모멘트이고, P, R 과 I 은 밀도를 ρ 로 표시하면 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$(P, R, I) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho dz \quad (6)$$

Angle-Ply 적층판의 선형탄성 변형을-변위 방정식과 대칭성을 고려한 구성 관계식으로부터 단위 길이당 합응력 및 합모멘트 식을 구하면 다음과 같다.

$$N_x = A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{16} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$N_y = A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{26} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$N_{xy} = A_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{16} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad (9)$$

$$M_x = B_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{11} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad (10)$$

$$M_y = B_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad (11)$$

$$M_{xy} = B_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + D_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \quad (12)$$

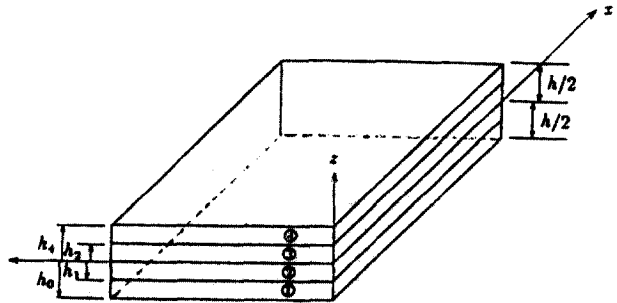


그림 3. 적층판의 적층 순서

단, A_{ij} 는 신장강성, B_{ij} 는 휨-신장 연성강성, D_{ij} 는 휨강성으로 다음과 같이 나타낸다.

$$A_{ij} = K_{ij}^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz \quad (i, j=4, 5) \quad (13)$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) Q_{ij} dz \quad (i, j=1, 2, 6) \quad (14)$$

여기서, K_{ij}^2 는 전단보정계수이고, Q_{ij} 는 ply 배향각, 탄성계수, 포아송비, 전단탄성계수에 의존하는 탄성정수로서 식(15)와 같다.

$$[Q] = \begin{bmatrix} \lambda E_1 & \lambda \nu_{12} E_2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda \nu_{21} E_1 & \lambda E_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K^2 G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K^2 G_{12} \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서, E_1, E_2 는 재료주축 (1, 2)방향의 탄성계수, ν_{12}, ν_{21} 은 포아송비, G_{12}, G_{13}, G_{23} 은 전단탄성계수 $\lambda = (1 - \nu_{12} \nu_{21})^{-1}$, $K^2 = 5/6$ 이다.

식(7~12)를 식(1~5)에 대입하면 Angle-Ply 적층판의 기초 미분 방정식을 변위성분만으로 나타내면 다음과 같다.

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_{16} \left[2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right] + A_{66} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] - B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - P \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - R \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} = 0 \quad (16.1)$$

$$A_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + B_{26} \left[\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right] + A_{66} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - P \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - R \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} = 0 \quad (16.2)$$

$$A_{55} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x} \right] + A_{44} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] - P \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (16.3)$$

$$B_{16} \left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_{66} \left[\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right] - A_{55} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right] - I \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} - R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (16.4)$$

$$B_{26} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_{66} \left[\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right] - A_{44} \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right] - I \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} - R \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (16.5)$$

$x=0$ 과 $x=a$ 에서 단순지지의 경계조건은 다음과 같다.

$$u = w = \phi_y = N_{xy} = M_x = 0 \quad (17)$$

$y=0$ 과 $y=b$ 에서 임의의 경계조건은 다음과 같다.

$$\text{고정(C)} : u = v = w = \phi_x = \phi_y = 0 \quad (18)$$

$$\text{자유(F)} : N_y = N_{xy} = Q_y = M_y = M_{xy} = 0 \quad (19)$$

$$\text{단순지지(S)} : v = w = \phi_x = N_{xy} = M_y = 0 \quad (20)$$

합용력(식(7~12))과 변형률·변위 관계식으로 부터 변형에너지 (U)를 구하면 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2A_{44} \frac{\partial w}{\partial y} \phi_y + 2A_{55} \frac{\partial w}{\partial x} \phi_x + A_{55} \phi_x^2 + A_{44} \phi_y^2 + 2B_{16} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + 2B_{26} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + 2B_{26} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + 2B_{26} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + 2B_{16} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + 2B_{16} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2B_{26} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + 2B_{26} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + D_{11} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + D_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + 2D_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + D_{22} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 + D_{66} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 \right] dA \quad (21)$$

3. 해석 방법

$x=0, a$ 에서 식(17)의 조건을 만족하는 변위 함수로서 Levy 형의 다음 식을 사용한다.

$$u(x, y, t) = hU(\eta) \cdot \sin m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \quad (22)$$

$$v(x, y, t) = hU(\eta) \cdot \cos m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \quad (23)$$

$$w(x, y, t) = hU(\eta) \cdot \sin m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \quad (24)$$

$$\psi_x(x, y, t) = X(\eta) \cdot \cos m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \quad (25)$$

$$\psi_y(x, y, t) = Y(\eta) \cdot \sin m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \quad (26)$$

여기서, ω = 고유원진동수, m = x 방향의 반파수, $\xi = x/a$, $\eta = y/b$.

3.1 변형에너지의 산정 방법 및 정도

변위 성분으로 표시된 역대칭 Angle-Ply 적층판의 변형에너지 (U)는 식(22)~식(26)을 식(21)에 대입하면 다음과 같다.

$$U = \frac{h^3 E_2}{4} e^{i(2\omega t)} U^* \quad (27)$$

여기서, U^* 는 무차원화 된 전체 변형에너지로 다음과 같이 3가지의 변형에너지로 나누어 나타낼 수 있다.

$$U^* = U_1^* + U_A^* + U_S^* \quad (28)$$

역대칭 Angle-Ply 적층판에서는 U_1^* 는 강성 \bar{A}_{11} , \bar{A}_{12} , \bar{A}_{22} , \bar{A}_{66} , \bar{D}_{11} , \bar{D}_{22} 및 \bar{D}_{66} 에 관계되는 변형에너지이고, U_A^* 는 \bar{B}_{16} 및 \bar{B}_{26} 를 나타내고, 이방성의 영향을 나타내는 변형에너지 U_S^* 는 \bar{A}_{44} 및 \bar{A}_{55} 에 관계하는 전단변형에

너지를 나타내며 식(28)에 대한 성분은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} U_1^* = \int_0^1 \left[(m\pi)^2 \frac{b}{a} \bar{A}_{11} F_1^2(\eta) \right. \\ + 2m\pi \bar{A}_{12} F_1(\eta) F_2'(\eta) \\ + \bar{A}_{66} \left\{ \frac{a}{b} F_1'^2(\eta) + (m\pi)^2 \frac{b}{a} F_2^2(\eta) \right. \\ - 2(m\pi) F_1'(\eta) F_2(\eta) \left. \right\} + \frac{a}{b} \bar{A}_{22} F_2'^2(\eta) \\ + (m\pi)^2 \frac{b}{a} \bar{D}_{11} F_4^2(\eta) + \frac{a}{b} \bar{D}_{22} F_5'^2(\eta) \\ + \bar{D}_{66} \left\{ \frac{a}{b} F_4'^2(\eta) \right. \\ \left. + (m\pi)^2 \frac{b}{a} F_5^2(\eta) 2m\pi F_4'(\eta) F_5(\eta) \right\} \Big] d\eta \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_A^* = \int_0^1 \left[2 \bar{B}_{16} \{ m\pi F_1(\eta) F_4'(\eta) \right. \\ + (m\pi)^2 \frac{b}{a} F_1(\eta) F_5(\eta) + m\pi F_1'(\eta) F_4(\eta) \\ + (m\pi)^2 \frac{b}{a} F_2(\eta) F_4(\eta) \left. \right\} \\ + 2 \bar{B}_{26} \left\{ \frac{a}{b} F_1'(\eta) F_5'(\eta) - m\pi F_2(\eta) \right. \\ \left. + \frac{a}{b} F_2'(\eta) F_4'(\eta) - m\pi F_2'(\eta) F_5(\eta) \right\} \Big] d\eta \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_S^* = \int_0^1 \left[\bar{A}_{44} \left\{ \frac{a}{b} F_3'(\eta)^2 + \frac{ab}{h^2} F_4^2(\eta) \right. \right. \\ + 2 \frac{a}{h} F_3'(\eta) F_5(\eta) \left. \right\} + \bar{A}_{55} \left\{ \frac{b}{a} (m\pi)^2 F_3^2(\eta) \right. \\ \left. + \frac{ab}{h^2} F_4^2(\eta) + 2 \frac{b}{h} m\pi F_3(\eta) F_4(\eta) \right\} \Big] d\eta \quad (31) \end{aligned}$$

여기서, $(\prime) = d(\)/d\eta$.

식(29)~식(31)의 적분은 고유치 해석의 결과로 얻어지는 고유모드 $F_i(\eta)$ [$i = 1 \sim 5$]를 이용하면 구할 수 있지만, 본 논문에서는 계산의 간편성에서 선점을 사용하고 직교다항식의 영점을 표본점(분점)으로 하는 다음 보간형 적분을 이용한다.

피적분 함수를 $f(\eta)$ 로 나타내면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_0^1 f(\eta) d\eta = \sum_{i=0}^{M+1} W_e(i) f(\eta_i) \quad (32)$$

여기서, W_e 는 가중을 나타내고 표본점 수 M (내부 선점수)은 다음과 같다.

$M=1$ 일 때 :

$$W_e(0) = W_e(2) = \frac{1}{6}, \quad W_e(1) = \frac{2}{3} \quad (33)$$

$M \geq 2$ 일 때 :

$$W_e(0) = W_e(M+1) = 0 \quad (34)$$

$$W_e(i) = \frac{1}{\eta_i(1-\eta_i) \{P_M^*(\eta_i)\}^2} \quad (i=1 \sim M) \quad (35)$$

특히, $M \geq 2$ 에서 식(35)의 가중은 Gauss-legendre 적분 공식의 1/2의 가중값에 해당된다. 식(29)~식(31)에서 알 수 있듯이, 피적분 함수에 고유모드 $F_i(\eta)$ [$i=1 \sim 5$]의 η 에 관한 1계 미분 $F_i'(\eta)$ 가 포함되어 있지만, 선점 및 끝점에서 1차 미분계수는 고유치 해석에서 고유모드 값을 사용한다.

4. 해석 예

고유진동수 특성을 보다 쉽게 이해하기 위해서는 변형에너지 해석이 유효하다고 생각된다. 여기서는 에너지 해석을 통하여 ① 적층판 재료의 재료특성, ② 각 층의 배향각 및 적층수, ③ 판두께비, ④ 경계조건이 변형에너지에 미치는 영향을 검토하고 적층판의 진동특성에 미치는 전단변형 및 이방성의 영향을 검토한다.

적층판의 기본적인 재료 특성으로는 다음과 같다.

$$\frac{E_1}{E_2} = 40, \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2,$$

$$G_{23} = 0.5E_2, \quad \nu_{12} = 0.25$$

전단보정계수는 $K_{44}^2 = K_{55}^2 = 5/6$, 판두께비 $a/h = 10$, 배향각 (θ) = 45° 로 하고 선점수 $M = 13$ 을 이용했다⁶⁾.

4.1 해석방법의 정도

표 1은 적층수 $N=2, 6$ 의 역대칭 Angle-Ply 정방형 적층판의 기본 고유진동수에 대한 전 변형에너지 ($4U^*/E_2h^3$)을 본 산정법[식(32)]과 Navier 해에 의한 엄밀해와 비교한 것으로 배향각 θ 를 각각 변화시킨 역대칭 Angle-Ply 적층판의 결과를 나타낸 것이다. 본 해석법은 선점수 $M=13$ 을 이용하고 고유모드는 판 중앙 ($\xi = \eta = 1/2$)에서 판두께 방향 변위 F_3 을 기준으로 하였다.

표에서 알 수 있듯이 적층수에 관계없이 엄밀해와 완전히 일치하고 있다. 본 산정법에 의한 값은 선점과 끝점을 표본점으로 하고, 이에 대응하는

표 1. 변형에너지 ($4U^*/E_2h^3$) 정도의 검토
(4변 단순지지, $E_1/E_2 = 40$, $a/h = 10$)

배향각	N=2		N=6	
	선점법	엄밀해	선점법	엄밀해
0°	0.2729	0.2729	0.2729	0.2729
10°	0.2266	0.2266	0.2960	0.2960
20°	0.1995	0.1995	0.3569	0.3569
30°	0.2050	0.2050	0.4183	0.4183
40°	0.2148	0.2148	0.4537	0.4537
50°	0.2148	0.2148	0.4537	0.4537
60°	0.2050	0.2050	0.4183	0.4183
70°	0.1995	0.1995	0.3569	0.3569
80°	0.2266	0.2266	0.2960	0.2960
90°	0.2729	0.2729	0.2729	0.2729

함수값을 유한화 형태로 근사 계산을 하였으며, 표에서 보이는 바와 같이 충분한 정도를 가지고 있는 것을 알 수 있다. 이것은 선점법에 의해 구해지는 고유모드의 정도도 아주 양호하다는 것을 시사한다.

4.2 배향각 θ 와 판두께비 a/h 가 기본 고유진동수에 미치는 영향

역대칭 Angle-Ply 적층판이 기본고유진동수에 미치는 영향은 문헌7)에서 자세히 기술된 관계로, 본 논문에서는 주로 전단변형의 영향에 대해서 살펴보기로 한다.

그림 4, 5는 4변이 단순지지된 역대칭 Angle-Ply 적층판의 적층수 $N=2, 4, 6, \infty$ 일 때 배향각 θ , 판두께비 a/h 에 대한 기본고유진동수 Ω 의 변화를 나타낸 것이다.

그림에서 보는 바와 같이 $\Omega-\theta$ 곡선 형상은 적층수 $N=2$ 을 제외하면 고유진동수는 배향각 $\theta \leq 45^\circ$ 까지는 θ 의 증가와 함께 증가하지만, $\theta > 45^\circ$ 에서는 역으로 감소하고 있다. 이와 같이 적층수 $N=2$ 와 적층수 $N=4, 6, \infty$ 일 때 곡선의 형

상이 크게 차가 생기는 것은 면내변형의 수렴에 미치는 영향이라 생각된다.

그림 5는 판두께비 a/h 의 기본고유진동수에 미치는 영향을 적층수 $N=2, 4, 6, \infty$ 에 대해서 나타낸 것이다. 이 그림에 의하면 기본고유진동수는 경계조건에 관계없이 판두께비 a/h 의 증가와 함께 단순히 증가하고 있고, 즉 판두께가 증가하면 전단변형의 영향에 의해 고유진동수의 감소가 커다는 것을 알 수 있다. 고유진동수의 증가는 적층수 $N=2$ 와 적층수 $N=4, 6, \infty$ 일 때 현저한 차를 나타내는데 이는 주로 전단변형의 영향에 의한 것이다.

그림에서 알 수 있듯이 적층수의 감소와 함께 연성강성의 영향이 크게 나타나고 진동수도 감소한다는 것을 이해할 수 있고, 진동수 저하의 정도는 배향각을 변화시켰을 때는 $N=6$ 에서 2%, $N=4$ 에서 5%, $N=2$ 에서 33%, 판두께비를 변화시켰을 때는 각각 3%, 6%, 33%이다. 더구나 이 저하의 정도는 파라미터(배향각, 판두께비)에 그다지 의존하지 않는다.

따라서, 본 논문은 이러한 적층수에 대한 변화를 변형에너지를 통하여 명확히 알아보기로 한다.

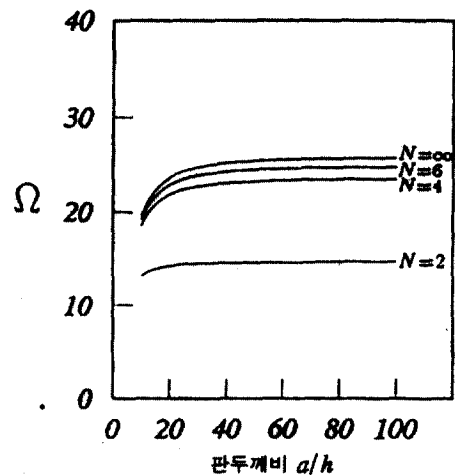
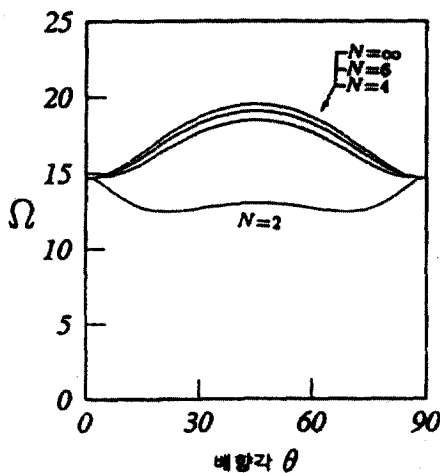


그림 4.5. 기본 고유진동수에 미치는 배향각 및 판두께비의 영향

4.3 전변형에너지 (U^*)

그림 6, 7은 각각 적층수 $N=2, 6$ 일 때 전변형 에너지 U^* 에 미치는 배향각 θ , 판두께비 a/h 의 영향을 6종류의 경계조건에 대해서 나타낸 것이다. 이 그림에서 다음과 같은 점을 알 수 있다.

- ① 배향각의 변화에 대한 전변형에너지 U^* 의 변동은 경계조건이나 적층수에 큰 영향을 받는다. 배향각을 고정하면 전변형에너지는 경계조건이 고정(C)와 단순(S)의 구성에서는 단순-단순(SS)이 최소가 되고 경계조건이 자유(F)를 포함한 경우는 자유-자유(FF)가 최소가 된다. 변형에너지가 최소에서 강성이 최대가 되기 때문에 적층판에서는 배향각의 결정이 극히 중요한 의미를 가진다는 것을 알 수 있다.
- ② 판두께비 a/h 의 변화에 의한 전변형에너지 U^* 는 판두께비가 작아질수록 감소하고 $a/h \geq 100$ 에서는 거의 일정치를 나타낸다. 또 $a/h \leq 100$ 에서의 전변형에너지 변화의 비율은 적층수가 클수록 경계조건이 고정-고정(CC)에서 현저하게 나타난다.

4.4 휨-신장 연성에 의한 변형에너지 (U_A^*)

휨-신장 연성강성의 고유진동수 특성에 미치는 영향을 이방성 적층판일 때 나타낸 것으로 휨-신장 연성에 의한 변형에너지 U_A^* 와 전변형에너지 U^* 와의 비 U_A^*/U^* 를 이용하여 검토하기로 한다.

그림 8, 9는 적층수 $N=2, 6$ 인 경우 배향각 θ , 판두께비 a/h 의 U_A^*/U^* 에 미치는 영향을 본 것이다. 이들 그림에서 다음과 같은 것을 이해할 수 있다.

- ① U_A^*/U^* 는 파라메타 ($\theta, a/h$)을 변화시켰을 때 항상 부(-)의 값이 된다. 즉 이방성 항을

나타내는 \bar{B}_{16} 및 \bar{B}_{26} 을 무시하여 해석하면 강성이 과대 평가되어 고유 진동수가 과대하게 나타나는 것을 알 수 있다.

- ② 배향각의 변화에 대한 이방성의 영향은 경계조건이나 적층수에 의해 변화하지만 일반적인 경향으로서 배향각 $\theta \leq 45^\circ$ 까지는 강하게 나타나고 $\theta > 45^\circ$ 에서는 역으로 약하게 된다. 이와 같이 배향각에 의한 변화는 연성강성 ($\bar{B}_{16}, \bar{B}_{26}$)에서 이해할 수 있다. 더욱이 이방성에 대한 영향은 적층수에 크게 의존하고 적층수가 클수록 약해진다. 이방성의 영향은 경계조건에 크게 영향을 받아 고정(C)와 단순(S)의 구성에서는 SS, SC, CC의 순으로 되며 단순-단순(SS)에서 현저하게 나타난다. 자유(F)에서 이루어지는 구성에서는 FS, FC, FF의 순으로 영향이 나타난다.
- ③ 그림 10은 이방성의 영향에 미치는 적층수 N 에 대해서 살펴본 것으로, 이에 의하면 이방성은 적층수 N 의 증가와 함께 약해지고 $N \geq 8$ 에서 거의 영이 된다.

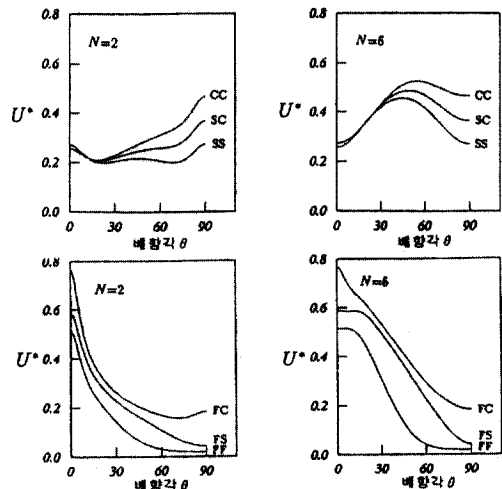


그림 6. 전변형에너지에 미치는 배향각의 영향 ($E_1/E_2 = 40, a/h = 10$)

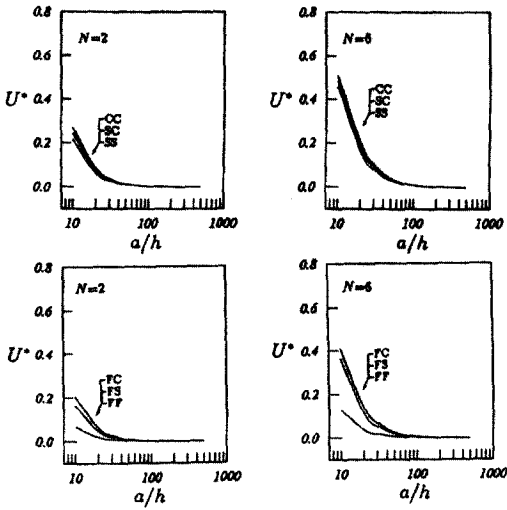


그림 7. 전변형에너지에 미치는 판두께비의 영향 ($E_1/E_2=40, \theta=45^\circ$)

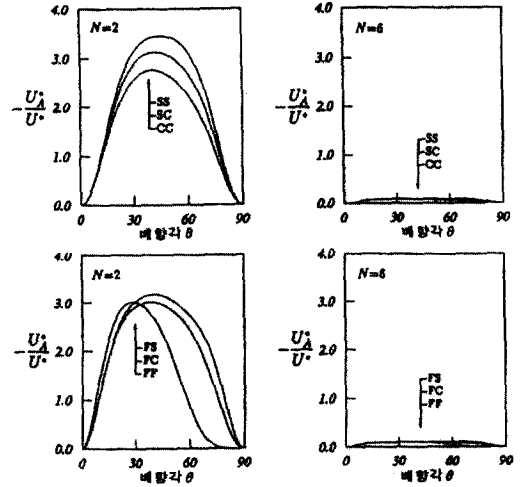


그림 8. 휨-신장연성이 변형에너지에 미치는 배향각의 영향 ($E_1/E_2=40, a/h=10$)

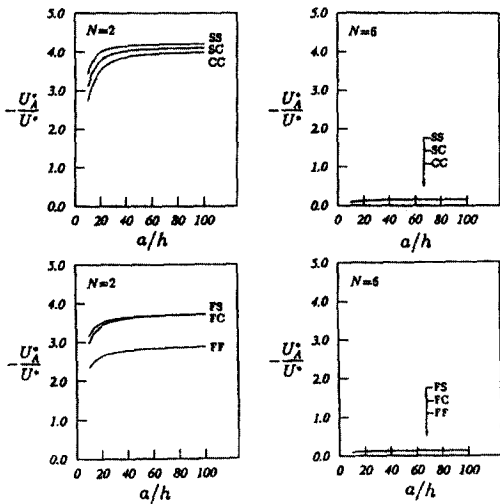


그림 9. 휨-신장연성이 변형에너지에 미치는 판두께비의 영향 ($E_1/E_2=40, \theta=45^\circ$)

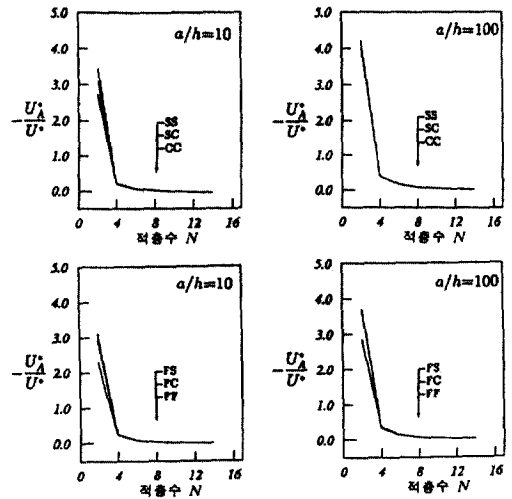


그림 10. 휨-신장연성이 변형에너지에 미치는 적층수의 영향 ($E_1/E_2=40, \theta=45^\circ$)

5. 결론

마주보는 2변이 단순지지이고 다른 2변이 임의 지지인 역대칭 Angle-Ply 적층판에 대해 고유진동문제의 해석수법으로서 선점법에 의한 수렴성과 타당성을 비교 검토하였다.

이 결과 구해지는 고유모드를 이용한 보간형 적분을 근거로 한 에너지 해석에 대해 살펴보고, 정방 적층판의 기본고유진동수 특성 및 변형에너지 특성 파악을 위한 수치해석을 하였다.

① 적층판의 고유진동해석에서 전단변형의 영향은 이방성 정도의 영향을 연성강성만으로 나

- 타내는 변형에너지 U_A^* 와 전변형에너지 U^* 의 비 U_A^*/U^* 가 아주 유효하다는 것을 알 수 있다.
- ② 역대칭 Angle-Ply 적층판에 대해서는 전단변형은 배향각의 변화에 크게 의존한다. 더욱이 배향각의 변화에 의한 이방성 정도는 배향각의 증가와 함께 약해지고 $\theta \geq 45^\circ$ 에서는 강해진다.
 - ③ U_A^*/U^* 는 각종 파라메타(배향각 θ , 판두께비 a/h)에 대해 항성 부(-)의 값이 된다. 즉 연성강성을 무시하여 해석하면 강성을 과대히 평가하게 되어 고유진동수를 과대하게 산정하게 된다.
 - ④ 적층수 N 가 크게 되면 전단변형도 커지게 되지만, $N \geq 6$ 또는 8에서는 거의 일정하게 된다.
 - ⑤ 전단변형은 경계조건이 고정(C)와 단순의 조합으로 구성된 경우에는 조건 CC, SC, SS의 순으로, 자유의 조건을 포함한 경우에는 조건 FC, FS, FF의 순으로 커지게 된다.
 - ⑥ 이방성의 정도는 판두께비의 증가(얇은 적층판)와 함께 약해진다. 또 $a/h \geq 100$ 의 얇은 적층판에서는 거의 일정하게 된다.
 - ⑦ 적층수 $N=2$ 일 때는 이방성에 대한 영향이 크게 나타나기 때문에, 이방성의 영향이 크지 않은 적층수 $N=4$ 이상을 적층시켜 구조물을 설계하는 것이 바람직하다.

감사의 글

본 연구는 인천전문대학 교내연구비 지원에 의한 논문으로 이에 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. Leissa, A.W., "Recent Studies in Plate Vibrations : 1981-85, Part II", Complicating Effects, Shock & Vib. Dig., Vol. 18, p.23, 1986.

2. Bert, C.W., "Research on dynamics of Composite and Sandwich plates, 1979-81", Shock & Vib. Dig., Vol. 14, p.17, 1982.
3. Yang, P.C., Norris, C.H. and Stavsky, "Elastic wave propagation in heterogeneous plates", Int., Solids Struct., Vol. 2, p.665, 1965.
4. Reddy, "Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method", J. Sound Vib. Vol. 66, p.565, 1979.
5. Khdeir, A.A., "Free vibration of anti-symmetric angle-ply laminated plates including various boundary conditions", J. Sound Vib., Vol. 122, p.377, 1988.
6. 박승진 : 초기응력을 받는 적층판의 진동특성에 관한 연구 I, II, 대한토목학회논문집, Vol.15(1), pp.25-50, 1995
7. Yoshimura, J. Mikami, T. and Park, S.J., "Free Vibrations of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates", J. Structural Eng. 37A, p.911, 1992.
8. Robert, M. Jones "Buckling and Vibration of Unsymmetrically Laminated Cross-Ply Rectangular Plates", AIAA, Vol. 11, p.1626, 1973.
9. Reddy, J.N., "A Simple Higher-Order Theory for Laminated composite Plates", Trans. ASME, J. Appl. Mech., 51, p.745, 1984.
10. Mindlin, R.D., "Influence of Rotary and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", J. Appl. Mech., 18, p.31, 1951.
11. Srinivas, S. and Rao, A.K., "Bending Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates and Laminates", Int. J. Solids Struct., 6, p.1463, 1970.

(접수일자 : 2000년 6월 27일)