

# 유한차분법에 의한 등분포 상재하중하 적층 복합재 경사판 해석

## Analysis of Laminated Composite Skew Plates with Uniform Distributed Load by Finite Difference Method

박 원 태<sup>1)</sup> · 최 재 진<sup>2)</sup> · 장 석 윤<sup>3)</sup>  
*Park, Weon Tae Choi, Jae Jin Chang, Suk Yoon*

**요 약** : 복합적층 구조물에서 복합재료는 그 자체의 높은 강성, 강도와 내구성등의 특성을 갖고 있을 뿐 아니라, 구조물의 역학적 특성에 따라 얼마든지 재료의 특성을 합리적으로 구성하여 배치할 수 있는 매우 우수한 장점이 있다. 본 연구에서는 등분포로 재하된 복합적층경사판의 처짐에 관한 해석으로서 복합적층 경사판의 처짐을 나타내는 단일 4차 편미분방정식을 3개의 종속변수를 갖는 3원2차 연립방정식을 이용하여 해석하는 수치해석법을 제시하였으며, 대칭 앵글—플라이 각도로 적층, 역대칭 앵글—플라이 각도로 적층, 비대칭 앵글—플라이 각도로 적층한 경우에 처짐과 단면력을 비교 검토하였다.

**ABSTRACT** : In recent years the development of high modulus, high strength and low density boron and graphite fibers bonded together has brought renewed interest in structural elements. When a plate with arbitrarily oriented layers and clamped boundary conditions is subjected to uniform loading, it is difficult to analyze and apply, compared with isotropic and orthotropic cases. Therefore the numerical methods, such as finite difference method or finite element method, should be employed to analyse such problems. In this study the finite difference technique is used to formulate the bending analysis of symmetric composite laminated skew plates. When this technique is used to solve the problem, it is desirable to reduce the order of the derivatives in order to minimize the number of the pivotal points involved in each equation. The 4th order partial differential equations of laminated skew plates are converted to an equivalent three of 2nd order partial differential equations with three dependant variables.

**핵심용어** : 대칭적층, 역대칭적층, 비대칭적층, 앵글—플라이

**KEYWORDS** : symmetric laminated, antisymmetric laminated, nonsymmetric laminated, angle-ply

1) 정회원, 천안공업대학 토목과 조교수  
2) 천안공업대학 토목과 부교수  
3) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 교수

본 논문에 대한 토의를 2000년 12월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

## 1. 서론

구조물의 형식 가운데 판구조는 구조공학적 효율성과 미학적특성으로 구조공학적으로 그 이용도가 높은 구조형식이다. 판구조 중 경사판은 이용 가능 공간이 부족한 경우와 교량에 있어서는 차량속도를 고속으로 유지할수 있다는 점에서 그 이용도가 높다. 그러나 이러한 판의 처짐 및 단면력의 거동에 대한 해석은 수학적 모델링의 여러 가지 어려움으로 활발히 진행되지 못하고 있다.

사용재료에 있어서 복합재료는 두가지 이상의 재료를 조합하여 적층시킴으로서 자중을 감소시키는 역할을 함과 동시에 큰강도를 발휘할 수 있는 역학적 특성을 가지고 있다. 따라서 국내에서 이러한 복합재료를 이용한 각종 구조물에 대한 연구가 활발히 진행되고 있어 머지 않아 실용화 될 것으로 기대된다.

본 연구에서는 복합재료로 적층된 경사판으로서 4개의 층이 판의 두께 중심면에서 대칭, 역대칭, 비대칭으로 적층되어 있고, 외부경계조건이 고정으로 되어 있으며 하중이 등분포로 작용할 경우 플라이 각도와 경사각의 변화에 따른 판의 처짐 및 단면력의 해석에 대하여 유한차분법에 의한 해석방법을 제시하여 설계에 반영하고자 한다.

## 2. 복합 적층 경사판의 기본방정식

판의 중립면에서 변위를 무시하고 판의 임의점  $(x, y, z)$ 에서 두께방향의 변위를 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\alpha \\ v(x, y, z) &= z\beta \\ w(x, y, z) &= w \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $\alpha, \beta$ 는 회전각이다. 변위벡터( $\delta$ )는 전단변형을 고려한 판의 수직처짐과 처짐각은  $w$ ,

$\alpha, \beta$ 로 표시하면 다음과 같다.

$$\delta^T = \begin{pmatrix} w \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (2)$$

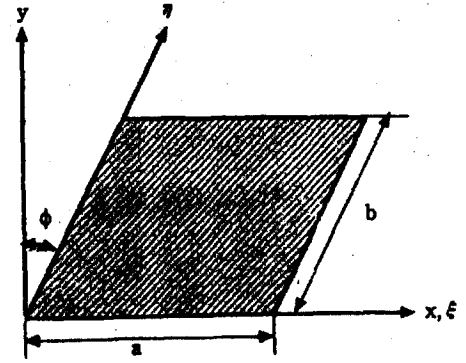


그림 1. 경사판의 형상

두께  $t$ 를 갖는 판의 모멘트와 전단력은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} z \, dz \\ \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} \, dz \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)에 응력-변형을 관계식과 변형률-변위 관계식을 대입하여 정리하면 경사좌표계에 대한 단단면력과 변위의 관계식은 식 (4)과 식 (5)과 같다.<sup>1)</sup>

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \\ \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \beta}{\partial \eta} - \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \xi} + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} - \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \left( \beta + \frac{\alpha + \frac{\partial w}{\partial \xi}}{\cos \phi} - \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \quad (5)$$

여기서 휨강도( $D_{ij}$ ),  $A_{ij}$ 는 각각 다음과 같다.<sup>5,6,7)</sup>

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum (Q_{ij})_k (Z^3 - Z^3_{k-1})$$

$$A_{ij} = \frac{5}{4} \sum (Q_{ij})_k (Z_k - Z_{k-1} - \frac{4}{3} \frac{Z^3_k - Z^3_{k-1}}{h^2})$$

여기서,  $i, j = 4, 5$

경사판이 등분포하중만을 받을 경우 고차항을 무시하고 정리하면 평형방정식은 다음과 같다.<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial \xi} + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial M_{xy}}{\partial \eta} - \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \frac{\partial M_{xy}}{\partial \xi} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial \xi} + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial M_y}{\partial \eta} - \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \frac{\partial M_y}{\partial \xi} - Q_y &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial \xi} + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial Q_y}{\partial \eta} - \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \frac{\partial Q_y}{\partial \xi} &= -P(x, y) \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)에 단면력-변위 관계식을 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (D_{11} - 2D_{16} \frac{\sin \phi}{\cos \phi} + D_{66} \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi}) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial^2 \xi} \\ + (2D_{16} \frac{1}{\cos \phi} - 2D_{66} \frac{\sin \phi}{\cos^2 \phi}) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi \partial \eta} \\ + D_{66} \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial^2 \eta} - A_{55} \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + (D_{16} - (2D_{12} + D_{66}) \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \\ - \frac{1}{\cos \phi} - 2D_{26} \frac{\sin \phi}{\cos^2 \phi}) \frac{\partial^2 \beta}{\partial \xi \partial \eta} \\ + D_{26} \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \beta}{\partial^2 \eta} - A_{45} \beta \\ - (A_{55} - A_{45} \frac{\sin \phi}{\cos \phi}) \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ - A_{45} \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \{ D_{16} - (D_{12} + 2D_{66} \frac{\sin \phi}{\cos \phi} + 2D_{26} \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi}) \} \cdot \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial^2 \xi} + (D_{12} \frac{1}{\cos \phi} + D_{66} \frac{1}{\cos \phi} \\ - 2D_{26} \frac{\sin \phi}{\cos^2 \phi}) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi \partial \eta} \\ + D_{26} \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial^2 \eta} - A_{45} \alpha \\ + (D_{66} - 2D_{26} \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \\ + D_{22} \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi}) \frac{\partial^2 \beta}{\partial^2 \xi} + (2D_{66} \frac{1}{\cos \phi} \\ - 2D_{22} \frac{\sin \phi}{\cos^2 \phi}) \frac{\partial^2 \beta}{\partial \xi \partial \eta} \\ + D_{22} \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \beta}{\partial^2 \eta} - A_{44} \beta \\ - (A_{45} - A_{44} \frac{\sin \phi}{\cos \phi}) \frac{\partial w}{\partial \xi} - A_{44} \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (A_{45} - A_{44} \frac{\sin \phi}{\cos \phi}) \frac{\partial w}{\partial \xi} - A_{44} \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ + (A_{55} - A_{45} \frac{\sin \phi}{\cos \phi}) \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} - A_{45} \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \\ + (A_{45} - A_{44} \frac{\sin \phi}{\cos \phi}) \frac{\partial \beta}{\partial \xi} - A_{44} \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \\ + (A_{55} - 2A_{45} \frac{\sin \phi}{\cos \phi}) \frac{\partial \beta}{\partial \xi} - A_{44} \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi} \cdot \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + (2A_{45} \frac{1}{\cos \phi} - 2A_{44} \frac{\sin \phi}{\cos^2 \phi}) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - A_{44} \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = -P(x, y) \quad (9)$$

경사판에 대한 Lagrange 방정식

$\nabla^2 \nabla^2 w(\xi, \eta) = P_z(\xi, \eta)$ 은 4차의 미분항을 갖고 있어서 해를 구하기가 쉽지가 않다. 이 문제를 해결하기 위하여 종속변수가 하나인 4차편미분방정식을 종속변수가 3개인 연립3차편미분방정식으로 변환시켰다.  $\Delta^2$ 의 오차범위를 갖는 중앙차분식을 이용하여 상기의 연립편미분방정식을 다음과 같은 하나의 매트릭스 방정식으로 표시할 수 있다.

$$AX_{j-i} + BX_j + CX_{j+1} = F_j \quad (10)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix}$$

$$X_j = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ w \end{pmatrix}, F_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P(x, y) \end{pmatrix} \text{ 같으며}$$

$U_{11}, \dots, W_{33}$ 은 부록에 있다.

### 3. 수치해석 및 결과분석

본 연구의 해석방법에 대한 수치해석 예로서 4

변이 고정지지된 경사판으로서 각층의 역학적 성질과 판의 길이와 두께비는 다음과 같다.

$$\frac{E_1}{E_2} = 2.5, \frac{G_{23}}{E_2} = 0.2$$

$$\frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0.5, \nu_{12} = 0.25$$

$$a = 10\text{cm}, b = 10\text{cm}, t = 1\text{cm}$$

$$E_2 = 2.1 \times 10^6 \text{N/cm}^2$$

$$q = 1 \text{N/cm}^2$$

동일한 4개층으로 구성되어 있고 각층의 재료축이 구조축인  $\xi$ 축과 여러 종류의 각도를 이루면서 변화할 때 나타나는 변위 및 단면력을 분석하였다.

### 3.1 경사판의 Mesh수의 증가에 따른 처짐값

$$(wt^3 E_2 10^4 / qa^4)$$

표 1은 4개층이 앵글-플라이 ( $30^\circ, -30^\circ$ )로 적층된 경사판의 경사각이  $0^\circ$  일 때 중앙점의 처짐값을 Mesh수의 증가에 따라 구한 값을 무차원화하여 나타내었다.

표 1. 메시수에 따른 중앙점의 최대처짐값

메시수	중앙점의 최대처짐값 ( $wt^3 E_2 10^4 / qa^4$ )
17 × 17	40.42272
19 × 19	40.65755
21 × 21	40.70903
23 × 23	40.76051
25 × 25	40.7752
유한요소법 (8×8)	42.8873

유한요소법<sup>1)</sup>에 의한 해석결과와 비교 하였을 때 메시수가 25x25이상을 사용하면 상당히 정확한 정도의 값을 얻을 수 있음을 알 수 있다. (2.3.4)

### 3.2 역대칭 앵글-플라이 적층 경사판의 처짐 및 단면력

그림 2에서 그림 7까지는 경사각이 15°일 때 역대칭 앵글-플라이 적층 경사판의 화이버의 보강각도의 변화에 따른 판의 처짐 및 단면력을 구하여 무차원화한 값이다.

그림 2에서와 같이 화이버의 보강각도의 변화에 따라 처짐에 차이가 생기는 이유는 부록에 표시되어 있는 바와 같이 처짐의 계산에 큰 영향을

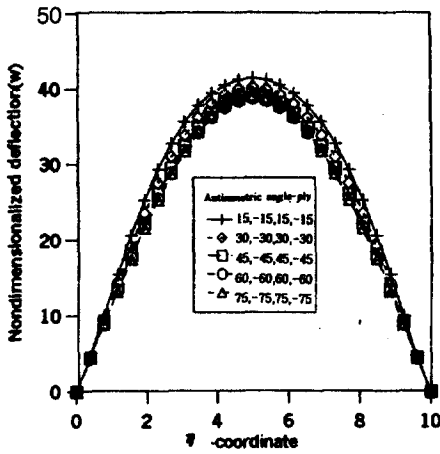


그림 2. 경사각이 15°인 경우 적층판의  $\xi = a/2$ 에서  $\eta$ 방향의 처짐값 ( $W t^3 E_2 10^4 / q a^4$ )

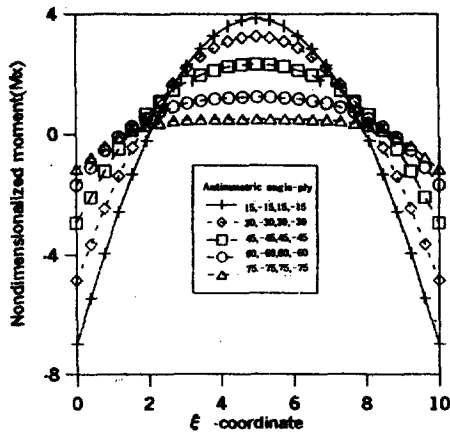


그림 3. 경사각이 15°인 경우 적층판의  $\eta = b/2$ 에서  $\xi$ 방향의 모멘트값 ( $M_x t^3 E_2 10^4 / q a^4$ )

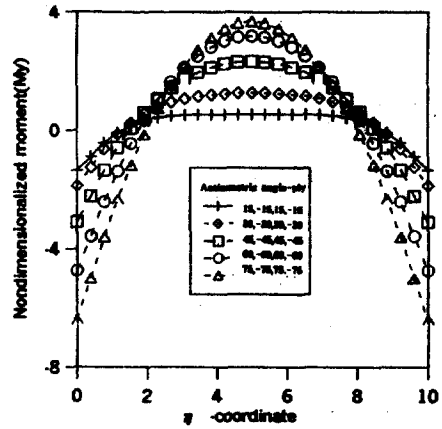


그림 4. 경사각이 15°인 경우 적층판의  $\xi = a/2$ 에서  $\eta$ 방향의 모멘트값 ( $M_y t^3 E_2 10^4 / q a^4$ )

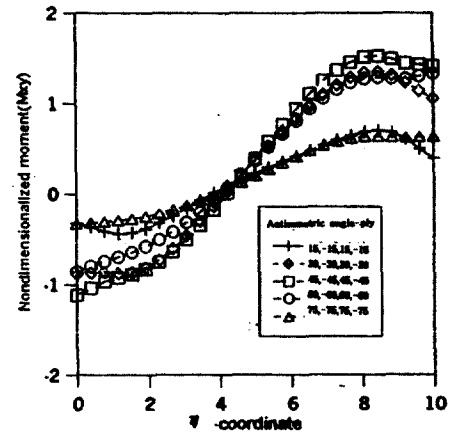


그림 5. 경사각이 15°인 경우 적층판의  $\xi = 3a/2$ 에서  $\eta$ 방향의 모멘트값 ( $M_{xy} t^3 E_2 10^4 / q a^4$ )

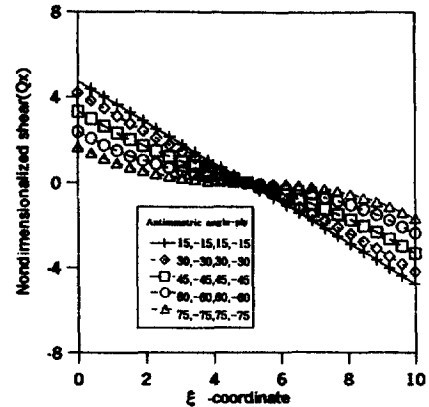


그림 6. 경사각이 15°인 경우 적층판의  $\eta = b/2$ 에서  $\xi$ 방향의 전단력값 ( $Q_x t^3 E_2 10^4 / q a^4$ )

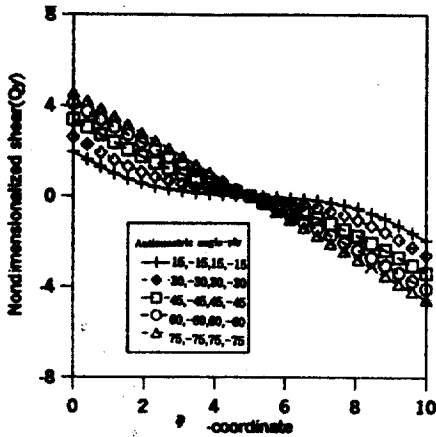


그림 7. 경사각이 15°인 경우 적층판의  $\xi = a/2$ 에서  $\eta$ 방향의 전단력값  $(Q_y, t^3 E_2 10^4 / qa^4)$

주는 휨강도값의 비( $D_{22}/D_{11}$ )를 보면 화이버의 보강각도가  $(15^\circ, -15^\circ, 15^\circ, -15^\circ)_T$ 에서 0.052, 여기서 0.178,  $(45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ)_T$ 에서는 1,  $(60^\circ, -60^\circ, 60^\circ, -60^\circ)_T$ 에서는 5.62818  $(75^\circ, -75^\circ, 75^\circ, -75^\circ)_T$ 에서는 9.25398를 각각 나타내었다. 따라서 이상의 5가지의 경우만을 비교하였을 때 휨강도값의 비( $D_{22}/D_{11}$ )가 가장 큰 화이버의 보강각도가  $(75^\circ, -75^\circ, 75^\circ, -75^\circ)_T$ 로 되었을 경우 처짐값이 가장 작게 나왔다. 따라서 이러한 경우에는  $(75^\circ, -75^\circ, 75^\circ, -75^\circ)_T$ 로 보강하는 것이 처짐에 유리하다고 판단된다.

그림 3과 그림 4에서는 경사판의 모멘트를 나타낸 것으로 경사판의 중앙부와 단부에서의 모멘트( $M_x$ )절대값은 화이버 보강각도  $(75^\circ, -75^\circ, 75^\circ, -75^\circ)_T$ 일 때 가장 작은 값을 가지며, 모멘트( $M_y$ )는 화이버 보강각도  $(15^\circ, -15^\circ, 15^\circ, -15^\circ)_T$ 일 때 가장 작은 값이 나왔다. 이와 같이 화이버의 보강각도의 변화에 따라 모멘트에 차이가 생기는 이유는 임의의  $\eta$ 점에서  $\xi$ 방향으로 중립면의 곡률( $\kappa_x$ )의 변화는 현저하게 나타나지만, 중립면의 곡률( $\kappa_y$ )의 변화는 거의 없다. 따라서 모멘트( $M_x$ )는 부록에 나타나 있는 바와 같이 휨강도값( $D_{11}$ )에 주로 영향을 받으며,

반면에 임의의  $\xi$ 점에서  $\eta$ 방향으로 중립면의 곡률( $\kappa_y$ )의 변화는 현저하게 나타나지만, 중립면의 곡률( $\kappa_x$ )의 변화는 거의 없다. 따라서 모멘트( $M_y$ )는 휨강도값( $D_{22}$ )에 주로 영향을 받는다. 이상의 결과에서 보면 모멘트( $M_x$ )는  $(75^\circ, -75^\circ, 75^\circ, -75^\circ)_T$ 로 보강하는 것이 유리하며, 모멘트( $M_y$ )는  $(15^\circ, -15^\circ, 15^\circ, -15^\circ)_T$ 로 보강하는 것이 유리한 것으로 판단된다. 그림 5는 화이버의 보강각도변화에 따른 모멘트( $M_{xy}$ )를 나타낸 것으로 부록에서 보는 바와 같이 휨강도값( $D_{66}$ )이 가장 큰  $(45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ)_T$ 로 보강하는 것이 유리한 것으로 나타났다.

그림 6과 그림 7에서는 화이버의 보강각도의 변화에 따른 경사판의 전단력값을 나타낸 것으로 부록에 표시되어 있는 바와 같이 전단력( $Q_y$ )의 계산에서는  $A_{55}$ 값을 크게 가지는 화이버의 보강각도가  $(15^\circ, -15^\circ, 15^\circ, -15^\circ)_T$ 일 때 유리했으며, 반면에 전단력( $Q_x$ )의 계산에서는  $A_{44}$ 값을 크게 가지는 화이버의 보강각도가  $(75^\circ, -75^\circ, 75^\circ, -75^\circ)_T$ 일 때 유리했다. 따라서 적층판의 전단력값의 계산시 화이버의 보강각도에 따른  $A_{ij}$ 값을 고려해서 경제적인 설계가 되도록 해야한다.

### 3.3 대칭 앵글-플라이 적층 경사판의 처짐 및 단면력

그림 8에서 그림 13까지는 경사각이 30°일 때 대칭 앵글-플라이 적층 경사판의 화이버의 보강각도의 변화에 따른 판의 처짐 및 단면력을 구하여 무차원화한 값이다.

처짐( $w$ )는 휨강성도값의 비( $D_{22}/D_{11}$ )가 가장 큰 화이버의 보강각도가  $(75^\circ, -75^\circ, -75^\circ, 75^\circ)_T$ 일 때 다소 작은 값을 나타냈으며, 모멘트( $M_x$ )와 전단력( $Q_x$ )는 휨강성값( $D_{11}$ )과 강성값( $A_{55}$ )가 가장 큰 화이버 보강각도가  $(75^\circ, -75^\circ, -75^\circ, 75^\circ)_T$ 일 때 다른 경우 보다 다소 유리했

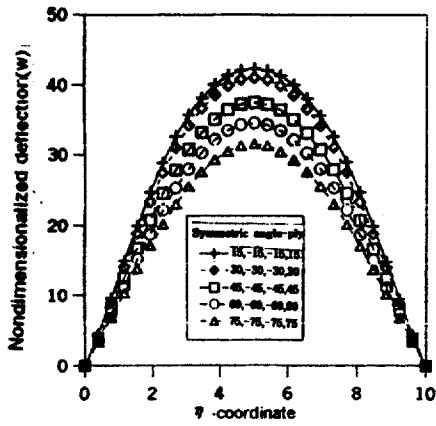


그림 8. 경사각이 30° 인 경우 적층판의  $\xi = a / 2$ 에서  $\eta$ 방향의 처짐값 ( $W t^3 E_2 10^4 / q a^4$ )

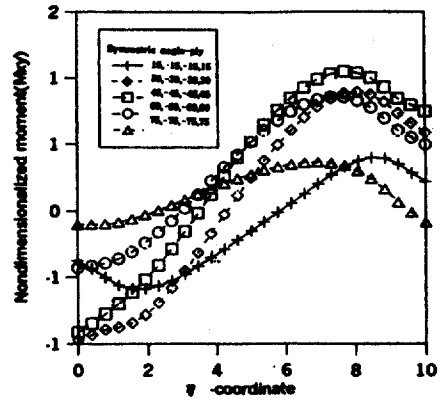


그림 11. 경사각이 30° 인 경우 적층판의  $\xi = 3a / 2$ 에서  $\eta$ 방향의 모멘트값 ( $M_{xy} t^3 E_2 10^4 / q a^4$ )

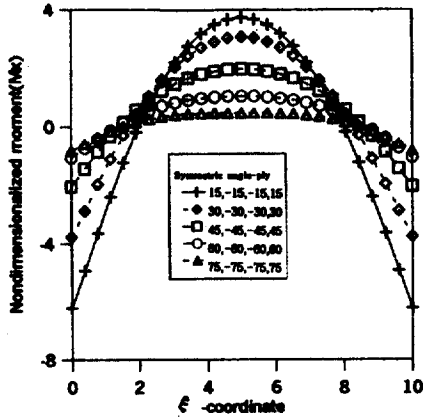


그림 9. 경사각이 30° 인 경우 적층판의  $\eta = b / 2$ 에서  $\xi$ 방향의 모멘트값 ( $M_x t^3 E_2 10^4 / q a^4$ )

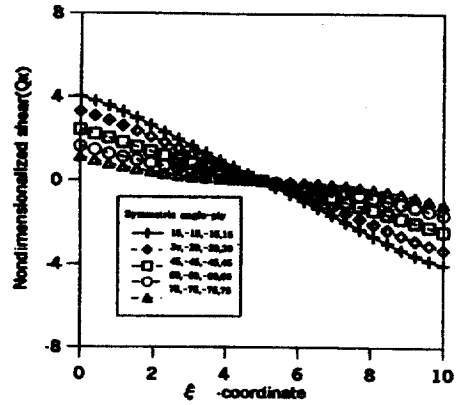


그림 12. 경사각이 30° 인 경우 적층판의  $\eta = b / 2$ 에서  $\xi$ 방향의 전단력값 ( $Q_x t^3 E_2 10^4 / q a^4$ )

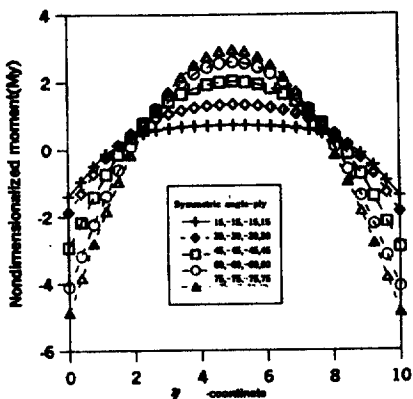


그림 10. 경사각이 30° 인 경우 적층판의  $\xi = a / 2$ 에서  $\eta$ 방향의 모멘트값 ( $M_y t^3 E_2 10^4 / q a^4$ )

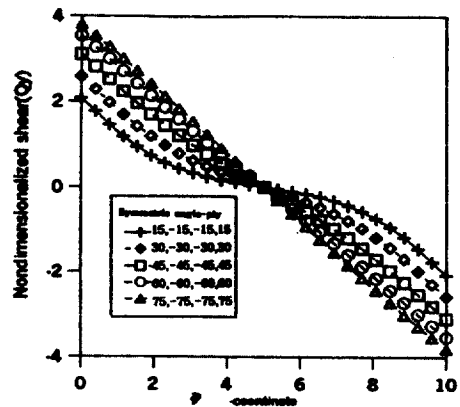


그림 13. 경사각이 30° 인 경우 적층판의  $\xi = a / 2$ 에서  $\eta$ 방향의 전단력값 ( $Q_y t^3 E_2 10^4 / q a^4$ )

했다. 모멘트(  $M_{xy}$  )는 휨강성값(  $D_{66}$  )이 가장 큰  $(75^\circ, -75^\circ, -75^\circ, 75^\circ)_s$ 로 보강하는 것이 유리한 것으로 나타났다. 모멘트(  $M_y$  )와 전단력(  $Q_x$  )는 휨강도값(  $D_{22}$  )과 강도값(  $A_{44}$  )가 가장 큰 화이버 보강각도가  $(15^\circ, -15^\circ)_s$ 일 때 다른 경우보다 다소 유리함을 알 수 있다.

### 3.4 비대칭 앵글-플라이 적층 경사판의 처짐 및 단면력

그림 14에서 그림 19까지는 경사각이  $45^\circ$  일 때 비대칭 앵글-플라이 적층 경사판의 화이버의 보강각도의 변화에 따른 경사판의 처짐 및 단면력을 구하여 무차원화한 값이다.

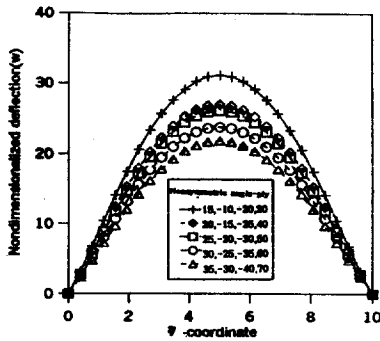


그림 14. 경사각이  $45^\circ$  인 경우 적층판의  $\xi = a/2$ 에서  $\eta$ 방향의 처짐값(  $W t^3 E_2 10^4 / q a^4$  )

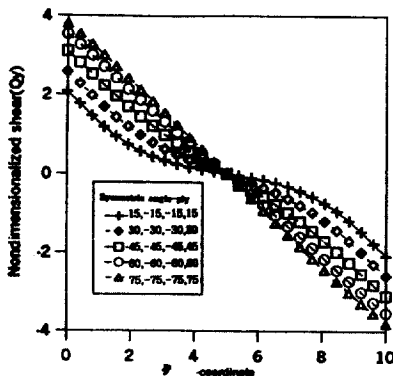


그림 15. 경사각이  $45^\circ$  인 경우 적층판의  $\eta = b/2$ 에서  $\xi$ 방향의 모멘트값(  $M_x t^3 E_2 10^4 / q a^4$  )

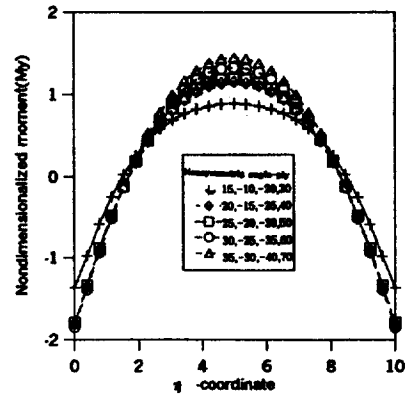


그림 16. 경사각이  $45^\circ$  인 경우 적층판의  $\xi = a/2$ 에서  $\eta$ 방향의 모멘트값(  $M_y t^3 E_2 10^4 / q a^4$  )

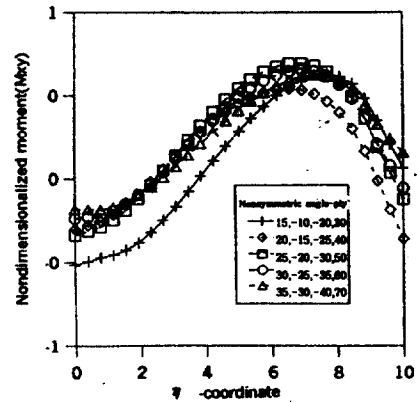


그림 17. 경사각이  $15^\circ$  인 경우 적층판의  $\xi = 3a/2$ 에서  $\eta$ 방향의 모멘트값(  $M_{xy} t^3 E_2 10^4 / q a^4$  )

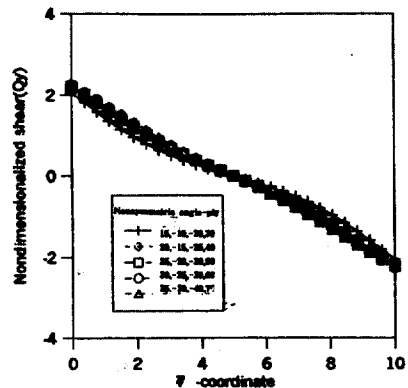


그림 18. 경사각이  $45^\circ$  인 경우 적층판의  $\eta = b/2$ 에서  $\xi$ 방향의 전단력값(  $Q_x t^3 E_2 10^4 / q a^4$  )



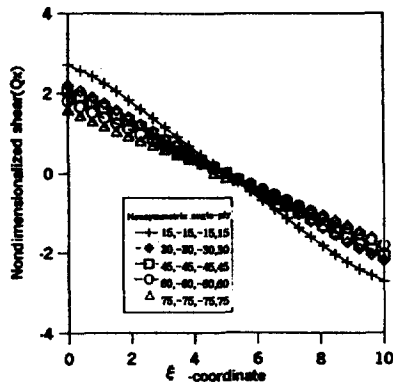


그림 19. 경사각이 45° 인 경우 적층판의  $\xi = a / 2$ 에서  $\eta$ 방향의 전단력값 ( $Q_y t^3 E_2 10^4 / q a^4$ )

비대칭 앵글-플라이 적층 경사판의 경우는 부록에 나타난 바와 같이 처짐, 휨모멘트, 비틀림모멘트, 전단력값이 대칭, 역대칭 앵글-플라이 경우와는 달리 비대칭으로 인해 생기는 휨강도값 ( $D_{12}, D_{16}$ )과 강성값 ( $A_{45}$ ) 영향을 받음을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

복합 적층 경사판의 경우 복잡한 경계조건과 비등방성으로 인하여 해석적방법에 의한 정확해를 구하기가 어려운 경우가 많다. 그러므로 수치해석방법을 이용하게 되며, 여기에 관련된 여러가지 수학적 근사방법이 제시되고 있다. 유한차분식은 복합적층 요소의 평형방정식을 수학적 근사방법으로 바꾸어 계산할 수 있는 간편한 방법이다. 본 연구에서는 경사판의 처짐을 나타내는 단일4차편미분방정식을 3개의 종속변수를 갖는 3원2차연립편미분방정식을 이용하여 해석하는 수치해석법을 제시하였다. 5가지 서로 다른 플라이 각도의 경우만을 고려해 수치해석을 실시하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

대칭 앵글-플라이 각도로 적층된 경우는  $[75^\circ, -75^\circ]_s$  로 적층된 경우 처짐( $w$ ), 모멘트( $M_x$ ), 전단력( $Q_x$ )의 계산에 큰 영향을 주는 휨강도값의 비( $D_{22}/D_{11}$ ), 휨강도값( $D_{11}$ ), 강도값

( $A_{44}$ )이 다른 경우에 비해서 우수했으며,  $[15^\circ, -15^\circ]_s$  로 적층된 경우 모멘트( $M_y$ ), 전단력( $Q_y$ )의 계산에 영향을 주는 휨강도값( $D_{22}$ ), 강도값( $A_{55}$ )이 다른 경우에 비해서 우수했다.

역대칭 앵글-플라이 각도로 적층된 경우에는  $(75^\circ, -75^\circ, 75^\circ, -75^\circ)_T$  로 적층된 경우 처짐( $w$ ), 모멘트( $M_x$ ), 전단력( $Q_x$ )의 계산에 영향을 주는 휨강도값의 비( $D_{22}/D_{11}$ ), 휨강도값( $D_{11}$ ), 강도값( $A_{44}$ )이 다른 경우에 비해서 우수했으며,  $(15^\circ, -15^\circ, 15^\circ, -15^\circ)_T$  로 적층된 경우 휨모멘트( $M_y$ ), 전단력( $Q_y$ ) 계산에 영향을 주는 휨강도값( $D_{22}$ ), 강도값( $A_{55}$ )이 다른 경우에 비해 우수한 값을 나타냈다.

비대칭 앵글-플라이 각도로 적층된 경우는 비대칭으로 인해 생기는 휨강도값( $D_{12}, D_{16}$ )과 강도값( $A_{45}$ )의 지배를 받음을 알 수 있었고, 특히 모멘트( $M_{xy}$ )는 휨강도값( $D_{16}$ ) 영향으로  $(15^\circ, -10^\circ, -20^\circ, 30^\circ)_T$  로 보강하는 가장 유리함을 알 수 있었다.

이상과 같이 비등방성 복합적층 경사판의 해석에서 플라이 각도의 변화에 따른 경사판의 휨강도비, 휨강도값( $D_{ij}$ ), 강도값( $A_{ij}$ )에 의해 처짐형상 및 단면력이 다르므로 구조공학적으로 합리적인 설계가 되도록 대칭, 역대칭, 비대칭 적층에 따른 적절한 플라이 각도를 선택하여야 한다.

#### 참 고 문 헌

- (1) 박원태, "전단변형을 고려한 비등방성 적층 Skew plates의 해석", 서울시립대학교 대학원 토목공학과 박사학위논문, 1993.8.
- (2) 윤석호, "전단변형을 고려한 비등방성 적층 판의 해석", 서울시립대학교 대학원 토목 공학과 박사학위논문, 1993.2, pp. 65-70.
- (3) 한성천, "비등방성 복합적층셀의 해석", 서울시립대학교 대학원 토목공학과 박사학위 논문, 1998.6, pp. 64-77.

- (4) 장석윤, 이원홍, "전단변형을 고려한 주변교정 비등방성 대칭 곡선판의 해석", 한국강구조학회논문집, 제4호, 1992, pp. 143-154.
- (5) J.N. Reddy, "Mechanics of Laminated Composite Plates", CRC press, inc., pp. 331- 400, 1997.
- (6) Robert M. Jones, "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill, pp. 47-57, 160-172, 1975.
- (7) Jack R. Vinsion and Tsu-Wei Chou, "Composite Materials and Their Use in Structures", Applied Science Publishers Ltd., pp. 221-223, 281-284, 1975.

부 록

$$U_{11} = \begin{bmatrix} u_2 & -u_1 & & & & \\ u_1 & u_2 & -u_1 & & & \\ & & & & & \\ & & & u_1 & u_2 & -u_1 \\ & & & & u_1 & u_2 \end{bmatrix}$$

$$U_{12} = \begin{bmatrix} u_4 & -u_3 & & & & \\ u_3 & u_4 & -u_3 & & & \\ & & & & & \\ & & & u_3 & u_4 & -u_3 \\ & & & & u_3 & u_4 \end{bmatrix}$$

$$U_{13} = \begin{bmatrix} u_7 & 0 & & & & \\ 0 & u_7 & 0 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & 0 & u_7 & 0 \\ & & & & 0 & u_7 \end{bmatrix}$$

$$U_{21} = \begin{bmatrix} u_4 & -u_3 & & & & \\ u_3 & u_4 & -u_3 & & & \\ & & & & & \\ & & & u_3 & u_4 & -u_3 \\ & & & & u_3 & u_4 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \begin{bmatrix} u_6 & -u_5 & & & & \\ u_5 & u_6 & -u_5 & & & \\ & & & & & \\ & & & u_5 & u_6 & -u_5 \\ & & & & u_5 & u_6 \end{bmatrix}$$

$$U_{23} = \begin{bmatrix} u_8 & 0 & & & & \\ 0 & u_8 & 0 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & 0 & u_8 & 0 \\ & & & & 0 & u_8 \end{bmatrix}$$

$$U_{31} = \begin{bmatrix} -u_7 & 0 & & & & \\ 0 & -u_7 & 0 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & 0 & -u_7 & 0 \\ & & & & 0 & -u_7 \end{bmatrix}$$

$$U_{32} = \begin{bmatrix} -u_8 & 0 & & & & \\ 0 & -u_8 & 0 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & 0 & -u_8 & 0 \\ & & & & 0 & -u_8 \end{bmatrix}$$

$$U_{33} = \begin{bmatrix} u_{10} & -u_9 & & & & \\ u_9 & u_{10} & -u_9 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & u_9 & u_{10} & -u_9 \\ & & & & & u_9 & u_{10} \end{bmatrix}$$

$$V_{11} = \begin{bmatrix} u_{12} & u_{11} & & & & \\ u_{11} & u_{12} & u_{11} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & u_{11} & u_{12} & u_{11} \\ & & & & & u_{11} & u_{12} \end{bmatrix}$$

$$V_{12} = \begin{bmatrix} u_{14} & u_{13} & & & & \\ u_{13} & u_{14} & u_{13} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & u_{13} & u_{14} & u_{13} \\ & & & & & u_{13} & u_{14} \end{bmatrix}$$

$$V_{13} = \begin{bmatrix} 0 & -u_{15} & & & & \\ u_{15} & 0 & -u_{15} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & u_{15} & 0 & -u_{15} \\ & & & & & u_{15} & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{21} = \begin{bmatrix} u_{17} & u_{16} & & & & \\ u_{16} & u_{17} & u_{16} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & u_{16} & u_{17} & u_{16} \\ & & & & & u_{16} & u_{17} \end{bmatrix}$$

$$V_{22} = \begin{bmatrix} u_{19} & u_{18} & & & & \\ u_{18} & u_{19} & u_{18} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & u_{18} & u_{19} & u_{18} \\ & & & & & u_{18} & u_{19} \end{bmatrix}$$

$$V_{23} = \begin{bmatrix} 0 & -u_{20} & & & & \\ u_{20} & 0 & -u_{20} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & u_{20} & 0 & -u_{20} \\ & & & & & u_{20} & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{31} = \begin{bmatrix} 0 & u_{15} & & & & \\ -u_{15} & 0 & u_{15} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & -u_{15} & 0 & u_{15} \\ & & & & & -u_{15} & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{32} = \begin{bmatrix} 0 & u_{20} & & & & \\ -u_{20} & 0 & u_{20} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & -u_{20} & 0 & u_{20} \\ & & & & & -u_{20} & 0 \end{bmatrix}$$



대칭, 역대칭, 비대칭적총경사판의  $D_{ij}$ ,  $A_{ij}$  값

	(15,-15)s	(30,-30)s	(45,-45)s	(60,-60)s	(75,-75)s
D11	1.831516	1.219115	0.596134	0.216609	0.096124
D12	0.143614	0.389072	0.511800	0.389072	0.143614
D16	0.347399	0.485003	0.375940	0.166144	0.028541
D22	0.095124	0.216609	0.595134	1.219115	1.831516
D26	0.028541	0.166144	0.375940	0.485003	0.347399
D66	0.164395	0.409853	0.532581	0.409853	0.164395
A44	0.183413	0.229167	0.291667	0.354167	0.399920
A45	-0.023438	-0.040595	-0.046875	-0.040595	-0.023438
A55	0.399920	0.354167	0.291667	0.229167	0.183413

	(15,-10,-20,35)	(20,-15,-25,40)	(25,-20,-30,50)	(30,-25,-35,60)	(35,-30,-40,70)
D11	2.461045	2.006457	1.568282	1.210144	0.935647
D12	0.417017	0.549002	0.626425	0.621906	0.562824
D16	0.712361	0.701788	0.613107	0.489035	0.378830
D22	0.168668	0.360283	0.642613	1.009792	1.4202451
D26	0.160141	0.328358	0.480109	0.570761	0.559706
D66	0.399484	0.569803	0.647226	0.642705	0.583624
A44	0.033333	0.486062	0.479521	0.472439	0.465221
A45	0.	0.007537	0.010212	0.013155	0.016207
A55	0.033333	0.430605	0.437146	0.444228	0.451445

	(15,-15,15,-15)	(30,-30,30,-30)	(45,-45,45,-45)	(60,-60,60,-60)	(75,-75,75,-75)
D11	1.831516	1.219115	0.596134	0.216609	0.095124
D12	0.143614	0.389072	0.511800	0.389072	0.143614
D16	0.	0.	0.	0.	0.
D22	0.095124	0.216609	0.595134	1.219115	1.831516
D26	0.	0.	0.	0.	0.
D66	0.164395	0.409853	0.532581	0.409853	0.164395
A44	0.183413	0.229167	0.291667	0.354167	0.399920
A45	0.	0.	0.	0.	0.
A55	0.399920	0.345167	0.281667	0.229167.	0.183413

(접수일자 : 1999. 7. 21)