

자유경계를 갖는 비등방성 판의 유한차분 안정성 해석

Finite Difference Stability Analysis of Anisotropic Plates with Free Edge

유 용 민¹⁾ · 이 상 열²⁾ · 장 석 윤³⁾

Yoo, Yong Min Lee, Sang Youl Chang, Suk Yoon

요 약 : 자유단이 있는 비등방성 판의 안정성을 검토할 때, 기존의 해석적인 방법으로는 다양한 하중 조건 및 경계조건에 대해 좌굴하중 및 좌굴모드를 구할 수 없다. 이러한 단점을 해결하기 위해 수치해석 기법인 유한차분법을 사용하였다. 유한차분법을 적용할 때, 자유경계의 가상점 처리가 가장 난해하게 되므로 1변이 자유이고 3변이 고정인 경우와 마주보는 2변이 자유이고 다른 2변이 고정인 경우를 해석 모델로 삼아 좌굴해석을 수행하였다. 본 논문에서는 자유경계를 갖는 비등방성 판의 해석 기법으로 유한차분법을 제시하였으며, 다양한 수치해석을 통하여 자유경계의 좌굴하중 및 모드 특성을 규명하였다.

ABSTRACT : Checking the stability of anisotropic plates with free edges, it is impossible that buckling loads and modes are found via existing classical methods about various loads and boundary conditions. For solving this problems, finite difference method(FDM) is used to analyze the buckling behaviors for arbitrary boundary conditions. Using FDM, it is difficult to treat the fictitious points on free edges. So, this paper analyzes buckling behaviors of analytic models with one edge free and the other edges clamped and with opposite two edges free and other two edges clamped. The various buckling loads and mode characteristics through numerical results are given for buckling behaviors of anisotropic plates on free edges.

핵심용어 : 자유단, 비등방성 판, 안정성, 유한차분법, 가상점, 좌굴하중, 좌굴모드

KEYWORDS : free edge, anisotropic plate, stability, finite difference method, fictitious point, buckling loads, buckling modes

1) 학생회원, 서울시립대학교 토목공학과 박사과정
2) 정회원, (주)서영기술단 구조3팀
3) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 교수

본 논문에 대한 토의를 2000년 10월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

1. 서론

복합재료로 이루어진 구조물은 단일재료로 구성된 구조물과 비교하여 볼 때, 휨이나 비틀림 등의 역학적 단점을 보완하고 구조적인 효율성을 증대시켜 설계할 수 있는 구조형식이다. 적층판에 있어서 안정성을 검토하는 것은 매우 중요한 문제이다. 이는 복합재료를 사용한 구조물은 단일재료보다 얇은 두께에서 같은 강도를 얻을 수 있으므로 상대적으로 좌굴이 발생하기 쉽기 때문이다. 그러므로 본 논문에서는 복합재료로 구성된 구조물 중에서 비등방성 판에 대한 좌굴거동을 해석하였다. 두꺼운 판이나 적층판의 좌굴거동 해석시 고전적 판이론을 적용하면 전단변형 효과가 무시되기 때문에 좌굴하중이 과대평가 된다. 따라서 본 논문에서 두꺼운 적층판의 좌굴해석을 위하여 전단변형 효과를 고려한 1차 전단변형 이론에 근거하여 보다 정확한 좌굴해석을 수행하였다. 그러나 비등방성 적층판의 임계 좌굴하중 및 좌굴모드는 기존의 해석적인 방법으로는 다양한 하중조건 및 경계조건에 대하여 좌굴거동을 해석할 수 없다는 단점을 가지고 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해 수치해석 기법 중에서 유한차분법을 사용하였다.

본 논문과 같이 자유단이 있는 비등방성 판은 고정이나 단순지지된 경계조건에 비하여 상이한 역학적 거동이 예상된다. 따라서 본 논문에서는 자유단을 가지는 비등방성 판에 대한 좌굴 특성을 중점적으로 해석하였다. 해석 모델의 경계조건에서 유한차분법을 적용할 때 자유단에서 가상점이 발생하므로 이를 소거하는 기법으로 기본방정식의 연계항을 절점 방향에 따라 전진 및 후진 차분법을 사용하여 내부점에 대한 차분식으로 표현하였다. 또한 외력이 가해지는 절점에 생기는 가상점은 응력과 변위 관계식을 사용하여 내부점으로 치환하여 해결하였다. 이러한 경계 처리방법은 기존의 유한차분 경계처리보다 개선된 것이며, 경계에서 완전한 수치적 타당성을 가진다. 이와 같은 방법을 사용하여 구성된 전체 및 기하학적 시스템

행렬은 자유단의 영향으로 비대칭 형태로 나타나게 되며, 이러한 비대칭 행렬을 해석하기 위해 IMSL(International Mathematical Software Library)의 Householder 방법을 사용하여 임계 좌굴하중 및 좌굴모드를 구하였다.

본 논문에서 다양한 좌굴거동을 파악하기 위해 해석 모델을 크로스 플라이와 앵글 플라이로 배열하여 적층수, 물성치 및 화이버 보강각도 등을 변화시키면서 좌굴하중 및 좌굴모드를 해석하였다. 또한 면내 하중의 작용방향에 따른 좌굴거동을 비교하였으며 변장비 변화에 따른 다양한 좌굴 특성을 규명하였다. 이를 통해 자유경계가 있는 비등방성 판의 좌굴 특성을 제시하고자 한다.

2. 기본 이론

본 논문에서는 1차 전단변형 이론을 적용하여 변위를 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 (U, V, W) 는 임의의 한 점의 X, Y, Z 방향의 변위, (u, v, w) 는 중립면의 변위, (ϕ_x, ϕ_y) 는 Y, X 축에 대한 회전각 변위를 의미한다.

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ V(x, y, z) &= v(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ W(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

식 (2)는 일반화된 판의 평형방정식을 나타낸 것이다. 여기서 $N(w)$ 는 면내력, (N_i, M_i) 는 합응력(resultants), Q_i 는 전단력을 의미한다.

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} + \bar{N}(w) &= 0 \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x &= 0 \\ M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

또한 적층판에서 힘-모멘트의 합응력 및 전단

력과 변형을 관계는 식 (3)으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_i \\ M_i \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \sigma_i^{(k)} dz \\ &= \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_j \\ \chi_j \end{pmatrix} \\ (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz \\ &\quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (3) \\ \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} dz \\ &= \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_5 \\ \epsilon_4 \end{pmatrix} \\ A_{ij} &= K \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz \\ &\quad (i, j = 4, 5) \end{aligned}$$

여기서 $\sigma_i^{(k)}$ 와 $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ 는 k번째 층에서의 응력성분과 구조축과 재료축 사이의 각도(θ)에 의한 축강성계수를 의미한다. K는 전단보정계수이고 사각형 판인 경우에는 보통 5/6를 사용한다.

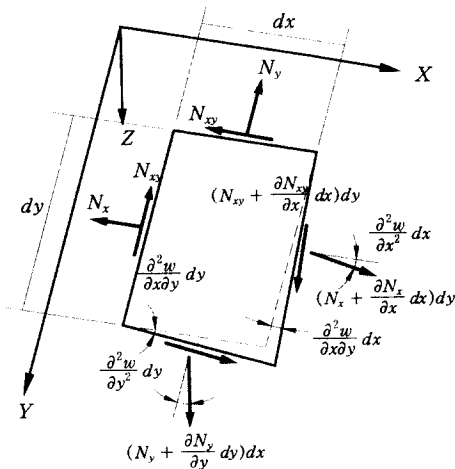


Fig. 1 In-plane Forces on Deformed Plate Element

면내 하중에 의한 기하학적 비선형을 나타내는 면내력 $N(w)$ 는 Fig. 1에서 Z방향에 대한 합력

을 구하면 식 (4)와 같이 구성된다.

$$N(w) = N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} \quad (4)$$

3. 유한차분법

본 논문의 해석모델은 해석적인 방법으로 풀 수 없기 때문에 수치해석 방법인 유한차분법을 사용하여 비등방성 판에 대한 안정성을 검토하였다. 유한차분법은 오차의 범위를 전개 수에 따라 선택적으로 결정할 수 있으며 미분방정식을 인접한 점에 대한 차분방정식으로 변환하여 해석하는 방법이다.

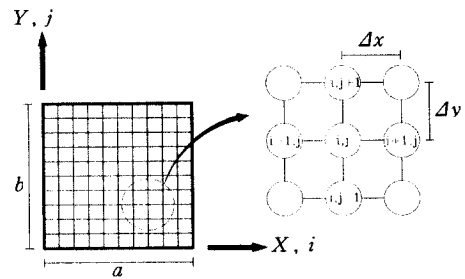


Fig. 2 Sign Conventions and Mesh Definitions of Model

Fig. 2는 해석 모델의 절점 방향 및 기호를 정의한 것이다. i, j는 X, Y축 방향의 절점 번호이며 a, Δx는 X축의 전체 및 절점 길이이다. 또한 b, Δy는 Y축에 대한 길이이다.

3.1 내부점

변형률과 변위 관계식, 합응력 및 전단력식 (3)과 면내력식 (4)를 전개하여 기본 방정식 (2)에 대입하면 변위에 대한 5개의 기본 방정식을 구할 수 있다¹⁰⁾. 이 식을 중앙 차분하면 각 자유도 절점에 대한 차분 방정식을 구성할 수 있다¹¹⁾.

3.2 자유경계

자유경계에서 내부점과 같이 기본방정식의 모

든 미분 항을 중앙 차분하게 되면 가상점이 발생하게 된다. 1변 자유 3변 고정인 경우에 (i-1, j+1), (i-1, j), (i-1, j-1)점이 가상점이 되며, 2변 자유 2변 고정인 경우에는 왼쪽 경계에서 위의 세 점과 오른쪽 경계에서 (i+1, j+1), (i+1, j), (i+1, j-1)점이 추가로 발생하게 된다.

자유경계에서 가상점을 소거하기 위하여 왼쪽 경계의 (i-1, j+1), (i-1, j-1)점 및 오른쪽 경계의 (i+1, j+1), (i+1, j-1)점은 기본 방정식에서 연계항을 중앙 차분하여 발생하는 점이므로 왼쪽 경계는 전진 차분법을 오른쪽 경계에서는 후진 차분법을 각각 사용하여 가상점이 없이 내부의 지지점으로부터만 표현할 수 있다. 이때 내부점과는 달리 전진 차분법을 사용하면 (i+2, j+1), (i+2, j-1) 점과 후진 차분법을 사용한 오른쪽 자유경계에서는 (i-2, j+1), (i-2, j-1)점에 차분 계수식이 발생하게 된다. 식 (5.a)는 연계항을 전진 차분하여 치환한 식이며, 식 (5.b)는 후진 차분법을 사용한 경우의 차분 계수 및 절점 위치를 나타낸 것이다. 여기서 ()는 변위 u, v, w, ϕ_x, ϕ_y 를 의미한다.

$$\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} [-3(\cdot)_{i,j+1} + 3(\cdot)_{i,j-1} + 4 \cdot (\cdot)_{i+1,j+1} - 4(\cdot)_{i+1,j-1} - (\cdot)_{i+2,j+1} + (\cdot)_{i+2,j-1}] \quad (5.a)$$

$$\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} [3(\cdot)_{i,j+1} - 3(\cdot)_{i,j-1} - 4 \cdot (\cdot)_{i-1,j+1} + 4(\cdot)_{i-1,j-1} + (\cdot)_{i-2,j+1} - (\cdot)_{i-2,j-1}] \quad (5.b)$$

다음으로 왼쪽 자유경계의 (i-1, j)점과 오른쪽 자유경계의 (i+1, j)점은 외력이 가해지는 절점에 생기는 가상점이므로 변위 형상을 단순하게 전진 및 후진 차분법을 사용하여 내부의 지지점으로 전환할 수 없다. 그러므로 (i-1, j)점과 (i+1, j)점은 자유경계에서 작용하는 응력과 변위의 관계식을

사용하여 내부점으로 치환하여야 한다. 식 (3)에서 자유경계에 작용하는 힘 $[N_i, N_{ij}, M_i, M_{ij}, Q_i]$ 을 전개하면 5개의 경계조건식을 얻을 수 있다. 이러한 조건식에서 미분항을 중앙 차분하고, 작용하는 힘은 0이므로 제거하여 가상점에 대해 전개하면 (i-1, j)점과 (i+1, j)점을 내부점으로 치환할 수 있는 식 (6.a)와 (6.b)를 구할 수 있다. 이와 같이 자유경계에서 전진 및 후진 차분법을 사용한 식 (5)와 응력과 변위의 관계식을 이용한 식 (6)을 사용하여 가상점을 제거하거나 내부의 지지점으로 전환하여 자유경계에서 적용되는 새로운 차분방정식을 유도하였다⁴⁾.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix}_{i-1,j} = -2\Delta x[S] \begin{pmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_{xy} \end{pmatrix}_{i,j} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix}_{i+1,j}$$

$$+ \frac{\Delta x}{\Delta y} [S][T] \begin{pmatrix} u_{i,j+1} - u_{i,j-1} \\ v_{i,j+1} - v_{i,j-1} \\ \phi_{x,i,j+1} - \phi_{x,i,j-1} \\ \phi_{y,i,j+1} - \phi_{y,i,j-1} \end{pmatrix}$$

$$w_{i-1,j} = -\frac{2\Delta x}{A_{55}} \cdot Q_{x,i,j} + w_{i+1,j} + \frac{A_{45}\Delta x}{A_{55}\Delta y} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) + 2\Delta x \cdot \phi_{x,i,j} + \frac{A_{45} \cdot 2\Delta x}{A_{55}} \cdot \phi_{y,i,j} \quad (6.a)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix}_{i+1,j} = 2\Delta x[S] \begin{pmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_{xy} \end{pmatrix}_{i,j} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix}_{i-1,j}$$

$$- \frac{\Delta x}{\Delta y} [S][T] \begin{pmatrix} u_{i,j+1} - u_{i,j-1} \\ v_{i,j+1} - v_{i,j-1} \\ \phi_{x,i,j+1} - \phi_{x,i,j-1} \\ \phi_{y,i,j+1} - \phi_{y,i,j-1} \end{pmatrix}$$

$$w_{i+1,j} = \frac{2\Delta x}{A_{55}} \cdot Q_{x,i,j} + w_{i-1,j} - \frac{A_{45}\Delta x}{A_{55}\Delta y} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) -$$

$$2\Delta x \cdot \phi_{x,i,j} + \frac{A_{45} \cdot 2\Delta x}{A_{55}} \cdot \phi_{y,i,j} \quad (6.b)$$

$$\text{여기서, } [S] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{16} & B_{11} & B_{16} \\ A_{16} & A_{66} & B_{16} & B_{66} \\ B_{11} & B_{16} & D_{11} & D_{16} \\ B_{16} & B_{66} & D_{16} & D_{66} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} A_{16} & A_{12} & B_{16} & B_{12} \\ A_{66} & A_{26} & B_{66} & B_{26} \\ B_{16} & B_{12} & D_{16} & D_{12} \\ B_{66} & B_{26} & D_{66} & D_{26} \end{bmatrix} \text{이다.}$$

전체 시스템 행렬은 경계조건에 따라서 구성한 차분방정식을 절점 방향으로 조합하여 식 (7)의 좌변과 같이 구성하고, 기하학적 시스템 행렬은 면내력에 대한 식 (4)를 앞에서 유도한 방식으로 조합하면 된다. 여기서 $\{X\}$ 는 고유벡터로 변위 및 회전각을 의미하며, 시스템 행렬 크기는 2변 자유 2변 고정인 경우에 $[5 \times M \times (N-2)]^2$ 이 되며 아래첨자 n 으로 나타냈다.

$$[K]_T \{X\} = \lambda [K]_C \{X\} \quad (7)$$

$$[K]_T = \begin{bmatrix} [A_f] & [B_f] & [C_f] \\ [A] & [B] & [C] \\ & & \ddots \\ & [A] & [B] & [C] \\ & [A_b] & [B_b] & [C_b] \end{bmatrix}_n$$

$$[K]_C = \begin{bmatrix} [A_{gf}] & [B_{gf}] & [C_{gf}] \\ [A_g] & [B_g] & [C_g] \\ & & \ddots \\ & [A_g] & [B_g] & [C_g] \\ & [A_{gb}] & [B_{gb}] & [C_{gb}] \end{bmatrix}_n$$

식 (7)에서 표시한 부행렬은 임의의 j 선 상에 대한 모든 i 점을 표현한 행렬이며, $[A_f], [A_b]$ 는 자유경계에서 변위를 전진 및 후진 차분법을 사용하여 내부점으로 소거하거나 치환한 부행렬을 의미한다⁴⁾. 이렇게 구성한 전체 및 기하학적 시스템 행렬은 자유단의 영향으로 비대칭 형태로 나타나므로 IMSL의 Householder 방법을 사용하

여 임계 좌굴하중 및 좌굴모드를 구한다.

4. 해석 예 및 결과 분석

해석 모델은 1변이 자유이고 3변이 고정인 경우와 마주보는 2변이 자유이고 다른 2변이 고정인 경우이다. Table. 1은 본 논문에서 사용한 재료의 물성치이며 하이버 보강각도는 Boron Fiber가 Epoxy Matrix에 재료축 방향으로 묻혀 있는 경우이다. 수치해석 결과를 상호 비교하기 위하여 식 (8)처럼 무차원화하여 표시하였다. 면내 하중은 주로 X축 방향으로 작용하는 $N(x)$ 에 대해 해석하였고, $N(y)$ 및 $N(x)+N(y)$ 의 경우에 대해서도 좌굴 거동을 해석하였다. 특별한 언급이 없는 한 변장비 $a:b$ 는 1:1인 정사각형 판에 대해 해석하였고 길이/두께 비는 모두 10이다.

Table 1. Material Property

	$E_1:E_2$	$(G_{12}, G_{13}):E_2$	$G_{23}:E_2$	ν
M ₁	40 : 1	0.6 : 1	0.5 : 1	0.25
M ₂	25 : 1	0.5 : 1	0.2 : 1	0.25

$$\bar{N} = N_{cr} (a^2 / E_2 h^3) \quad (8)$$

4.1 프로그램 검증

Fig. 3은 전단변형의 유·무에 따라 고전적 판이론과 1차 전단변형 이론의 좌굴하중의 차이를 비교한 것이다. 물성치는 M₂를 사용하였으며 보강각도는 $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 이다. 여기서 FSDT는 1차 전단변형 이론, CLPT는 고전적 판이론을 의미한다. 또한 Model 1은 1변 자유 3변이 고정인 경우이며 Model 2는 2변 자유 2변 고정인 경우를 나타낸다. 그림처럼 길이/두께 비가 두꺼운 경우나 적층판인 경우에는 반드시 전단변형 효과를 고려하여 해석하여야 보다 정확한 좌굴거동을 파악할 수 있다.

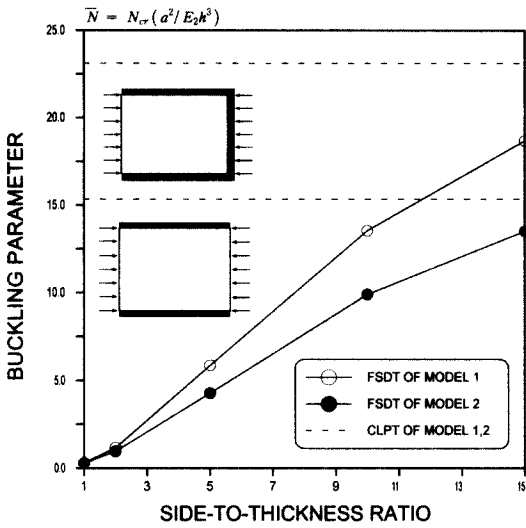


Fig. 3 Nondimensional Buckling Loads versus Side-to-Thickness Ratios

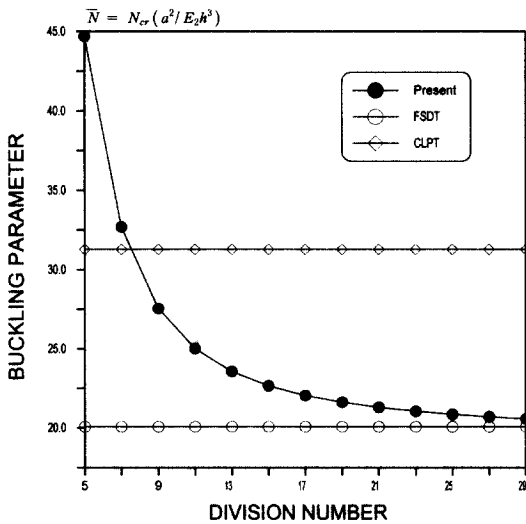


Fig. 4 Effect of Shear Deformation on Nondimensional Buckling Loads of Antisymmetric Cross-ply Plates

Fig. 4는 프로그램의 검증을 위해 자유경계보다 가상점 처리가 쉬운 단순지지된 경우로 전환하여 비교하였다. Lévy가 제시한 해석적인 해와 본 논문의 좌굴하중 결과를 비교하였다⁵⁾. 여기서 보

강각도는 $[0^\circ/90^\circ]$ 이며 물성치는 M_1 을 사용하였다. 정해와의 수렴도는 21×21 에서 95%, 29×29 인 경우 97.56% 이상임을 알 수 있다.

4.2 크로스 플라이

Table 2는 두 해석 모델에서 보강각도에 따른 좌굴하중을 구한 값이다. 물성치는 M_2 이고 하이버 보강각도는 중립면에 대칭과 역대칭으로 배치하였다. Table 2에서 적층판을 같은 방향으로 배치하는 것보다 보강각도를 다르게 적층시킬수록 면내 하중에 저항하는 힘이 커짐을 알 수 있다. 1변 자유 3변 고정에서는 $[90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ]$ 이 좌굴하중이 가장 작는데 이는 작용하는 면내 하중 방향으로 강축이 배치되어 있기 때문이다. 이와는 달리 2변 자유 2변 고정에서는 $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]$ 에서 작게 되는데 배치된 강축의 영향보다 경계조건에 의한 영향이 더 크게 작용했기 때문이다.

Table 2. Nondimensional Buckling Loads of Cross-ply Square Plates

Fiber Angle	Boundary	Present
$0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ$	One Free Edge	11.2037
	Two Free Edge	4.5646
$0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$	One Free Edge	13.5351
	Two Free Edge	9.8891
$0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$	One Free Edge	12.2862
	Two Free Edge	11.8098
$90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ$	One Free Edge	6.1231
	Two Free Edge	6.0195

Fig. 5는 1변 자유 3변 고정과 2변 자유 2변 고정의 첫 번째 및 두 번째 좌굴형상이다. 물성치는 M_1 이며 보강각도는 $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 이다. 두 경우의 좌굴모드를 비교하여 보면 경계조건에 따른 자유단과 고정단의 차이를 알 수 있다. (i), (ii)는 자유경계에서 복잡한 형상이 나타나지만 (iii), (iv)에서는 양면 자유에 의해 자유단과 마찬가지로 중심부에서도 형상 변화가 발생한다.

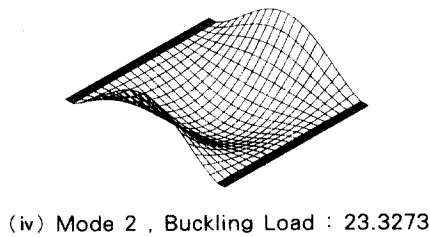
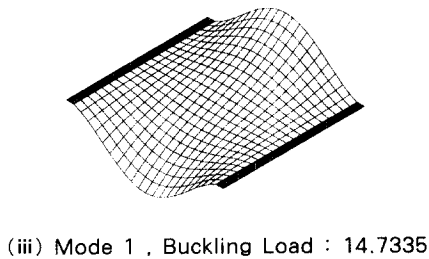
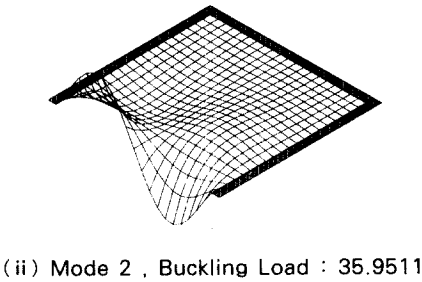
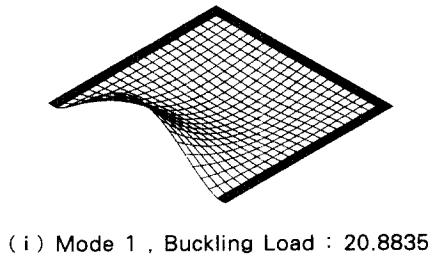


Fig. 5 Buckling Modes of Symmetric cross-ply Plates

4.3 앵글 플라이

Table 3은 보강각도를 일방향과 중립면에 대칭과 역대칭으로 배치한 경우의 좌굴하중이다. 여기서 사용한 물성치는 M_1 이며 좌굴하중을 무차원화하여 상호 비교하였다. 1번 자유인 경우는 화이버 보강각도를 90° 방향으로 배치할수록 좌굴하중이 작아진다. 크로스 플라이로 보강된 경우와

Table 3. Nondimensional Buckling Loads of Angle-ply Square Plates

Fiber Angle	Boundary	Present
30°/30°/30°/30°	One Free Edge	14.3229
	Two Free Edge	11.7604
30°/-30°/-30°/30°	One Free Edge	19.4739
	Two Free Edge	17.2281
30°/-30°/30°/-30°	One Free Edge	20.6861
	Two Free Edge	18.7687
45°/45°/45°/45°	One Free Edge	13.1021
	Two Free Edge	12.4616
45°/-45°/-45°/45°	One Free Edge	18.0642
	Two Free Edge	17.5941
45°/-45°/45°/-45°	One Free Edge	18.9291
	Two Free Edge	18.5494
60°/60°/60°/60°	One Free Edge	11.3126
	Two Free Edge	10.8492
60°/-60°/-60°/60°	One Free Edge	13.9304
	Two Free Edge	13.6973
60°/-60°/60°/-60°	One Free Edge	14.2351
	Two Free Edge	14.0250

같이 일방향으로 배치된 경우보다 중립면에 대칭이나 역대칭으로 배열된 경우가 구조적으로 효율적임을 Table 3에서 알 수 있다. 양변 자유인 경우에는 보강각도가 45° 방향이 가장 큰 좌굴하중값이 나타난다.

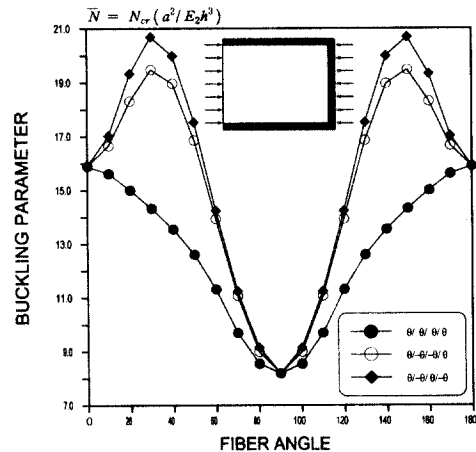


Fig. 6(a) Nondimensional Buckling Loads versus Fiber Angles for Plates with One Edge Free

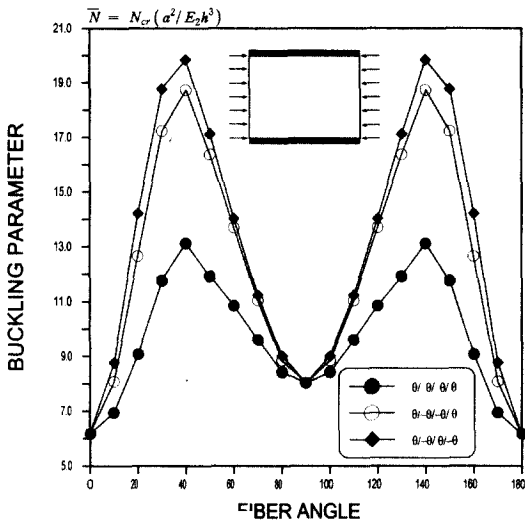


Fig. 6(b) Nondimensional Buckling Loads versus Fiber Angle for Plates with Two Edge Free

Fig. 6은 일방향, 대칭, 역대칭으로 배치한 적층판에서 화이버 보강각도를 $0^\circ \sim 180^\circ$ 까지 변화시키면서 좌굴하중을 구한 것이다. 6(a)에서 일방향인 경우에 $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]$ 가 가장 크며, $[90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ]$ 에서 좌굴하중이 작게 된다. 하지만 대칭이나 역대칭으로 배치한 경우는 이와 달리 약 30° 정도에서 가장 크게 나타나는 것을 볼 수 있다. 양면 자유인 6(b)에서는 약 45° 에서 가장 큰 좌굴하중이 나타난다. 이는 양단 자유경계와 다른 복합적인 효과가 영향을 주기 때문이다.

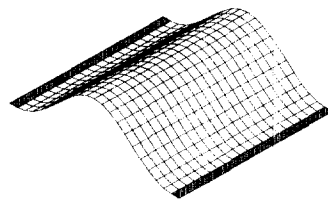
4.4 면내 하중 조합

Table 4는 1번 자유와 양면 자유인 경계조건에서 크로스 플라이와 앵글 플라이로 배치하여 면내 하중이 작용방향에 따른 좌굴하중을 구한 값이다. 여기서 사용한 물성치는 M_2 이며 경계조건 및 작용하중 방향을 달리하여 해석하였다. 작용방향에 따라 좌굴하중에 많은 차이가 발생하므로 설계 시에는 이를 고려하여야 한다.

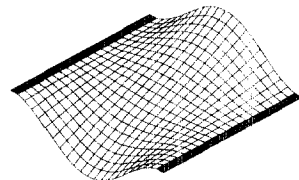
Table 4. Nondimensional Buckling Loads versus In-plane Loading Directions

Fiber Angle	Direction	One Free	Two Free
$0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ$	$N(x)$	11.2037	4.5645
	$N(y)$	4.9469	3.0717
	$N(x) + N(y)$	3.8905	2.3334
$0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$	$N(x)$	13.5351	9.8891
	$N(y)$	11.1340	9.5223
	$N(x) + N(y)$	8.0680	5.4466
$0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$	$N(x)$	12.2862	11.8098
	$N(y)$	17.4002	16.3773
	$N(x) + N(y)$	9.4360	8.2207
$30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ$	$N(x)$	12.6558	11.0682
	$N(y)$	7.6548	5.0161
	$N(x) + N(y)$	5.8976	4.8933
$30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ$	$N(x)$	13.3215	11.9216
	$N(y)$	8.1658	5.2192
	$N(x) + N(y)$	6.3332	5.1046

Fig. 7은 $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 으로 배치된 판에서 면내하중 방향에 따른 첫 번째 좌굴모드를 각각 나타낸 것이다. $N(y)$ 만 작용하는 경우 Fig. 5의 $N(x)$ 에 의한 좌굴모드의 형상과는 다르게 나타나는데 이는 고정단에 면내 하중이 작용했기 때문이다. 하중이 동시에 작용하는 경우에는 전체적인 형상은 Fig. 5와 유사하지만 좌굴하중 값은 작게 나타난다.



(i) $N(y)$, Buckling Load : 14.3199



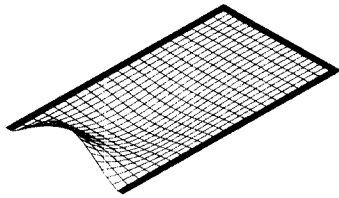
(ii) $N(x) + N(y)$, Buckling Load : 8.0451

Fig. 7 Buckling Modes versus In-plane Loading Direction

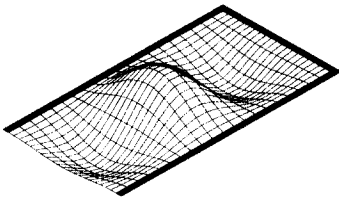
4.5 변장비

변장비에 대한 좌굴거동을 비교하기 위해 Y축의 길이 b 를 10으로 고정하고 a 를 변화하여 해석하였다. 물성치는 M_2 이다.

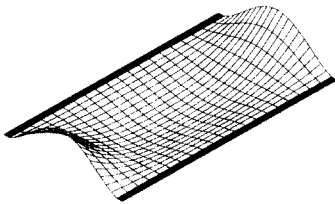
Fig. 8은 두 해석 모델에서 화이버 보강각도가 $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 일 때, $a:b$ 가 2:1과 4:1인 경우의 좌굴모드이다. 여기서 작용한 면내 하중은 $N(x)$ 이며 물성치는 M_1 을 사용하였다.



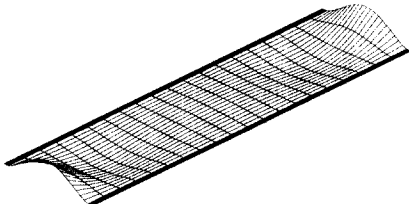
(i) Mode 1, Buckling Load : 14.1620



(ii) Mode 2, Buckling Load : 24.3634



(iii) Mode 1, Buckling Load : 13.5784



(iv) Mode 1, Buckling Load : 17.0421

Fig. 8 Buckling Modes versus Aspect Ratio

Table 5. Nondimensional Buckling Loads versus Aspect Ratio

Fiber Angle	Buckling Load			
	0.5	1	1.5	2
$0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$	3.449	9.889	12.86	13.58
$0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$	4.586	12.28	12.23	13.56
$30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ$	6.082	12.65	12.98	14.37
$30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ$	7.218	13.32	13.55	14.51

5. 결 론

본 논문에서는 자유경계를 갖는 비등방성 판을 수치해석 기법인 유한차분법을 사용하여 경계처리 기법을 제시하였으며 수치예제를 통하여 좌굴하중 및 좌굴모드를 비교, 분석하였다. 또한 전단변형을 고려하여 두꺼운 판이나 적층판에서 보다 정확한 좌굴거동을 해석하였다.

해석 모델이 1변 자유 3변 고정인 경우, 크로스 플라이로 배열한 경우에는 화이버가 일방향으로 보강되고 면내 하중이 작용하는 방향으로 강축이 배치되어 있는 경우 가장 큰 좌굴하중이 나타난다. 하지만 일방향으로 보강하는 것보다 각 층의 보강각도를 달리하여 중립면에 대칭으로 배치하는 것이 가장 유리하다. 앵글 플라이인 경우 $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$ 인 역대칭이 가장 큰 좌굴하중을 갖는다. 1변 자유 3변 고정인 경우 $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 로 보강할 경우 가장 안전하며, $[90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ]$ 가 좌굴하중이 작으므로 좌굴에 민감한 설계를 할 때에는 유리하다. 2변 자유 2변 고정인 해석 모델에서는 크로스 플라이와 앵글 플라이 모두 중립면에 역대칭으로 배치하는 것이 가장 유리하다. 면내하중 $N(x)$ 를 받을 때 구조적으로 가장 안정적인 배치는 $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$ 이며 가장 작은 좌굴하중은 $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]$ 이다. 양단 자유로 인해 면내 하중에 저항하는 강축의 영향보다 경계조건 등이 복합적으로 발생하기 때문이다. 면내 하중 방향이 다른 경우 좌굴 거동 또한 달라지게 된다. $N(y)$ 만 작용할 때, 두 모델에서 역

대칭인 $[60^\circ/-60^\circ/60^\circ/-60^\circ]$ 가 가장 큰 좌굴하중을 가진다. 면내 하중 $N(x), N(y)$ 가 동시에 작용할 때, 1변 자유 3변 고정은 $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, 2변 자유 2변 고정은 $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$ 의 보강각도가 유리하다. 이와 같이 구조물의 경계조건에 따라 적층판을 적절하게 배열함으로써 구조적으로 좌굴에 안정적인 설계를 할 수 있다.

본 논문에서는 자유단이 있는 비등방성 판의 임계 좌굴하중 및 좌굴모드를 해석하였으며 좌굴 거동의 특성을 비교, 분석하여 화이버 배열 및 보강각도에서 좌굴거동에 대한 역학적인 안정성을 제시하였다. 이와 같은 결과를 이용하여 비등방성 복합 재료로 구성된 적층 구조물에 대한 역학적인 특성을 규명할 수 있을 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

- (1) 이상열, 임성순, 장석윤, "비등방성 복합 적층 판의 임계좌굴하중 및 모드의 수치 해석," 한국강구조학회 논문집 제 10권 3호, 1998, pp. 451~461.
- (2) 백한솔, 이상열, 장석윤, "유한 차분법을 이용한 비등방성 복합적층판의 안정성에 관한 연구," 서울시립대학교 산업기술연구소 논문집 제 6집 1호, 1998, pp. 13~20.
- (3) 유용민, 백한솔, 장석윤, "자유단을 갖는 비등방성 판의 강도특성에 따른 좌굴 하중 및 모드," 한국강구조학회 학술발표논문집, 1999, pp. 178~185
- (4) 유용민, "전단변형을 고려한 비등방성 판의 좌굴 해석," 서울시립대학교 공학석사 학위논문, 2000.2
- (5) R. F. Palardy and A. N. Palazotto, "Buckling and Vibration of Composite Plates Using the Levy Method," Composite Structures 14, 1990, pp. 61~86
- (6) A. A. Khdeir, "Comparison between Shear Deformable and Kirchhoff Theories for Bending, Buckling and Vibration of Antisymmetric Angle-ply Laminated Plates," Composite Structures 13, 1989, pp. 159~172
- (7) A. A. Khdeir, "Free Vibration and Buckling of Symmetric Cross-ply Laminated Plates by Exact Method," Journal of Sound and Vibration 126 (3), 1988, pp. 447~461
- (8) R. M. Jones, "Buckling and Vibration of Unsymmetrically Laminated Cross-ply Rectangular Plates," Journal AIAA 11(12), 1973, pp. 1626~1632
- (9) D. Bruno and S. Lato, "Buckling of Moderately Thick Composite Plates," Composite Structures 18, 1991, pp. 65~75
- (10) J. N. Reddy, "Mechanics of Laminated Composite Plates," CRC Press, 1997
- (11) Robert M. Jones, "Mechanics of Composite Materials," Scripta Book Company, 1975
- (12) Jack. R. Vinson, Tsu-Wei Chou, "Composite Materials and Their Use in Structures," Applied Science Publisher, 1975
- (13) N. G. R. Iyengar, "Structural Stability of Columns and Plates," John Wiley & Sons, 1988
- (14) G. J. Turvey and I. H. Marshall, "Buckling and Postbuckling of Composite Plates," Chapman & Hall, 1995

(접수일자 : 2000년 1월 31일)