

자유경계를 갖는 비등방성 원뿔형 쉘의 해석

Analysis of Anisotropic Circular Conical Shells with Free Supports

손 병 직¹⁾ · 백 한 솔²⁾ · 장 석 윤³⁾

Son, Byung Jik Baik, Han Sol Chang, Suk Yoon

요 약 : 최근 복합재료는 토목뿐만 아니라 건축, 항공, 선박산업분야에서 널리 사용되고 있다. 두 가지 이상의 다른 재료들로 구성된 복합재료는 역학적 특성에서 단일재료보다 매우 유리한 장점을 가지고 있다. 쉘 구조물은 직선구조물과 비교해 볼 때 곡선형상 때문에 하중에 효과적으로 저항하는 이점이 있다. 이러한 쉘 구조물에 복합재료를 사용함으로서 보다 높은 강성과 낮은 중량을 가진 경제적인 쉘 구조물을 설계할 수 있다. 본 논문의 목적은 전단변형효과를 고려한 원뿔형 쉘을 해석하여 복합재료의 이점을 규명하고 자유경계의 효과를 고찰하는데 있다. 본 논문은 원뿔형 쉘의 미분방정식을 해결하기 위해서 유한차분법을 사용하였다.

ABSTRACT : In recent years, composite materials have been used in civil engineering as well as architecture, automobile, aerospace, shipping industries. Composite materials are composed of two or more different materials to produce desirable properties for structural strength. The shell structures have the advantage of more efficient load resistance due to its curved shape as compared to the plate structures. And the shell structures with composite materials have many advantages in strength, corrosion resistance, and weight reduction. The objective of this study is to analyze circular conical shells with shear deformation effects and to prove the advantage of composite materials. To solve differential equations of conical shells, this paper used finite difference method.

핵심 용어 : 비등방성, 원뿔형 쉘, 유한차분법, 복합재료, 전단변형효과

KEYWORDS : Anisotropic, Conical shells, Finite difference method, Composite materials, Shear deformation effects

1) 학생회원, 서울시립대학교 토목공학과 박사과정

2) 학생회원, 서울시립대학교 토목공학과 박사과정

3) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 교수

본 논문에 대한 토의를 2001년 2월 28일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

1. 서 론

쉘 이론의 접근이 19세기 말 Love에 의해서 이루어진 이후 많은 연구자에 의해서 쉘 이론이 발전되어왔다. 1924년에 Shtaerman이 고전적 이론을 바탕으로 한 비동방성 쉘 이론의 기초 논문을 발표하였고, Flugge는 1963년에 적층된 비동방성 원통형 쉘구조에 대한 안정성을 연구하였으며 1967년에 Kunukkasseril은 다층의 일반적인 비동방성 원통형 쉘의 진동에 대해 연구하였다. 그러나 두께가 커질수록 전단변형에 의한 처짐이 무시할 수 없게 되어 고전적인 쉘 이론에 전단변형효과를 고려하려는 움직임이 최근에 와서야 연구되어지고 있다. 이러한 전단변형효과의 고려가 각종 실험과 이론에 의해서 입증되었으나, 아직 원뿔형 쉘에 대한 연구가 이루어지지 않고 있다.

따라서, 본 논문은 전단변형효과를 고려한 비동방성 원뿔형 쉘을 연구하고자 한다. 또한 경계조건에 자유단을 포함시켜 자유단을 갖는 각종 원뿔형 쉘형식의 구조물에 적용시키고자 한다.

두 가지 이상의 재료로 이루어진 복합재료는 단일재료의 역학적인 단점을 보완하고 구조적인 효율성을 증대시켜 설계할 수 있는 구조재료이다. 복합재료는 높은 비강성과 비강도 등의 특징을 갖고 있어 다양한 소재로 구성되어 토목, 건축분야는 물론 조선, 항공분야에 이르기까지 널리 이용되고 있다.

이러한 복합재료를 쉘 구조물에 적용시키면 쉘 구조물의 기하학적 특성과 복합재료의 재료적 특성 때문에 다른 구조물에 비해 복잡한 거동을 나타내므로 해석해를 구하는 것은 거의 불가능하기 때문에 유한차분법을 이용하여 해석하였다.

본 논문의 목적은 복합재료의 특성 및 이점을 규명하고, 비동방성 원뿔형 쉘의 정확한 거동을 분석하는데 있다. 또 수치해석을 통해서 높은 강성을 가질 수 있는 화이버의 적절한 보강방안을 제시하고자 한다. 특히 자유단을 갖는 원뿔형 쉘의 정확한 거동에 대한 공학적인 측면을 고찰하고자 한다.

2. 기본이론

본 연구의 해석모델은 직교 이방성의 특성을 갖는 층이 임의의 각도로 적층된 쉘로서 Kirchhoff-Love의 기본가정에 전단변형효과를 고려하여 해석을 수행하였다. 즉, 변형 전 중립면에 수직인 단면은 변형 후 평면을 유지하지만 수직일 필요는 없다.¹¹⁾

2.1 좌표계와 변위장

본 해석모델의 좌표축을 직교 곡선 좌표계인 원통형 좌표계로 설정하였고, 변위와 함께 그림으로 표시하면 그림2.1과 같다. 여기서, x 축은 원뿔방향을, θ 축은 원주방향을, 그리고 z 축은 반경방향을 의미한다. u_x, u_θ, u_z 는 x, θ, z 방향의 변위를 나타내며, β_x, β_θ 는 x, θ 방향의 회전각변위를 나타낸다. 마찬가지로 외부에서 작용하는 등분포하중 q_x, q_θ, q_z 과 등분포모멘트 m_x, m_θ 를 변위에 맞게 정의하였다.

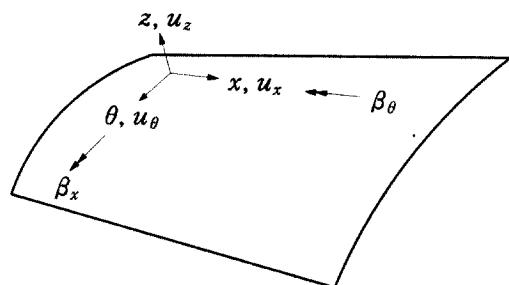


그림 2.1 원뿔형 쉘요소의 좌표계 및 변위장

2.2 변형률-변위 관계

전단변형효과를 고려한 원뿔형 쉘의 변형률-변위 관계식은 식(2.1)과 같고, x 및 쉘의 기울기 (α)는 그림2.2에 나타낸 것과 같다.⁷⁾

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^0 + zx_{xx} \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta}^0 + zx_{\theta\theta} \\
 \gamma_{\theta x} &= \gamma_{\theta x}^0 + zx_{\theta x} \\
 \gamma_{\theta z} &= \gamma_{\theta z}^0 \\
 \gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

여기서, 중립면의 변형률과 z 에 비례하는 곡률은 각각 식(2.2), 식(2.3)과 같다.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \\
 \varepsilon_{\theta\theta}^0 &= \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial u_\theta^0}{\partial \theta} + \frac{1}{x \tan \alpha} u_z^0 + \frac{1}{x} u_x^0 \\
 \gamma_{\theta x}^0 &= \frac{\partial u_\theta^0}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial u_x^0}{\partial \theta} - \frac{1}{x} u_\theta^0 \\
 \gamma_{\theta z}^0 &= \beta_\theta + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial u_z^0}{\partial \theta} - \frac{1}{x \tan \alpha} u_\theta^0 \\
 \gamma_{xz}^0 &= \beta_x + \frac{\partial u_z^0}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
 x_{xx} &= \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\
 x_{\theta\theta} &= \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{x} \beta_x \\
 x_{\theta x} &= \frac{\partial \beta_\theta}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial \beta_x}{\partial \theta} - \frac{1}{x} \beta_\theta
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.3 응력-변형률 관계식

본 논문에서 다루는 비등방성 헬이란 직교이방성인 각층이 임의의 각도로 적층된 헬을 말한다. 그림2.3은 임의의 층에서의 구조축과 재료축을 나타낸 것이다. x, θ, z 축은 구조축을, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 축은 재료축을, 그리고 ϕ 는 구조축과 재료축이 이루는 각도를 의미한다. 또한 그림2.3은 z 축과 α_3 축이 일치하고, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 축이 직교하는 직교이방성의 헬을 나타낸 것이다.¹⁰⁾

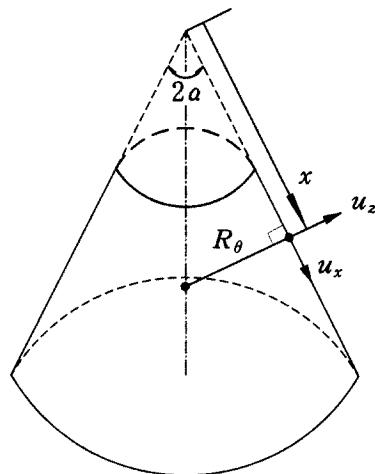


그림 2.2 x 및 쉘의 기울기(α)

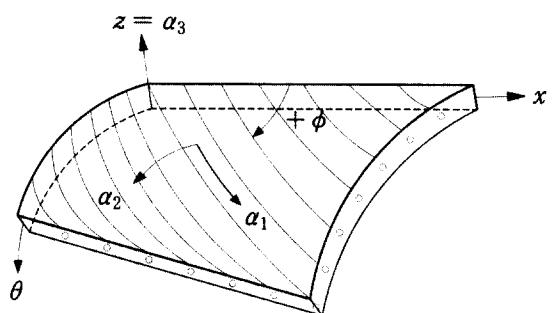


그림 2.3 보강된 층의 재료축 및 구조축

그림2.3으로부터 임의의 k 층에서의 구조축에 대한 응력-변형률 관계를 좌표변환을 통해서 유도할 수 있다.¹³⁾

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{\theta x} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{\theta x} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

여기서, $[\bar{Q}]$ 는 재료축에서의 재료강도를 구조축으로 좌표변환하여 구한 재료강도를 나타낸다.

2.4 합동력

그림2.4는 원뿔형 쉘요소의 면내력을, 그리고 그림2.5는 원뿔형 쉘요소의 면외력을 나타낸 것이다. N_{xx} , $N_{\theta\theta}$, $N_{\theta x}$ 는 면내력을, M_{xx} , $M_{\theta\theta}$, $M_{\theta x}$ 는 모멘트를, 그리고 Q_{xz} , $Q_{\theta z}$ 는 전단력을 의미한다. 부호규약은 그림에 표시한 방향을 +로 설정하였으며, () \bullet , () \circlearrowright 는 충분량을 의미한다.

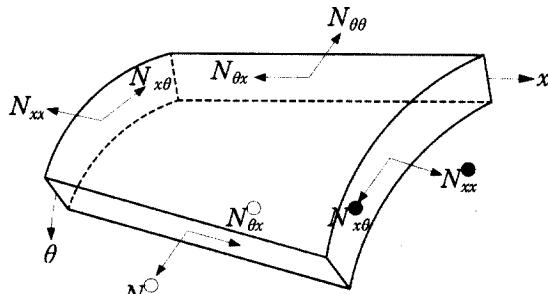


그림 2.4 원뿔형 쉘요소의 면내력

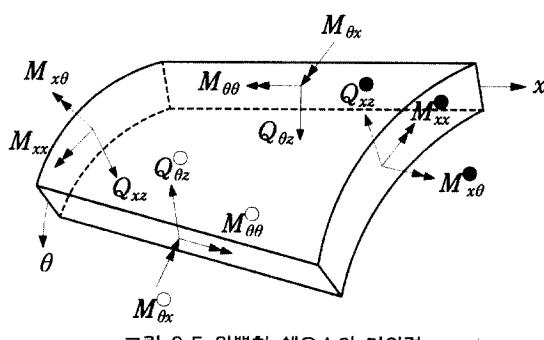


그림 2.5 원뿔형 쉘요소의 면외력

그림2.4, 2.5에 나타난 합동력들은 각 응력을 총 두께 t 에 대하여 적분하여 구할 수 있다.¹⁰⁾

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{\theta x} \\ M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{\theta x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{\theta\theta}^0 \\ \gamma_{\theta x}^0 \\ x_{xx} \\ x_{\theta\theta} \\ x_{\theta x} \end{pmatrix} \quad (2.5.a)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{xz} \\ Q_{\theta z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{\theta z}^0 \end{pmatrix} \quad (2.5.b)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k - z_{k-1}) \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ A_{ij} &= K \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k - z_{k-1}) \quad (i, j = 4, 5) \end{aligned} \quad (2.6)$$

이고, A_{ij} 는 면내력 강도, B_{ij} 는 휨-면내력 연계강도, D_{ij} 는 휨강도 그리고 K 는 전단보정계수를 의미한다.

2.5 평형방정식

전단변形효과를 고려한 원뿔형 쉘의 평형방정식은 다음과 같다.⁷⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{x} (N_x - N_\theta) &= -q_x \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{x \tan \alpha} Q_\theta + \frac{2}{x} N_{x\theta} &= -q_\theta \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{x \tan \alpha} N_\theta + \frac{1}{x} Q_x &= -q_z \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - Q_x + \frac{M_x}{x} - \frac{M_\theta}{x} &= -m_x \\ \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_\theta + \frac{2}{x} M_{x\theta} &= -m_\theta \end{aligned} \quad (2.7)$$

식(2.7)에 합동력 식(2.5)를 대입하여 정리하면 식(2.8)과 같이 평형방정식을 하중과 변위의 관계로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_x \\ -q_y \\ -q_z \\ -m_x \\ -m_y \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

여기서, $L_{11}, L_{12}, L_{13} \dots$ 는 부록에 수록하였다.

3. 수치해석의 적용

경계조건이 복잡하거나 다양한 경우, 하중조건이 복잡하거나 여러 가지일 경우 및 재료의 배치가 임의의 보강방향을 가지는 비등방성일 경우 해석해를 구하기는 거의 불가능하다. 이와 같이 해석해를 구하기가 어렵거나 구할 수 없는 복잡한 구조물을 해석하기 위해서는 수치해석 기법을 적용해야 한다.

본 논문에서는 여러 가지 수치해석 기법 중 유한차분법을 사용하였다. 유한차분법은 적층판이나 웨일의 기본방정식을 효과적으로 근사화시키는 수치해석기법으로서 수렴성과 결과치의 안정성을 제공한다. 또한 기본방정식을 수학적인 근사방법으로 간편하게 변환하여 정리할 수 있으므로 판이나 웨일과 같은 연립 편미분방정식을 기본방정식으로 갖는 구조체의 해석 시 편리한 수치해석 기법이다.

임의점에서의 차분방정식은 식(2.8)에 나타낸 기본방정식을 변위에 대한 1계 및 2계 도함수의 차분식을 적용하여 얻을 수 있다. 해석모델의 내부점에서는 이웃하는 점들의 정보를 모두 알고 있으므로 중앙차분법만으로 차분방정식을 구성할 수 있다. 그러나 자유단에서는 내부점과는 달리 미지의 가상점이 생기므로 이 가상점을 경계조건을 이용하여 내부점으로 치환해야 한다.

한 점에 대한 차분식이 구성되면 임의의 i 선상에서 모든 j 점에서의 변위를 나타내는 차분방정식으로 다음과 같이 표시할 수 있다.¹⁾

$$[A]\{X\}_{i-1} + [B]\{X\}_i + [C]\{X\}_{i+1} = \{F\}_i \quad (3.1)$$

여기서, $[A], [B], [C]$ 는 임의의 i 선상에서 5개의 종속변수로 표시된 모든 j 점의 변위에 대한 처짐방정식의 차분계수를 나타낸 부매트릭스를 의미하고, $\{X\}$ 는 변위벡터, $\{F\}$ 는 하중벡터를 의미한다.

구조물 전체에 대한 시스템 매트릭스는 식(3.2)와 같이 모든 j 점에 대해 식(3.1)에 나타낸 부매트릭스를 중첩하여 구성할 수 있다.

$$\{F\} = [K]\{X\} \quad (3.2)$$

여기서, $\{F\}$ 는 웨일 구조물 전체에 대한 하중벡터이며 식(3.3)과 같고, $\{X\}$ 는 웨일 구조물 전체에 대한 변위벡터이며 식(3.4)과 같으며 그리고 $[K]$ 는 웨일 구조물 전체에 대한 시스템 매트릭스를 의미하며 식(3.5)와 같은 형태로 나타난다. neq는 총 자유도 수를 의미한다.

$$\{F\} = \{F_1 \ F_2 \ F_3 \ \dots \ F_{neq}\}^T \quad (3.3)$$

$$\{X\} = \{X_1 \ X_2 \ X_3 \ \dots \ X_{neq}\}^T \quad (3.4)$$

$$[K_a] = \begin{bmatrix} [B] & [C] & & & [A]_c \\ [A] & [B] & [C] & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & [A] & [B] & [C] \\ & & & [C]_c & [A] & [B] \end{bmatrix} \quad (3.5.a)$$

$$[K_b] = \begin{bmatrix} [B_f] & [C_f] & & & [A_f]_c \\ [A] & [B] & [C] & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & [A] & [B] & [C] \\ & & & [C_f]_c & [A] & [B] \end{bmatrix} \quad (3.5.b)$$

식(3.5)에서 $[A]_c$, $[C]_c$ 는 셀의 형상이 원 주방향으로 폐합되어 있는 경우 $[A]$, $[C]$ 와 동일한 값을 갖고, 부분 원뿔형 셀인 경우는 0이 된다. 식(3.5.a)는 경계조건이 모두 고정인 경우이며, 식(3.5.b)은 자유단이 포함된 경우의 시스템 매트릭스이다.

변위벡터 $\{X\}$ 는 식 (3.2)에서 가우스 소거법 등을 이용하여 구할 수 있으며 합응력은 가우스 소거법 등을 이용하여 구한 변위를 합응력-변형률 관계식과 변형률-변위 관계식에 대입함으로서 구할 수 있다. 내부점에서는 중앙차분법을 적용하고, 경계점에서는 가상점이 생기므로 전방, 중앙, 후방차분법을 적절히 적용하여 구할 수 있다.

4. 해석 예 및 결과분석

4.1 해석모델

본 연구에서는 해석모델을 두 가지 즉, 폐합 원뿔형 셀에 반경방향으로 등분포 하중이 재하된 경우와 중심각의 각도가 120° 인 부분 원뿔형 셀에 반경방향으로 등분포 하중이 재하된 경우로 설정하였다. 경계조건은 고정경계 및 자유경계를 조합하여 적용하였고, 등분포하중은 반경방향으로 1 ksi 를 재하시켜 이에 따른 결과를 비교, 분석하였다.

본 연구에 대한 수치해석의 예로서 여러 가지 재료 중 Boron Fiber가 Epoxy Matrix에 재료축 방향으로 묻혀있는 직교이방성인 재료를 사용하여 각 층의 두께가 동일한 4개의 층을 임의의 방향으로 적층시켜 해석을 수행하였다. 각층을 구성하는 재료의 물성치는 표4.1과 같다.

표 4.1 Br.-Ep. 재료의 물성치(탄성계수의 단위는 ksi)

E_1	E_2	G_{23}	G_{13}	G_{12}	ν_{12}
30000.0	3000.0	600.0	1000.0	1000.0	0.3

4.2 수치해석 타당성 검증

4.2.1 수렴도 분석

수렴성 분석은 크게 두 가지 목적 즉, 본 연구에서 적용하는 유한차분법의 타당성 검증과 앞으로 분석하는 해석 예들의 적절한 분할수를 알기 위함이다. 일반적으로 수치해석은 분할수의 증가에 따라 정확해에 수렴하고 있으나, 분할수가 증가하면 반복적인 수치연산횟수가 증가함으로 이에 따른 절삭에리가 누적되어 오히려 부정확한 결과를 초래할 수 있는 단점이 있다. 따라서 본 절에서 분할수에 따른 수렴성을 분석하여 앞으로 분석하는 해석 예에 적절한 분할수를 정하기로 한다.

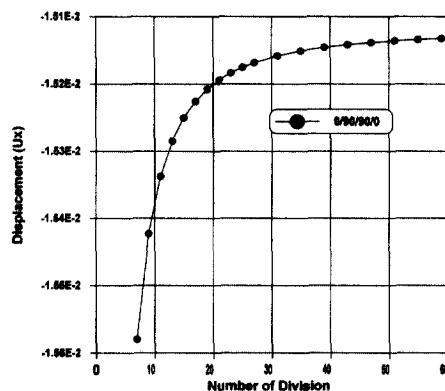


그림 4.1 분할수에 따른 중앙점의 원뿔방향
처짐의 수렴도

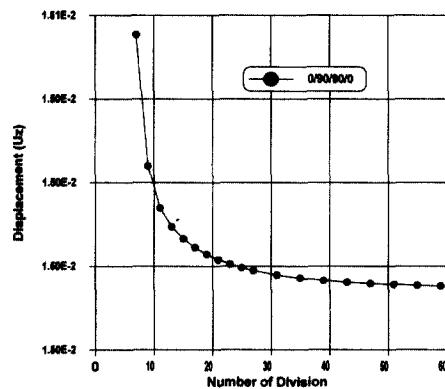


그림 4.2 분할수에 따른 중앙점의 반경방향
처짐의 수렴도

그림4.1과 그림4.2는 본 연구에서 적용하는 유한차분법의 타당성을 검증하기 위하여 재료의 보강각도가 [0/90/90/0]인 경우에 대해서 분할수를 증가시키면서 원뿔형 쉘 중앙점의 원뿔방향 처짐과 반경방향 처짐의 수렴도를 나타낸 것이다. 쉘의 총두께 1, 반경의 길이가 각각 10, 20이고 반경 중심에서 다른쪽 반경 중심까지의 길이가 100인 한단고정 한단자유인 폐합 원뿔형 쉘의 수렴도를 나타낸 것이다. 반지름이 작은 쪽이 자유단인 경우이다. 59×59 일 경우를 정확해로 본다면, 그림4.1, 4.2 두 경우 모두 21×21 이상에서 99%를 상회하는 수렴도를 보이므로 앞으로 분석하는 해석 예의 분할수를 21×21 로 설정하기로 한다. 또한 그림에서 u_x 가 원통형 쉘에서는 지배적인 항이 되지 못하지만, 이와 달리 원뿔형 쉘에서는 u_z 와 함께 지배적으로 영향을 미치고 있다. 이 이유는 원뿔형 쉘의 변형률-변위 관계식과 평형방정식에서 각각의 식들이 x 에 의해서 연계되기 때문이다.

4.2.2 ANSYS와 결과비교

수렴성 분석에 이어 본 항에서는 수치해석 결과의 타당성을 한층 더 높이기 위하여 유한요소법에 근거한 범용 구조해석프로그램인 ANSYS의 해석결과와 비교하였다. 범용 구조해석프로그램인 ANSYS의 해석결과와 비교하기 위해서 화이버가

표 4.2 ANSYS와의 결과 비교

분할수	중앙처짐값(u_z)
11×11	0.072448
21×21	0.071604
27×27	0.071517
35×35	0.071438
43×43	0.071367
51×51	0.071312
55×55	0.071290
59×59	0.071270
ANSYS (21×21)	0.069064

보강이 안된 등방성인 재료를 사용하여 비교하였다. 즉, 재료의 물성치는 $E_1 = E_2 = 3000 \text{ ksi}$, $\nu = 0.3$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = E_1 / 2(1 + \nu)$ 이고, 나머지 치수는 수렴성 분석할 때 사용했던 치수와 동일하다.

본 연구의 유한차분법을 이용한 원뿔형 쉘의 중앙처짐값과 ANSYS에 의하여 해석한 원뿔형 쉘의 중앙처짐값을 비교하여 표4.2에 나타내었다. 표에서 ANSYS결과와 본 연구의 결과값은 99% 이상 일치하고 있다. 일반적으로 유한요소법은 상계치를 갖고 유한차분법은 하계치를 갖는다는 것을 감안할 때 ANSYS 해석에서 요소수를 더 분할할수록 결과값은 더욱더 일치한다는 것을 예측할 수 있다.

4.3 쉘의 중심각 변화에 따른 결과분석

본 절에서는 쉘의 중심각 변화에 따른 처짐 및 합用力의 변화를 분석하였다. 화이버를 일정한 각도[0/90/90/0]로 보강하고 원뿔방향 길이와 x 축 중심점의 원주방향 길이를 1:1로 고정시켜 중심각을 60° 에서 360° 까지 60° 씩 증가시키면서

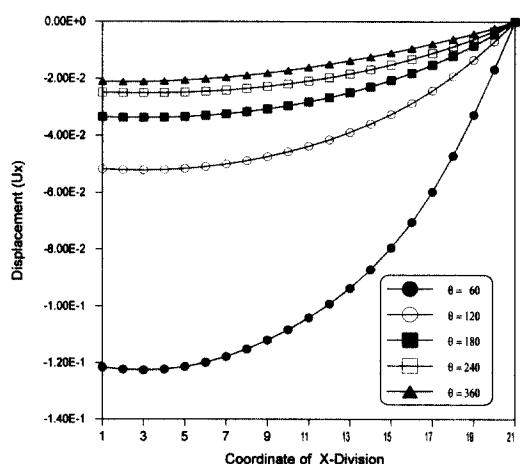


그림 4.3.a 자유단이 포함된 경우의 θ 축 중앙점에서 처짐 u_x 의 x 축상의 분포

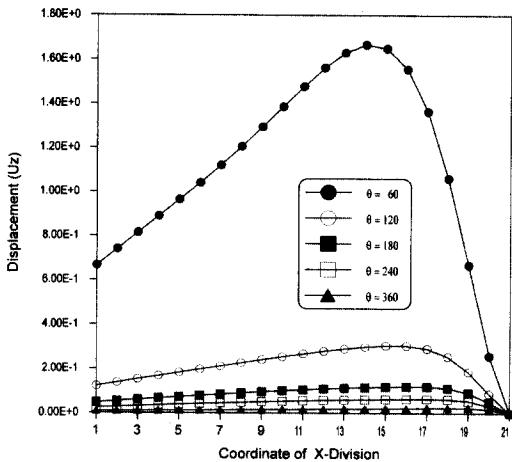


그림 4.3.b 자유단이 포함된 경우의 θ 축 중앙점에서
처짐 u_z 의 x축상의 분포

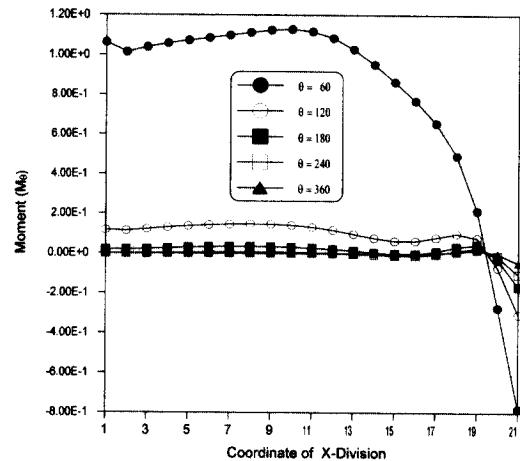


그림 4.4.b 자유단이 포함된 경우의 θ 축 중앙점에서
모멘트 M_θ 의 x축상의 분포

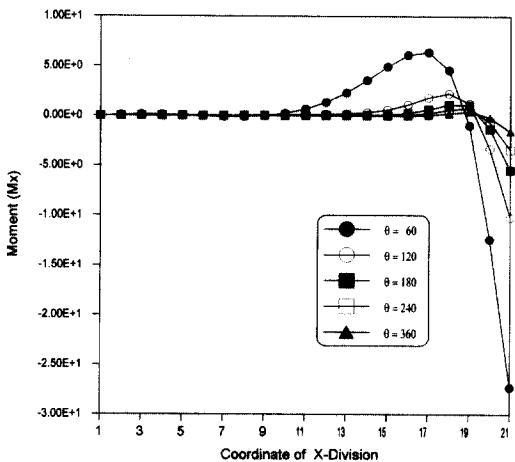


그림 4.4.a 자유단이 포함된 경우의 θ 축 중앙점에서
모멘트 M_x 의 x축상의 분포

중심각 변화에 따른 영향을 고찰하였다. 헬의 모델은 반경이 작은 쪽이 자유이고 나머지 경계는 고정인 경우이다. 여기서, 사용된 치수는 반경 중심에서 다른쪽 반경 중심까지의 길이가 100이고 작은 반경과 큰 반경의 비는 0.5이다.

그림4.3은 θ 축 중앙점에서 x 축상의 처짐분포를, 그림4.4는 θ 축 중앙점에서 x 축상의 합동력분포를 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 중

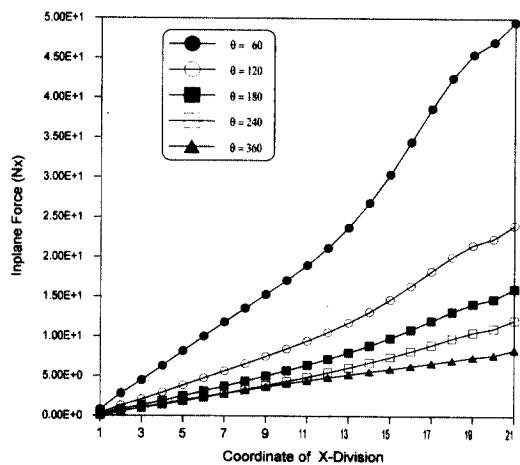


그림 4.4.c 자유단이 포함된 경우의 θ 축 중앙점에서
면단력 N_x 의 x축상의 분포

심각이 커질수록 즉, 곡률이 커질수록 처짐 및 합동력 모두 작게 나타났다. 따라서 변장비가 일정한 경우 헬의 곡률이 커질수록 즉, 헬이 폐합될수록 설계상 유리하다는 것을 알 수 있다.

4.4 화이버 보강각도에 따른 결과분석

본 절에서는 화이버 보강각도를 크로스-플라이

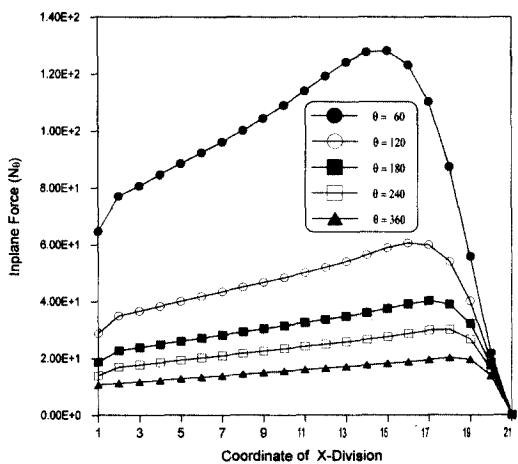


그림 4.4.d 자유단이 포함된 경우의 θ 축 중앙점에서 면내력 N_θ 의 x축상의 분포

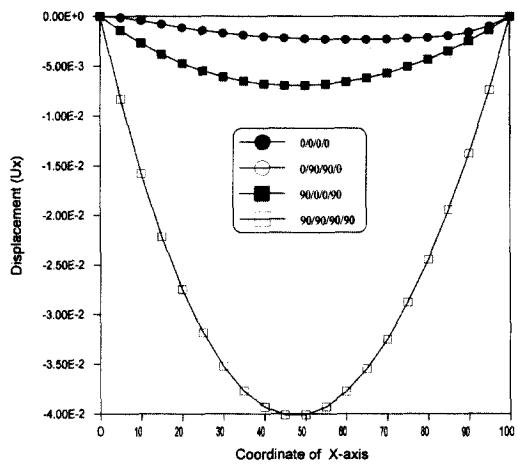


그림 4.5.a θ 축 임의점에서 처짐 u_x 의 x축상의 분포

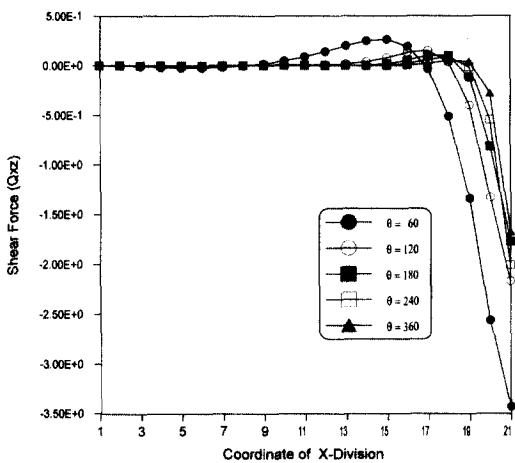


그림 4.4.e 자유단이 포함된 경우의 θ 축 중앙점에서 전단력 Q_{xx} 의 x축상의 분포

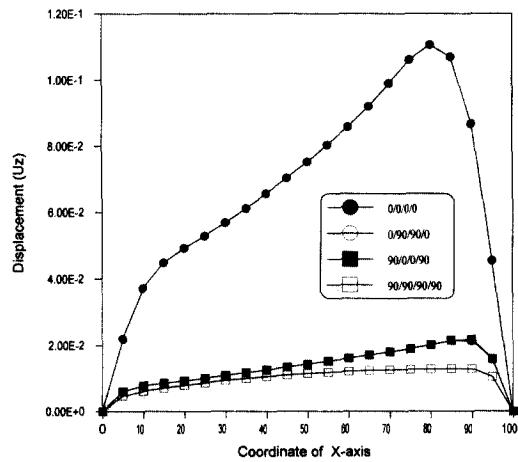


그림 4.5.b θ 축 임의점에서 처짐 u_z 의 x축상의 분포

경우 처짐 및 합동력의 변화를 분석하였다. 그림4.5는 크로스-플라이로 적층된 경우의 처짐 분포를, 그림4.6은 크로스-플라이로 적층된 경우의 합동력 분포를 나타낸 것이다.

쉘의 모델은 양단이 고정된 폐합 원뿔형 쉘로 설정하였다. 그림4.5에서 [0/0/0/0]로 적층된 경우는 u_z 값이 가장 크게 나타났으며 u_x 값은 가장 작게 나타났고, [90/90/90/90]로 적층된

경우는 그 반대의 현상을 보이고 있다. 따라서 그림에서 [0/0/0/0]에서 [90/90/90/90]로 보강 할수록 u_z 값은 작아지는 반면 u_x 는 상대적으로 커짐을 알 수 있다. 이것은 [0/0/0/0]로 적층된 경우는 강축이 x 축방향으로 보강된 경우이기 때문에 x 축방향의 강성이 커져서 u_x 값이 작아지고, [90/90/90/90]로 적층된 경우는 강축이 원주방향으로 보강된 경우이기 때문에 x 축방향의

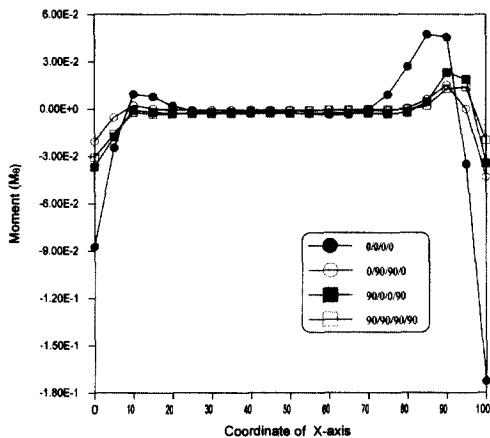


그림 4.6.a θ 축 임의점에서 모멘트 M_θ 의 x축상의 분포

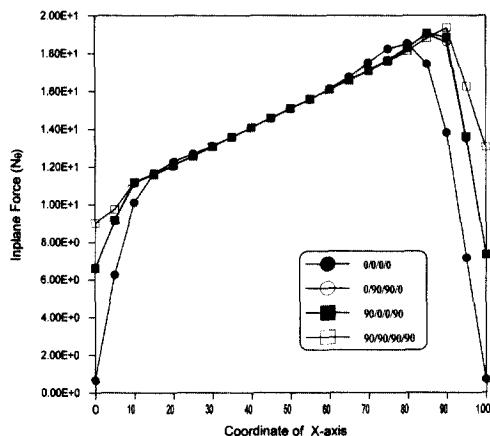


그림 4.6.b θ 축 임의점에서 면내력 N_θ 의 x축상의 분포

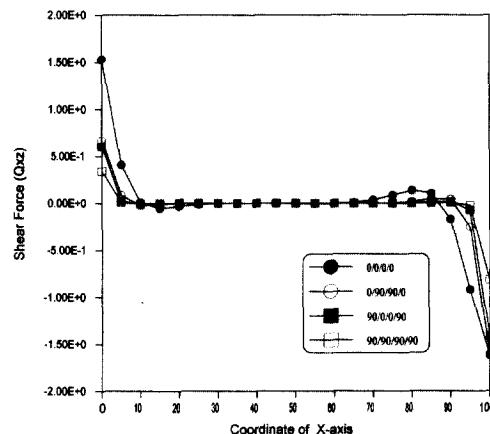


그림 4.6.c θ 축 임의점에서 전단력 Q_{xz} 의 x축상의 분포

강성이 [0/0/0/0]로 보강했을 때보다 작아져서 u_x 값이 커지기 때문이다.

이러한 점을 고려해서 u_x 가 지배적인 구조물은 강축을 x 방향으로 보강하고, u_z 가 지배적인 구조물은 원주방향으로 보강하면 강도를 높임과 동시에 경제적인 설계를 할 수 있을 것으로 기대된다.

그림 4.6의 합用力 분석에서도 처짐 분석과 마찬가지 현상을 보이고 있다. 즉, [0/0/0/0]로 적층했을 경우 u_x 가 지배적인 면내력 N_x , N_θ 은 작은 값을 나타냈으며 u_x 의 영향이 없고 u_z 의 영향이 지배적인 면외력 M_x , M_θ , Q_{xz} 은 큰 값을 나타내고 있고, [90/90/90/90]로 적층했을 경우는 그 반대이다.

5. 결 론

본 논문에서는 자유경계를 갖는 원뿔형 쉘의 정확한 거동을 유한차분법을 사용하여 분석하였다. 두께가 얇은 고전적인 쉘 이론에 전단변형효과를 고려하였고, 여기에 적층이론을 추가하였다. 수치해석의 타당성 검증을 위해서 쉘 중앙점의 반경방향 처짐과 원뿔방향 처짐의 수렴성을 검토하였고, 본 연구를 통해서 다음과 같은 몇 가지 결론을 얻을 수 있었다.

쉘의 중심각 변화에 따른 분석에서 중심각이 커질수록 즉, 곡률이 커질수록 처짐 및 합用力 모두 작게 나타났다. 따라서 변장비가 일정한 경우 쉘의 곡률이 커질수록 즉, 쉘이 폐합될수록 설계상 유리하다는 것을 알 수 있었다. 또한 자유경계를 갖는 경우 원뿔방향 처짐은 원주방향 처짐과 거의 등등하게 지배적인 영향을 미치고 있다는 것을 알 수 있었다.

화이버 보강각도가 모두 원뿔방향으로 적층된 경우는 반경방향 처짐이 가장 크게 나타났으며 원뿔방향 처짐은 가장 작게 나타났고, 모두 원주

방향으로 적층된 경우는 그 반대의 현상을 보이고 있다. 또한 크로스-플라이 분석에서 원뿔방향에서 원주방향으로 보강할수록 반경방향 처짐은 작아지는 반면 원뿔방향 처짐은 상대적으로 커짐을 알 수 있었다. 이러한 점을 고려해서 원뿔방향 처짐이 지배적인 구조물은 강축을 원뿔방향으로 보강하고, 반경방향 처짐이 지배적인 구조물은 원주방향으로 보강하면 강도를 높임과 동시에 경제적인 설계를 할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- (1) 손병직, 임성순, 장석윤, “양단고정 비동방성 폐합 원뿔형 쉘의 해석,” 한국강구조학회 학술 발표대회 논문집(pp.186-193), 1999
- (2) 장석윤, “Analysis of Anisotropic Laminated Cylindrical Shells,” 제3회 한일공동 강교량에 관한 학술발표회 논문집, 1994
- (3) 장석윤, 지효선, 한성천, “고차전단변형을 고려한 SPHERICAL 적층쉘의 자유진동,” 한국강구조학회 학술발표대회 논문집(pp.123~132) 1996
- (4) C.-P.Wu, Y.-C. Hung, “Asymptotic theory of laminated circular conical shells,” International Journal of Engineering Science ,V.37 N.8 ,1999-06-01
- (5) R.S. Bhatia, G.S. Sekhon, “Generation of exact stiffness matrix for a conical shell element,” Computers & Structures ,V.70 N.4 ,1999-02-01
- (6) L.Tong, “Free vibration of axially loaded laminated conical shells,” Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME ,V.66 N.3 ,1999-09-01
- (7) Werner Soedel, “Vibrations of Shells and Plates,” Marcel Dekker, Inc., 1981.
- (8) J. N. Reddy, “Energy and Variational Methods in Applied Mechanics,” John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- (9) Dirk J. Struik, “Lectures on Classical Differential Geometry,” Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1950.

- (10) J. N. Reddy, “Mechanics of Laminated Composite Plates,” CRC Press, 1997.
- (11) Stephen P. Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger, “Theory of plates and shells,” McGraw-Hill, 1959, 2nd Ed.
- (12) Wilhelm Flugge, “Stresses in Shells,” Springer-Verlag Berlin, 1973, 2nd Ed.
- (13) Robert M. Jones, “Mechanics of Composite Materials,” McGraw-Hill, 1975.
- (14) E.H.Baker & L.Kovalevsky & F.L. Rish, “Structural Analysis of Shells,” McGraw-Hill, 1972.
- (15) Valery V. Vasiliev & Robert M. Jones & Lucia I. Man, “Mechanics of Composite Structures,” Taylor & Francis, 1988.5.

부 록

식(2.8)에 나타난 계수들은 다음과 같다. 여기서 z_1, z_2, z_3 는 각각 $1/(x \sin \alpha)$, $1/(x \tan \alpha)$, $1/x$ 을 의미한다.

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{16} z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
 &\quad + A_{66} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + A_{11} z_3 \frac{\partial}{\partial x} - A_{22} z_3^2 \\
 L_{12} &= A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
 &\quad + A_{26} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - A_{26} z_3 \frac{\partial}{\partial x} \\
 &\quad - (A_{22} + A_{66}) z_1 z_3 \frac{\partial}{\partial \theta} + A_{26} z_3^2 \\
 L_{13} &= A_{12} z_2 \frac{\partial}{\partial x} + A_{26} z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial \theta} - A_{22} z_2 z_3 \\
 L_{14} &= B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{16} z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
 &\quad + B_{66} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + B_{11} z_3 \frac{\partial}{\partial x} - B_{22} z_3^2 \\
 L_{15} &= B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
 &\quad + B_{26} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - B_{26} z_3 \frac{\partial}{\partial x} \\
 &\quad - (B_{22} + B_{66}) z_1 z_3 \frac{\partial}{\partial \theta} + B_{26} z_3^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{21} &= A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
&\quad + A_{26} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (2A_{16} + A_{26}) z_3 \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad + (A_{22} + A_{66}) z_1 z_3 \frac{\partial}{\partial \theta} + A_{26} z_3^2 \\
L_{22} &= A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{26} z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
&\quad + A_{22} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + A_{66} z_3 \frac{\partial}{\partial x} - A_{66} z_3^2 - A_{44} z_2^2 \\
L_{23} &= (A_{26} + A_{45}) z_2 \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad + (A_{22} + A_{44}) z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial \theta} + A_{26} z_2 z_3 \\
L_{24} &= B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
&\quad + B_{26} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (2B_{16} + B_{26}) z_3 \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad + (B_{22} + B_{66}) z_1 z_3 \frac{\partial}{\partial \theta} + B_{26} z_3^2 + A_{45} z_2 \\
L_{25} &= B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{26} z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
&\quad + B_{22} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + B_{66} z_3 \frac{\partial}{\partial x} - B_{66} z_3^2 + A_{44} z_2 \\
L_{31} &= -A_{12} z_2 \frac{\partial}{\partial x} - A_{26} z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial \theta} - A_{22} z_2 z_3 \\
L_{32} &= -(A_{26} + A_{45}) z_2 \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad - (A_{22} + A_{44}) z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial \theta} + A_{26} z_2 z_3 \\
L_{33} &= A_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{45} z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
&\quad + A_{44} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + A_{55} z_3 \frac{\partial}{\partial x} - A_{22} z_2^2 \\
L_{34} &= (A_{55} - B_{12} z_2) \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad + (A_{45} - B_{26} z_2) z_1 \frac{\partial}{\partial \theta} - B_{22} z_2 z_3 + A_{55} z_3 \\
L_{35} &= (A_{45} - B_{26} z_2) \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad + (A_{44} - B_{22} z_2) z_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + B_{26} z_2 z_3 + A_{45} z_3 \\
L_{41} &= B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{16} z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
&\quad + B_{66} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + B_{11} z_3 \frac{\partial}{\partial x} - B_{22} z_3^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{42} &= B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
&\quad + B_{26} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - B_{26} z_3 \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad - (B_{22} + B_{66}) z_1 z_3 \frac{\partial}{\partial \theta} + B_{26} z_3^2 \\
L_{43} &= (B_{12} z_2 - A_{55}) \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad + (B_{26} z_2 - A_{45}) z_1 \frac{\partial}{\partial \theta} - B_{22} z_2 z_3 \\
L_{44} &= D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
&\quad + D_{66} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + D_{11} z_3 \frac{\partial}{\partial x} - D_{22} z_3^2 - A_{45} \\
L_{45} &= D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
&\quad + D_{26} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - D_{26} z_3 \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad - (D_{22} + D_{66}) z_1^2 \frac{\partial}{\partial \theta} + D_{26} z_3^2 - A_{45} \\
L_{51} &= B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
&\quad + B_{26} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (2B_{16} + B_{26}) z_3 \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad + (B_{22} + B_{66}) z_1 z_3 \frac{\partial}{\partial \theta} + B_{26} z_3^2 \\
L_{52} &= B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{26} z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
&\quad + B_{22} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + B_{66} z_3 \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad - B_{66} z_3^2 + A_{44} z_2 \\
L_{53} &= (B_{26} z_2 - A_{45}) \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad + (B_{22} + B_{66}) z_1 z_3 \frac{\partial}{\partial \theta} + B_{26} z_2 z_3 \\
L_{54} &= D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
&\quad + D_{26} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (2D_{16} + D_{26}) z_3 \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad + (D_{22} + D_{66}) z_1 z_3 \frac{\partial}{\partial \theta} + D_{26} z_3^2 - A_{45} \\
L_{55} &= D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} z_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
&\quad + D_{22} z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + D_{66} z_3 \frac{\partial}{\partial x} - D_{66} z_3^2 - A_{44}
\end{aligned}$$

(접수일자 : 2000년 4월 27일)