

2층 원통셸의 탄성 충격응답 해석

A Elastic Analysis for the Impact Response Analysis of Two-Layered Cylindrical Shells

박 승 진¹⁾ · 三上 隆²⁾

Park, Sung Jin MIKAMI, Takashi

요 약 : 충격하중을 받는 단순지지된 2층 원통셸의 탄성 충격응답해석에 대한 모델해석을 실시하였다. 2층 원통셸에 대한 지배방정식은 전단변형과 회전관성을 고려한 단층 수정셸 이론을 적용하여 충격하중을 받는 철-콘크리트 원통셸에 대해서 해석하였다. 수치결과에서 알 수 있듯이 응답의 기본적 특성 이해 및 유한요소법 등의 수치해법에 대한 정도 확립에 유효하게 이용될 수 있다고 생각한다.

ABSTRACT : A model analysis is used to predict the impact response of a simply supported elastic circular cylindrical shell composed of two bonded isotropic layers. The governing equations for a two-layered cylindrical shell are derived on the basis of an improved theory for the single-layer shell which includes the effects of transverse shear deformation and rotary inertia. Calculations are made for the specific case of the steel-concrete cylindrical shell subjected to a suddenly applied load. The solutions show that the method yields very good results. Therefore the proposed method is useful not only for a better investigating of the response characteristics of the shell but also available for a check on other numerical methods such a FEM.

핵심용어 : 2층 원통 셸, 고유함수전개법, 충격응답해석

KEYWORDS : two-layered cylindrical shells, normal-mode method, impact response analysis

1) 정회원, 인천전문대학 토목과 부교수 공학박사
2) 日本 北海道大學工學研究科社会基盤工學專攻構造工學講座 教授 工學博士

본 논문에 대한 토의물 2001년 6월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

1. 서론

충격하중을 받는 원통셀의 구조적 거동에 대한 특성은 오래 전부터 연구과제로 거론되어 왔다. 그러나 이들 대부분은 단일재료로 구성된 구조물이기 때문에 격심한 환경조건하에서 적합하다고 생각되는 이종재료인 복합 또는 합성구조물에 관한 연구에 대해서는 아직 초보적인 단계에 머무르고 있다.

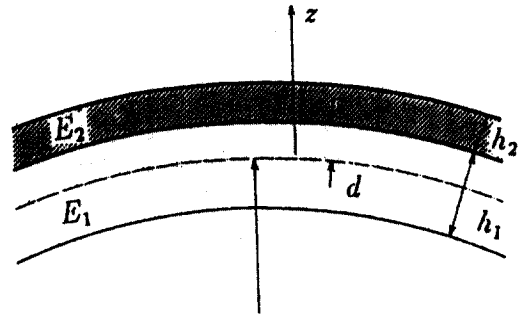
최근에는 이방성재료인 연속 섬유복합재료로 확장·발전시킨 다층 적층셀¹⁾의 해석도 거론되고 있지만, 이들 해석의 기초가 되는 등방성 재료로 구성된 2층 원통셀에 한정하면 Weingarten²⁾, Markus³⁾의 고유진동문제 해석, Bushnell⁴⁾의 동적응답 해석 등의 어느 경우도 응력파의 전파특성을 적절히 표현할 수 없는 고전셀 이론을 근거로 하였다.

따라서 본 논문에서는 셀두께가 비교적 두꺼운 경우에서 얇은 경우에 이르기까지 축방향의 응력과 전파특성을 거의 충실히 해석할 수 있는 수정셀 이론⁵⁾을 2층 원통셀에 적용하여 새로운 운동방정식을 유도하고, 충격하중을 받는 2층 원통셀의 동적거동을 고유함수전개법⁶⁾을 사용하여 해석하였다. 또한 운동방정식은 각 층의 재질이 등방성에서 휨과 신장의 연성강성이 영인 경우에 대해서만 성립하지만, 수치결과에서 알 수 있듯이 응답의 기본적 특성의 이해 및 유한요소법 등의 수치해법 정도 확립에 유효하게 이용할 수 있다고 생각한다.

2. 운동방정식

운동방정식의 유도에 대해서 ① 각 층은 완전히 접착되어 있으며, 접착면에는 상대적인 미끄러움이 없고, ② 각 층의 재질은 등방성으로 포아송비가 같다고 가정한다.

원통셀의 반경을 a , 길이를 L 로 나타내고, 경선



Reference surface

그림 1. 2층 원통셀

방향 좌표를 x , 원주방향 좌표를 $y(=a\theta)$, 법선 방향 좌표를 z 로 나타낸다. 좌표 (x, y, z) 에 대응하는 변위성분을 (u, v, w) 및 (x, y) 축에 수직인 단면의 회전각 성분을 (β_x, β_y) 로 한다. 합응력 및 합모멘트 성분을 $(N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, Q_x, Q_y)$ 및 $(M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx})$ 으로 표시한다. 시간을 t , 포아송비를 ν 로 나타내고, 각 층의 탄성계수 E , 두께 h 및 단위체적당 질량 ρ 를 각각 (E_1, E_2) , (h_1, h_2) 및 (ρ_1, ρ_2) 로 나타낸다. 단, 첨자 1은 내층의 층, 첨자 2는 외층의 층을 나타낸다(그림 1 참조).

위의 가정 ①, ②에 의하면 휨과 신장의 연성강성이 영이 되도록 새로운 참고면을 정할 수 있고, 위치 d (그림 1에서 2층의 경계면 거리)는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$d = \frac{(E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2)}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \quad (1)$$

새로운 참고면에 대해서 Mirsky-Herrmann⁴⁾의 단층 수정 원통셀 이론의 변형-변위 관계식을 사용하면 2층 원통셀의 합응력 및 합모멘트 성분은 다음과 같다.

$$N_x = K \frac{\partial u}{\partial x} + \nu K \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{a} \right) + D \frac{\partial \beta_x}{\partial x} / a \quad (2.1)$$

$$N_y = \nu K \frac{\partial u}{\partial x} + \left(K + \frac{D}{a^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{a} \right) - D \frac{\partial \beta_y}{\partial y} / a \quad (2.2)$$

$$N_{xy} = (1-\nu) \left(K \frac{\partial v}{\partial x} + D \frac{\partial \beta_y}{\partial x} / a + K \frac{\partial u}{\partial y} \right) / 2 \quad (2.3)$$

$$N_{yx} = (1-\nu) \left\{ K \frac{\partial v}{\partial x} + \left(K + \frac{D}{a^2} \right) \frac{\partial u}{\partial y} - D \frac{\partial \beta_x}{\partial y} / a \right\} / 2 \quad (2.4)$$

$$Q_x = x(1-\nu) K \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right) \quad (2.5)$$

$$Q_y = x(1-\nu) \left(K + \frac{D}{a^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{a} + \beta_y \right) \quad (2.5)$$

$$M_x = D \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} / a \right) \quad (2.6)$$

$$M_y = D \left(\nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} / a - \frac{w}{a^2} \right) \quad (2.6)$$

$$M_{xy} = (1-\nu) D \left(\frac{\partial v}{\partial x} / a + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} + \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right) / 2 \quad (2.7)$$

$$M_{yx} = (1-\nu) D \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial x} + \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} / a \right) / 2 \quad (2.8)$$

여기서 x 는 전단보정계수이며, K 와 D 는 식(3)과 같은 등가신장강성 및 등가휨강성이다.

$$K = \frac{E_1 h_1 + E_2 h_2}{(1-\nu^2)} \quad (3.1)$$

$$D = \frac{E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3 - 3(E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2)^2}{4(E_1 h_1 + E_2 h_2)} / 3(1-\nu^2) \quad (3.2)$$

여기서 등가두께를 h_0 , 등가탄성계수를 E_0 로 표기하면 식(3)을 식(4)과 같이 나타낼 수 있다.

$$K = \frac{E_0 h_0}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{E_0 h_0^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4)$$

식(2)는 식(4)와 같은 등가두께 h_0 및 등가탄성계수 E_0 의 단층 원통셀의 합응력 및 합모멘트 식과 같다.

$$h_0 = (12 D/K)^{1/2} \quad (5.1)$$

$$E_0 = (1-\nu^2)(K^3/12D)^{1/2} \quad (5.2)$$

2층 원통셀의 운동방정식은 변형에너지와 운동방정식을 이용하여 Hamilton 원리에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = \left(M_1 + \frac{M_2}{a} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(M_2 + \frac{M_3}{a} \right) \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{Q_y}{a} = \left(M_1 + \frac{M_2}{a} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left(M_2 + \frac{M_3}{a} \right) \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{N_y}{a} = \left(M_1 + \frac{M_2}{a} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_z \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = \left(M_2 + \frac{M_3}{a} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + M_3 \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = \left(M_2 + \frac{M_3}{a} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + M_3 \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} \quad (6.5)$$

여기서, p_z 는 법선방향의 작용하중이고, M_1 , M_2 , M_3 는 병진관성, 병진-회전관성 및 회전관성을 나타내는 다음 식이 된다.

$$M_1 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 \quad (7.1)$$

$$M_2 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) d - \frac{(\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2)}{2} \quad (7.2)$$

$$M_3 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) d^2 - (\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2) d + \frac{(\rho_1 h_1^3 + \rho_2 h_2^3)}{3} \quad (7.3)$$

식(2)를 식(6)에 대입하면 운동방정식은 변위 성분으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) + L_{14}(\beta_x) + L_{15}(\beta_y) = \left(a^2 \frac{M_1}{K} \right) \left(I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a I_2 \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \right) \quad (8.1)$$

$$L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) + L_{24}(\beta_x) + L_{25}(\beta_y) = \left(a^2 \frac{M_1}{K} \right) \left(I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a I_2 \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} \right) \quad (8.2)$$

$$L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) + L_{34}(\beta_x) + L_{35}(\beta_y) = \left(a^2 \frac{M_1}{K} \right) I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\frac{a^2}{K} \right) p_z \quad (8.3)$$

$$L_{41}(u) + L_{42}(v) + L_{43}(w) + L_{44}(\beta_x) + L_{45}(\beta_y) = \left(a^2 \frac{M_1}{K} \right) \left(I_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a I_3 \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \right) \quad (8.4)$$

$$L_{51}(u) + L_{52}(v) + L_{53}(w) + L_{54}(\beta_x) + L_{55}(\beta_y) = \left(a^2 \frac{M_1}{K} \right) \left(I_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a I_3 \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} \right) \quad (8.5)$$

여기서, 미분연산자 $L_{11} \sim L_{55}$ 는 다음과 같다.

$$L_{11} = a^2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + a^2 \gamma_1 (1+k) \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} \quad (9.1)$$

$$L_{12} = L_{21} = a^2 \gamma_2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial xy} \quad (9.2)$$

$$L_{13} = -L_{31} = \nu a \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \quad (9.3)$$

$$L_{14} = L_{41} = k a^3 \left\{ \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} - \gamma_1 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} \right\} \quad (9.4)$$

$$L_{22} = a^2 \gamma_1 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + a^2 (1+k) \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} - \gamma_1 x (1+k) \quad (9.5)$$

$$L_{23} = -L_{32} = a(1+k)(1+\gamma_1 x) \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \quad (9.6)$$

$$L_{25} = L_{52} = a^3 \gamma_1 k \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} - a^3 k \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} + a \gamma_1 x (1+k) \quad (9.7)$$

$$L_{33} = a^2 \gamma_1 x \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + a^2 \gamma_1 x (1+k) \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} - (1+k) \quad (9.8)$$

$$L_{34} = -L_{43} = a^2 \gamma_1 x \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \quad (9.9)$$

$$L_{35} = -L_{53} = a^2 \{ k + \gamma_1 x (1+k) \} \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \quad (9.10)$$

$$L_{44} = k a^4 \frac{\partial(\cdot)}{\partial x^2} + a^4 \gamma_1 k \frac{\partial(\cdot)}{\partial y^2} - a^2 x \gamma_1 \quad (9.11)$$

$$L_{45} = L_{54} = a^4 \gamma_2 k \frac{\partial(\cdot)}{\partial xy} \quad (9.12)$$

$$L_{55} = a^4 \gamma_1 k \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + a^4 k \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} - a^2 \gamma_1 x (1+k) \quad (9.13)$$

$$L_{15} = L_{51} = L_{24} = L_{42} = 0 \quad (9.14)$$

여기서,

$$\gamma_1 = \frac{(1-\nu)}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{(1+\nu)}{2} \quad (10)$$

또한

$$k = (D/K)/a^2 \quad (11.1)$$

$$I_1 = 1 + d/a - (h_1/a)(\alpha_2/\alpha_1)/2 \quad (11.2)$$

$$I_3 = (d/a)^2 - (d/a)(h_1/a)(\alpha_2/\alpha_1) + (h_1/a)^2(\alpha_3/\alpha_1)/3 \quad (11.3)$$

$$I_2 = I_1 + I_3 - 1 \quad (11.4)$$

여기서,

$$\alpha_1 = 1 + (\rho_2/\rho_1)(h_2/h_1) \quad (12.1)$$

$$\alpha_2 = (\rho_2/\rho_1)(h_2/h_1)^2 \quad (12.2)$$

$$\alpha_3 = 1 + (\rho_2/\rho_1)(h_2/h_1)^3 \quad (12.3)$$

식(8)에서 두께를 $h_1 = h_2 = h/2$, 탄성계수를 $E_1 = E_2 = E$ 밀도를 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ 로 두면 Mirsky-Herrmann⁵⁾의 단층 운동방정식이 된다.

$x=0$ 과 $x=L$ 에서 경계조건은 (u, N_x) , (v, N_{xy}) , (β_x, M_x) , (w, Q_x) , (β_y, M_{xy}) 의 조합으로 구성될 수 있으며 본 논문에서 다루는 양단 단 순지지에 대해서는 다음 식과 같다.

$$w = v = \beta_y = N_x = M_x = 0 \quad (13)$$

3. 자유 진동문제

식(13)의 경계조건을 만족하는 변위함수로서 다음 식을 사용한다.

$$u(x, y, t) = \sum_m \sum_n a U_{mn} \cos(\alpha x) \cos(ny/a) T_{mn}(t) = \sum_m \sum_n a U_{mn} T_{mn}(t) \quad (14.1)$$

$$v(x, y, t) = \sum_m \sum_n a V_{mn} \sin(\alpha x) \sin(ny/a) T_{mn}(t) = \sum_m \sum_n a V_{mn} T_{mn}(t) \quad (14.2)$$

$$w(x, y, t) = \sum_m \sum_n a W_{mn} \sin(\alpha x) \cos(ny/a) T_{mn}(t) = \sum_m \sum_n a W_{mn} T_{mn}(t) \quad (14.3)$$

$$\beta_x(x, y, t) = \sum_m \sum_n a X_{mn} \cos(\alpha x) \cos(ny/a) T_{mn}(t) = \sum_m \sum_n a X_{mn} T_{mn}(t) \quad (14.4)$$

$$\beta_y(x, y, t) = \sum_m \sum_n a Y_{mn} \sin(\alpha x) \sin(ny/a) T_{mn}(t) = \sum_m \sum_n a Y_{mn} T_{mn}(t) \quad (14.5)$$

여기서 $U_{mn} \sim Y_{mn}$ 는 고유 진동모드 계수,

$T_{mn}(t)$ 는 일반화 좌표, $\alpha = m\pi/L$ 이다.

식(8)에서 $p_z=0$, 식(14)에서 $T_{mn}(t) = \exp(i\omega t)$ [ω =고유원진동수]로 하고 식(14)를 식(8)에 대입하면 다음과 같은 고유진동수 방정식을 구할 수 있다.

$$[[K] - \Omega^2[M]]\{\Delta\} = \{0\} \quad (15)$$

단, 고유진동모드 계수를 성분으로 하는 벡터 Δ 와 무차원화 고유진동수 Ω_{mn}^2 은 다음과 같다.

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mn} \ V_{mn} \ W_{mn} \ X_{mn} \ Y_{mn}\} \quad (16.1)$$

$$\Omega_{mn}^2 = a^2 \omega^2 \frac{(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{K} \quad (16.2)$$

여기서, 매트릭스 $[K]$ 와 $[M]$ 의 영이 아닌 성분만을 표시하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_{11} = \lambda^2 + (1+k)n^2\gamma_1 \quad (17.1)$$

$$K_{12} = K_{21} = -\lambda n \gamma_2 \quad (17.2)$$

$$K_{13} = K_{31} = -\nu \lambda \quad (17.3)$$

$$K_{14} = K_{41} = k(\lambda^2 - n^2 \gamma_1) \quad (17.4)$$

$$K_{22} = \gamma_1 \lambda^2 + (1+k)(n^2 + x \gamma_1) \quad (17.5)$$

$$K_{23} = K_{32} = (1+k)(1+x \gamma_1)n \quad (17.6)$$

$$K_{25} = K_{52} = \gamma_1 x \lambda^2 - k n^2 - (1+k) x \gamma_1 \quad (17.7)$$

$$K_{33} = \gamma_1 x \lambda^2 + (1+k)(1+x \gamma_1 n^2) \quad (17.8)$$

$$K_{34} = K_{43} = \gamma_1 x \lambda \quad (17.9)$$

$$K_{35} = K_{53} = -(k+(1+k) x \gamma_1) n \quad (17.10)$$

$$K_{44} = k \lambda^2 + (x+k n^2) \gamma_1 \quad (17.11)$$

$$K_{45} = K_{54} = -\lambda n k \gamma_2 \quad (17.12)$$

$$K_{55} = \gamma_1 k \lambda^2 + k n^2 + (1+k) x \gamma_1 \quad (17.13)$$

$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = I_1 \quad (17.14)$$

$$M_{14} = M_{25} = M_{41} = M_{52} = I_2 \quad (17.15)$$

$$M_{44} = M_{55} = I_3 \quad (17.16)$$

여기서,

$$\lambda = \frac{m \pi a}{L} \quad (18)$$

4. 충격 응답해석

자유진동문제에서 고유진동모드 직교성의 Norm J_{mn} 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$J_{mn} = \int_0^L \int_0^{2\pi a} [I_1(U_{mn}^2 + V_{mn}^2 + W_{mn}^2) + 2I_2(X_{mn}U_{mn} + Y_{mn}V_{mn}) + I_3(X_{mn}^2 + Y_{mn}^2)] dx dy \quad (19)$$

고유함수 전개법 (Normal-mode 법)^{6,7)}에 의하면 일반화좌표 $T_{mn}(t)$ 에 대한 다음의 2계 미분 방정식을 구할 수 있다.

$$\frac{d^2 T_{mn}(t)}{dt^2} + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = Q_{mn}(t) \quad (20)$$

여기서, $Q_{mn}(t)$ 는 Norm J_{mn} 및 병진관성 M_1 을 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$Q_{mn}(t) = \int \int p_z W_{mn} dx dy / (J_{mn} M_1) \quad (21)$$

변위와 속도가 영인 초기응력에 대한 식(20)의 해는

$$T_{mn}(t) = \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t Q_{mn}(\eta) \sin \omega_{mn}(t-\eta) d\eta \quad (22)$$

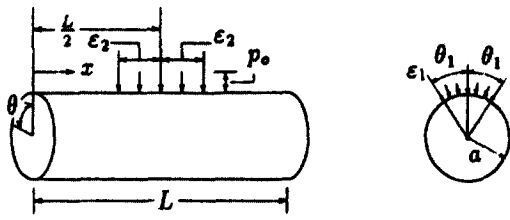
로 구할 수 있고, 충격하중하에서 2층원통셀의 변위 및 응력은 식(14), 식(2) 등으로 구할 수 있다.

5. 수치계산예

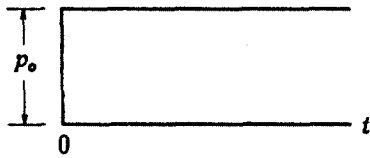
수치계산 모델은 그림 2와 같이 $L/2 - \epsilon_2 < x < L/2 + \epsilon_2 - \epsilon_1 < a\theta < \epsilon_1$ 의 영역으로 일정한 분포 하중(하중강도 p_0)이 시간에 대한 함수로 작용한 경우이다. 단면은 내측(1층)이 포아송비 $\nu=0.3$ 이며 콘크리트와 같은 탄성계수 E_1 의 재료, 외측(2층)은 포아송비가 1층과 같은 $\nu=0.3$ 에서 철과 같은 탄성계수 E_2 로 구성된 재료로 하고, 구조·재료 제원으로는 탄성계수비 $E_2/E_1=8.75$, 밀도비 $\rho_2/\rho_1=3.4$, 층두께비 $h_2/h_1=0.1$, 내층 두께 반경비 $h_1/a=0.085$, span 반경비 $L/a=3$ 및 전단보정계수 $\alpha=\pi^2/12$ 를 사용하였다. 하중 재하조건은 $\epsilon_2/\epsilon_1=1$, $\epsilon_2/L=0.05$ 이다. 또한 참고면은 2층 경계면에서 내측 $d=0.02068a$ 에 위치한다.

그림 3은 고유진동수 곡선(원주방향 파수 n 에 대한 고유진동수의 변화)을 축방향 파수 $m=1,3,5$ 에 대해서 보인 것이다. 이것을 보면 축방향 모드에 대한 최소의 고유진동수는 $n=2$ 또는 $n=3$ 인 것을 알 수 있다.

표 1은 $x=L/a$, $\theta=0$ 에서 변위 w , 축방향 응력(참조면 $z=0$ 에서 σ_x)의 시간 응답에 미치는



(a) Spatial distribution



(b) Time distribution

그림 2. 수치계산 모델

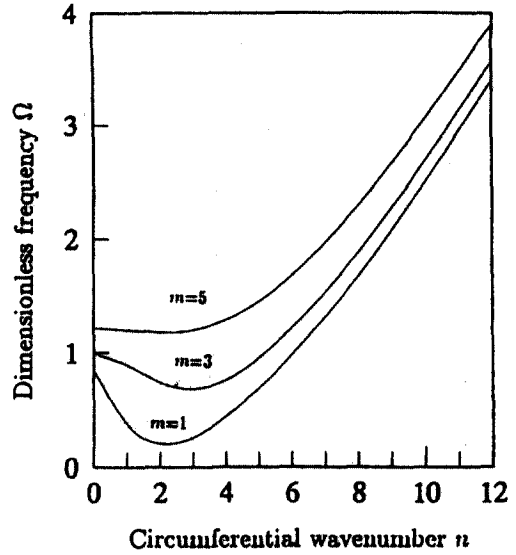


그림 3. 고유진동수 곡선

표 1. 수렴성의 검토 ($z=0, \theta=0$)

τ	$-E_1 w / a p_0$			$-\sigma_x / p_0$		
	$m=n=40$	$m=n=80$	$m=n=160$	$m=n=40$	$m=n=80$	$m=n=160$
2	0.6846	0.6848	0.6848	0.0162	0.0165	0.0164
6	3.9947	3.9947	3.9949	0.4852	0.4853	0.4853
10	6.2018	6.2019	6.2019	0.8141	0.8141	0.8141
50	4.5925	4.5924	4.5924	0.5286	0.5286	0.5286
100	4.1012	4.1008	4.1008	0.4805	0.4808	0.4808

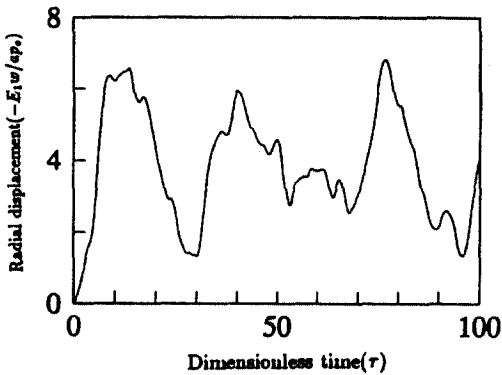


그림 4. 반경방향 변위 w 의 응답곡선
($x=L/2, \theta=0$)

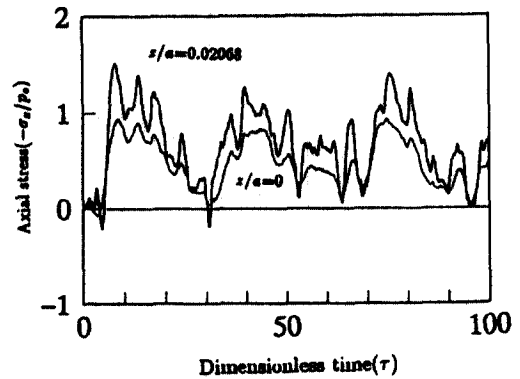


그림 5. 축방향 응력 σ_x 의 응답곡선
($x=L/2, \theta=0$)

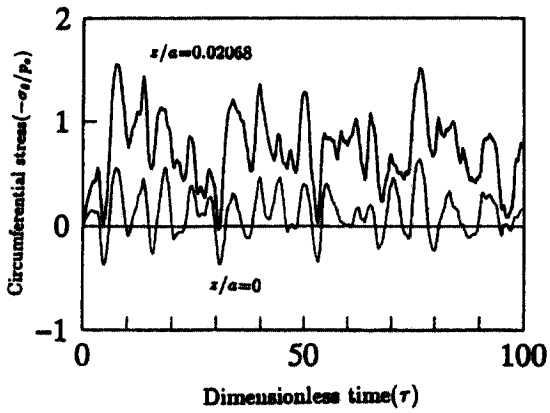


그림 6. 원주방향 응력 σ_θ 의 응답곡선 ($x=L/2, \theta=0$)

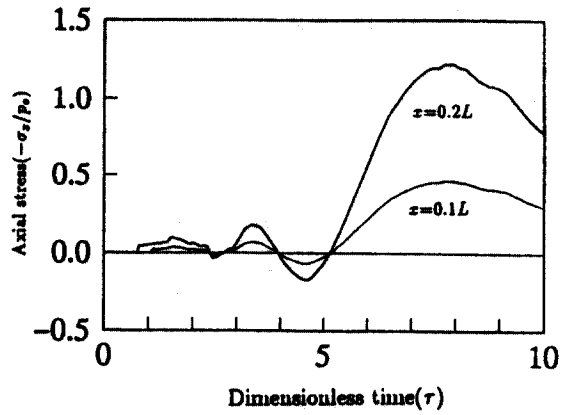


그림 7. 축방향 응력 σ_x 의 초기응답곡선 ($\theta=0$)

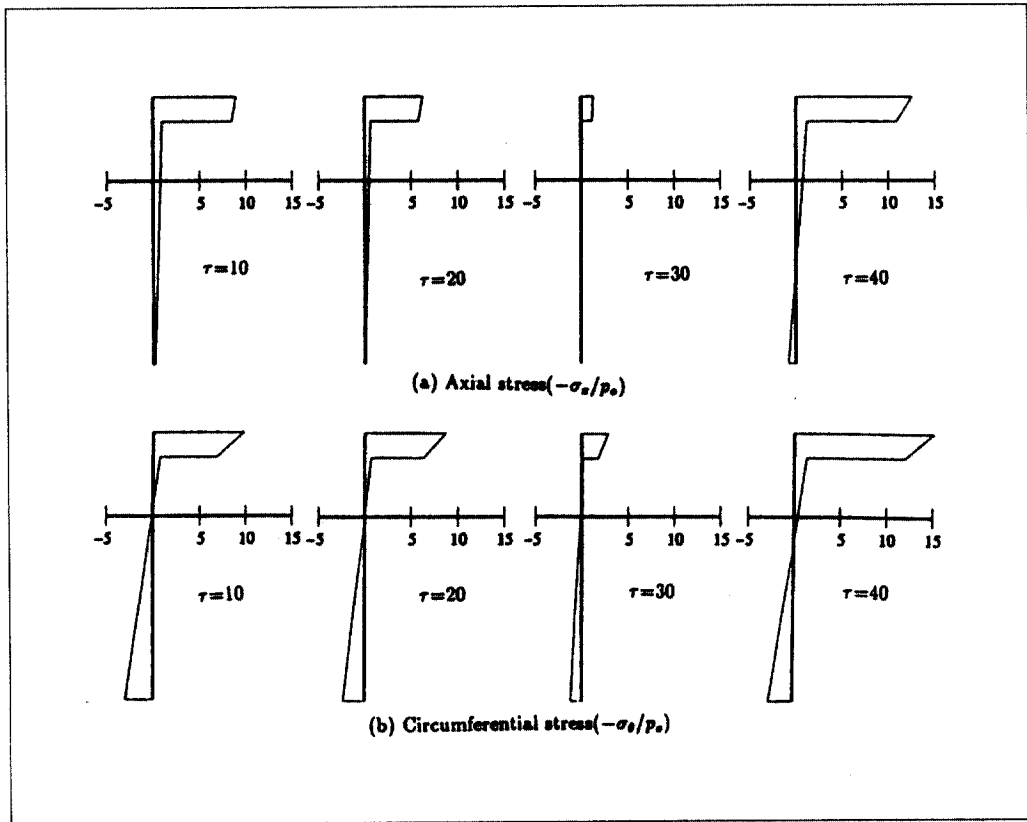


그림 8. 축방향 응력 σ_x 와 원주방향 응력 σ_θ 의 섹트개 방향의 분포상황 ($\theta=0$)

급수의 항수 m 과 n 의 영향을 조사한 것이다. 이에 의하면 m 과 n 의 어느 쪽도 수렴정도는 양호하고, 이하에서는 $m = n = 80$ 으로 사용하기로 한다.

그림 4는 span 중앙 $\theta=0$ 에서 반경방향변위 (w)의 시간응답을 본 것이다. 그림의 횡축은 무차원화 시간 $\tau=ct/a$ 를 나타낸다. 여기서 $c(=\sqrt{K/M_1})$ 는

$$c = \sqrt{\frac{E_1 h_1 + E_2 h_2}{(1-\nu^2)(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}}$$

로 표시되는 등가 세로파의 전파속도이다. 또한 그림에서 변위 w 는 $\tau=40$ 의 주기로 변동하고 있는 것을 알 수 있다.

그림 5 및 그림 6은 span 중앙 $\theta=0$ 에서 축방향 응력 σ_x 및 원주방향응력 σ_θ 의 시간응답을 본 것이다. 각 그림의 굵은 실선은 $z = d$ (내층과 외층의 경계면)의 응력을 나타내고, 가는 실선은 $z = 0$ (참조면)에서 내층의 막응력을 나타낸다.

그림에서 특이한 사항은 축방향 응력의 크기가 쉘의 양단에서 축방향 구속이 없음에도 불구하고, 축방향 관성력 때문에 원주방향응력과 같은 정도의 값이 발생하고 있다는 것이다.

응답 초기에는 축방향 응력에 인장응력이 발생한다는 것, 참조면에 있어서는 원주방향 응력에는 압축응력과 인장응력이 단주기에서 상호적으로 발생하는 것을 알 수 있다.

그림 7은 $x=0.1L$ 과 $x=0.2L$ 에서 $z = d$ 에서의 축방향 응력에 대한 초기응답을 나타낸 것이다. 응답은 하중 연단에서 발생한 등가전파속도 c 의 세로파 도착시각 $\tau=1.05$ 및 $\tau=0.75$ 에서 발생하고 있고, 응력파의 전파현상을 잘 나타내고 있다고 판단할 수 있다.

그림 8은 무차원화 시간 $0 < \tau < 40$ 의 시간대에 대한 축, 원주방향 응력의 쉘두께에 따른 분포를 보인 것이다. 외층(철)과 내층(콘크리트)의 경계

면에서 응력값의 불연속성은 탄성계수 값의 차이 ($E_2 > E_1$)에 의한 것이다. 그림 5 및 그림 6과 마찬가지로 내층에 인장응력이 발생하고 있고, 특히 아래 면의 원주방향 응력이 두드러지게 나타나는 것을 알 수 있다.

또한 지금까지 보인 응답의 최대값은 정적 최대 응답치의 약 1.5~2배이다.

6. 결론

본 연구는 단층 수정 원통셸 이론을 각층의 재질이 등방성으로 포아송비가 같은 2층 원통셸의 적용에 의해 새로운 기초방정식을 도입하여 고유함수전개법(Normal-mode 법)에 의한 충격응답 해석을 실시하였다.

본 해석결과는 수치결과에서 알 수 있듯이 응력파의 전파현상을 잘 나타내고 있고, 본 해석 방법에 대한 구조물의 기본적인 응답특성의 파악이나 다른 근사해법의 정도 비교에도 아주 유효하다고 판단된다.

참고 문헌

1. Vinson, J. R. and Sierakowski, R. M. : *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, Martinus Nijhoff Pub, 1986.
2. Weingarten, I. : *Free vibrations of multilayered cylindrical shells*, Experimental Mechanics, pp.200-205, 1964.
3. Markus, S. : *The Mechanics of Vibrations of Cylindrical Shells*, Elsevier, 1988.
4. Bushnell, D. : *Dynamic response of two-layered cylindrical shells to time-dependent loads*, AIAA J. pp.1698-1703, 1965.
5. Mirsky, I. and Herrmann, G. : *Nonaxially symmetric motion of cylindrical shells*, J. Acoust. Soc. Am., pp.1116-1123, 1957.
6. Magrab, E. B. : *Vibrations of Elastic*

- Structural Members*, Sijthoff & Noordhoff, 1979.
7. Reismann, H. and Medige, J. : *Forced motion of cylindrical shells*, Proc. ASCE, EM5, pp.1169-1182, 1968.
 8. Bassily, S. F. and Dickinson, S. M., "Buckling and Vibration of Inplane Loaded Plates Treated by Unified Ritz Approach", J. Sound Vib., 59, p.1, 1978.
 9. Baharlou, B. and Leissa, L. W., "Vibration and Buckling of Generally Laminated Composite Plate with Arbitrary Edge Conditions", Int. J. Mech. Sci., 29(8), p.545, 1987.
 10. Brown, J. E., Hutt, J. M., and Salama, A. E. : "Finite element solution to dynamic stability of bars", J. of AIAA, Vol. 6, 1968, pp.1423
 11. Kapur, K.K. and Hartz, B.J. : Stability of plates using the finite element method", J. of ASCE, Vol. 92, No. EM2, Proc. 1966, pp.177
 12. Stefan Markus : "The Mechanics of Cylindrical Shells", New York, McGraw-Hill Book Co. Inc, 1979.
 13. Roufaeil, O. L. and DAwe, D. J. : "Rayleigh-Ritz vibration analysis of rectangular mindlin plates subjected to membrane stresses", J. Sound Vib., Vol. 85, 1982, pp.263
 14. Dawe, D. J. and Moris, I. R. : "Vibration of curved plate assemblies subjected to membrane stresses", J. Sound Vib., Vol. 81, 1992, pp.229
 15. J. M. Hutt and A. E. Salam : "Dynamic stability of plates by finite elements", Proc. ASCE., Vol. 97, EM3 1971, pp.879

(접수일자 : 2000년 7월 4일)