

단일주파수 일방향파동방정식을 이용한 주시계산

신창수¹⁾ · 신성렬²⁾ · 김원식¹⁾ · 고승원³⁾ · 유해수⁴⁾

Travel Time Calculation Using Mono-Chromatic Oneway Wave Equation

Chang Soo Shin¹⁾, Sung Ryul Shin²⁾, Won Sik Kim¹⁾, Seung Won Ko³⁾ and Hai Soo Yoo⁴⁾

요 약 : 본 연구에서는 단일주파수 일방향파동방정식을 이용하여 주파수영역에서 얻어진 파동장을 델타함수(delta function)화하고 로그(logarithm)변환을 하여 정확하고 계산시간이 적은 새로운 주시계산 방법을 개발하였다. 주시 오차를 최소화하기 위하여 여러 가지 실험을 통해 격자간격과 주파수간의 경험식을 구하였다. 아이코날 방정식(eikonal equation)에 의해 얻어진 주시곡선이나 유한차분 모델링을 이용해서 얻은 스냅샷(snapshot)의 파면 등, 다른 주시 계산 방법들에 의한 결과가 본 연구에서 얻은 결과와 아주 유사하였다. 위 두 가지 방법과 달리 본 알고리즘은 투과파의 주시만을 계산한다. 본 연구에 의해서 구한 주시를 이용하여 구조보정을 해 본 결과, 원 모델과 아주 유사한 좋은 단면을 얻을 수 있었다. 본 연구의 결과를 볼 때 이 새로운 주시계산 알고리즘은 지하구조보정과 투과 토모그래피(transmission tomography)에 필요한 직접파의 주시를 더 빨리 계산하는 방법이다.

Abstract : A new fast algorithm for travel time calculation using mono-chromatic one-way wave equation was developed based on the delta function and the logarithms of the single frequency wavefield in the frequency domain. We found an empirical relation between grid spacing and frequency by trial and error method such that we can minimize travel time error. In comparison with other methods, travel time contours obtained by solving eikonal equation and the wave front edge of the snapshot by the finite difference modeling solution agree with our algorithm. Compared to the other two methods, this algorithm computes travel time of directly transmitted wave. We demonstrated our algorithm on migration so that we obtained good section showing good agreement with original model. our results show that this new algorithm is a faster travel time calculation method of the directly transmitted wave for imaging the subsurface and the transmission tomography.

Keywords : oneway wave equation, travel time, mono-chromatic

서 론

정확하고 효율적인 주시계산은 투과 토모그래피, 굴절 토모그래피(refraction tomography), 지진학 및 키르히호프 구조보정에 필수적이다. 주시를 계산하기 위한 파선추적법은 간단한 파선발사법(shooting ray tracing)(Cassell, 1982; Cerveny *et al.*, 1977, Daley *et al.*, 1999)에서 시작하여 유한차분법을 이용한 아이코날 방정식의 해(Vidale, 1988, 1990)와 2점 파선추적법(Um and Thurber, 1987; Pereyra, 1988) 등이 발표되었다. Coultrip(1993)은 불규칙한 지형을 가진 복잡한 모델에서 주시계산을 하기 위해 굴절파를 계산하는 파면 기법(wavefront

method)을 이용하였다. Coultrip의 기법은 음원으로부터 지표에 도달하는 굴절파를 계산할 수 있으며, Shin *et al.*(1999)은 Coultrip의 기법을 굴절 토모그래피에 적용하였다.

그러나, 파선추적법의 문제점은 음영대(shadow zone)가 발생할 수가 있어서 이를 해결하기 위해 파선의 발사각을 아주 잘게 두게 되면 계산시간이 많이 소요된다. 또한 이렇게 구한 주시는 지표에서 키르히호프 구조보정에 이용할 수 있도록 사각형의 격자에 맞게 내삽을 해주어야 한다.

Vidale(1988)은 음원과 수신점사이의 초동을 계산하기 위하여 아이코날 방정식을 이용하였는데, 기존의 파선이론에 의해 파가 도달할 수 없는 곳에서도 주시를 계산할 수 있다. 또한

*2000년 12월 7일 접수

1) 서울대학교 지구환경시스템공학부(School of Civil, Urban and Geosystem Engineering, Seoul National University)
2) 한국해양대학교 해양개발공학부(Department of Energy and Resource Engineering, Korea Maritime University)
3) 한양대학교 자원공학과(Department of Mineral Petroleum Engineering, Hanyang University)
4) 한국해양연구소 해저유물·자원연구센터(Archeology and Geosources Research center, Marine archeology, Korea Ocean Research and Development Institute)

키르히호프 구조보정에 필요한 사각형 격자에 맞게 주시를 구할 수 있어 내삽을 할 필요가 없다. 그러나 아이코날 방정식에 의해 구해진 초동은 굴절된 파가 먼저 도달한 경우에는 굴절파를 초동으로 계산하므로, 기존의 키르히호프 구조보정에 부적절한 주시가 계산되기도 한다.

본 연구에서는 일방향파동방정식을 이용하여 사각형 격자에 대하여 주시를 계산하는 알고리즘을 개발하였으며, 이 알고리즘을 이용하여 전형적인 지하지형 모델에서 상향 전파되는 굴절파들을 제거할 수 있었다. 몇 가지 모델에 적용하여 본 주시 계산 방법의 적합성을 검토하였으며, 키르히호프 구조보정에 적용하여 본 주시가 구조보정에 적합한가를 검증하였다.

이 론

본 연구에서는 Lee and Suh(1985) 등에 의해서 최적화 방법으로 구한 근사파동방정식을 이용하여 최대 90°의 급경사면까지 처리할 수 있는 주시계산 알고리즘을 개발하였다.

주파수 영역에서의 90도 근사 일방향파동방정식(Claerbout, 1985; Ma, 1981; Berkout, 1979; Lee and Suh, 1985)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial U(x,z,w)}{\partial z} = i \frac{w}{v} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \partial_{xx}}{\left(\frac{w}{v(x,z)}\right)^2 + \beta_k \partial_{xx}} \right] U(x,z,w) + f(x,z) \quad (1)$$

여기서, k 는 일방향파동방정식의 Pade 근사차수, α_k 와 β_k 는 분산오차(Lee and Suh, 1985)를 최소화할 수 있는 계수, $U(x, z, w)$ 는 파동장, x 는 수평거리, z 는 수직거리, w 는 각주파수, $f(x, z)$ 는 음원, $v(x, z)$ 는 속도를 나타낸다. 식 (1)을 유한차분법으로 전개하면 일방향파동방정식을 이용한 임펄스 반응(Impulse response)인 주파수 영역의 파동장을 얻을 수 있게 된다. 일반적인 쌍곡선 파동방정식(hyperbolic wave equation)과는 달리 일방향파동방정식에서는 시간영역파동장인 $u(x, z, t)$ 가 하향 또는 상향으로만 전파한다. 그래서 하향의 파동장만 계산할 경우에 다중 반사파나 상향으로 전파하는 굴절파 등이 생기지 않으므로, 본 연구에서 구하고자 하는 직접 투과된 주시계산에 적절하다. 주파수영역에서 파동장을 구하므로 한가지 고려되어야 할 사항은 두루마리 현상(Wrap Around, W. A.) 현상이다. 이 영향을 없애기 위하여 Rosenbaum(1978)이 제안한 푸리에 변환에서의 shifting 이론 성질을 이용하여 식 (1)의 주파수를 복소 각주파수로 사용하였다.

$$w_\epsilon = w + i\epsilon \quad (2)$$

여기서, w_ϵ 은 복소 각주파수, ϵ 는 W.A.S.(Wrap Around Suppression, 두루마리 현상 억제) 계수이다. 계수 ϵ 를 적용하면 W. A. 현상을 없앨 수 있는 것 외에 또 한 가지의 장점은

전체 시간영역의 해가 $e^{-\epsilon t}$ 를 곱한 것과 같은 것이 되어서 2-D 격자점에서의 파동장을 델타함수처럼 변환시킬 수 있다. 그러므로 시간영역 파동장 $u(x, z, t)$ 는 다음처럼 표현할 수 있다.

$$u(x, z, t) \equiv A(x, z) \delta(t - \tau(x, z)) \quad (3)$$

여기서, t 는 시간이며, $\tau(x, z)$ 는 음원으로부터 격자점까지 도달한 주시, $A(x, z)$ 는 파가 음원에서 격자점까지 도달하였을 때의 진폭, δ 는 디랙 델타 함수이다.

지금까지 본 알고리즘에 사용된 일방향파동방정식의 근사식에 대해 알아보았고, W. A. S. 계수를 적용하여 시간영역의 파동장을 델타함수로 단순화시켜서 음원에서 각 지점까지 도달한 파의 진폭과 주시의 곱으로 나타낼 수 있음을 살펴보았다.

식 (1)에서 모델링을 통해서 얻는 파동장은 주파수 영역의 파동장이다. 주파수 영역의 파동장에서 주시는 다음의 변환을 통해서 얻을 수 있다. 식 (1)과 식 (3)의 시간 및 주파수 영역의 파동장들은 일반적인 푸리에 변환에 의해 다음과 같은 관계를 가진다.

$$U(x, z, w) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, z, t) e^{-iw t} dw \quad (4)$$

식 (4)에서의 시간영역 파동장 $u(x, z, t)$ 는 식 (3)에서 델타함수로 나타낼 수 있음을 이미 확인하였다. 식 (3)의 우변을 식 (4)에 대입하고, 일반적으로 푸리에 변환을 위해 여러 개의 주파수 값을 사용하는 대신에 특정 주파수 w_0 를 하나만 사용하게 되면 식 (4)는 다음처럼 표현될 수 있다.

$$U(x, z, w_0) \equiv A(x, z) e^{iw_0 \tau(x, z)} \quad (5)$$

식 (5)의 양변을 로그변환을 하게 되면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\log(U(x, z, w_0)) \equiv \log(A(x, z)) + iw_0 \tau(x, z) \quad (6)$$

식 (6)의 허수부분을 각주파수 w_0 로 나누어주게 되면, 음원에서 각각의 격자점까지의 주시 $\tau(x, z)$ 를 구할 수 있다.

기존의 주파수 영역 모델링에서 필요한 파라미터를 구할 경우에는 푸리에 변환을 위하여 여러 개의 주파수를 이용하였으나, 언급한 대로 본 알고리즘에서는 단 하나의 주파수만을 사용하므로 주파수 영역의 파동장에서 바로 주시를 계산할 수 있고, 계산에 소요되는 전체 시간도 아주 짧아진다.

최적의 주파수와 W.A.S. 계수

프로그램 언어 포트란(fortran)이나 C로 복소수에 대해서 계산을 할 때는 결과를 $-\pi$ 에서 π 까지의 범위에서 얻을 수 있다. 이러한 성질 때문에 탄성과 신호의 위상 스펙트럼을 얻을 때, 사이클 스킵현상이 발생하게 된다. 이러한 현상을 피하기 위해서는 충분히 작은 주파수를 사용하면 되므로 본 연구에서

는 주시 계산 시에 사용되는 주파수를 $w\tau(x, z)$ 가 $-\pi$ 에서 π 의 범위에 들어갈 수 있도록 저주파수를 사용하였다. 최적의 주파수와 최대주시와의 관계는 다음과 같다.

$$\frac{-1}{2\tau_{\max}} \leq f_{\text{optimum}} \leq \frac{1}{2\tau_{\max}} \quad (7)$$

여기서, τ_{\max} 는 최대 주시이고, f_{optimum} 은 최적의 저주파수이다. 예를 들어, 구하고자하는 모델에서 최고로 계산해야할 주시가 12초라고 하면, 최적의 주파수는 0.04166 Hz보다 작아야 한다.

W. A. S. 계수와 격자간격과의 관계는 여러 가지 경우에 대해 계산을 해 본 결과 다음과 같은 경험식으로 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon = \exp[-1.013653 \ln(\Delta x) + 4.551333] \quad (8)$$

여기서 Δx 는 수평방향의 격자간격이다. 위 식 (8)을 통해서 W. A. S. 계수를 구하여 본 연구의 주시 계산에 적용하였다.

모델 적용

본 연구에서는 일방향파동방정식의 근사식을 이용하여 주시 계산을 위한 알고리즘을 개발하였으며, 알고리즘에 필요한 여러 가지 파라미터들을 구하였다.

먼저, 본 연구의 알고리즘이 주시계산에 적합 여부 및 오차가 어느 정도인가를 파악하기 위하여 상속도 모델에 대하여 주시 및 해석적인 해와의 오차를 계산하였다.

Fig. 1은 상속도 모델에서 구한 주시를 0.1초 간격으로 그린 것이다. 모델의 속도는 1000 m/s로 하였으며 격자간격은 5m로 하였다. 모델의 크기는 수평방향으로 2.5 km, 심도방향으로 1.25 km이다. 음원은 지표면의 중앙 점에 두었다.

그림에서 별표로 나타낸 것이 음원의 위치이고, 양쪽에 둔 수신기는 음원에서 1 km 떨어진 지점을 나타낸다. 수신기에 해당하는 주시곡선이 정확히 1초가 됨을 알 수 있다. Fig. 2는 Fig. 1에서 계산된 주시와 해석적인 해와의 RMS 퍼센트 오차

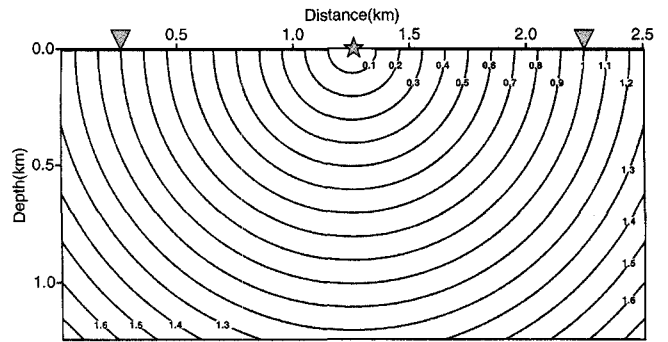


Fig. 1. Travel time contours of the homogeneous half space model. Velocity of the model is 1000 m/s.

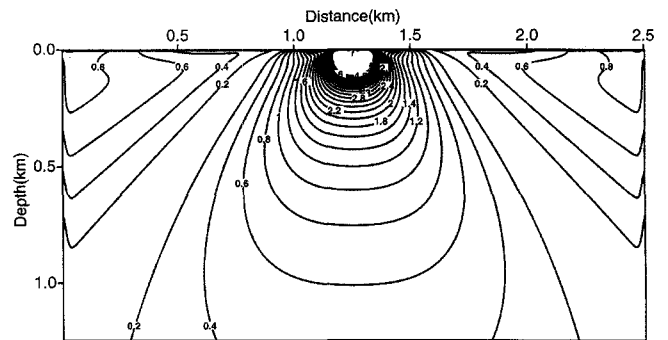


Fig. 2. RMS error between the travel time of this study and the analytic solution.

를 도시한 그림이다. Fig. 2에서 볼 수 있듯이 음원에서 양쪽 하부로 45° 방향으로 오차가 가장 작으며, 음원에 아주 가까운 부분을 제외하고는 모든 부분이 오차가 1%보다 작다. Fig. 1과 Fig. 2의 결과를 통해 상속도 모델에서 본 알고리즘이 정확하게 적용됨을 확인하고서 실제 지형에 근접한 약간 복잡한 모델을 실험해 보았다.

Fig. 3과 4는 단층과 저속도 층을 포함하는 지층 구조를 묘사한 속도모델에 본 알고리즘과 Vidale(1988)의 알고리즘을 적

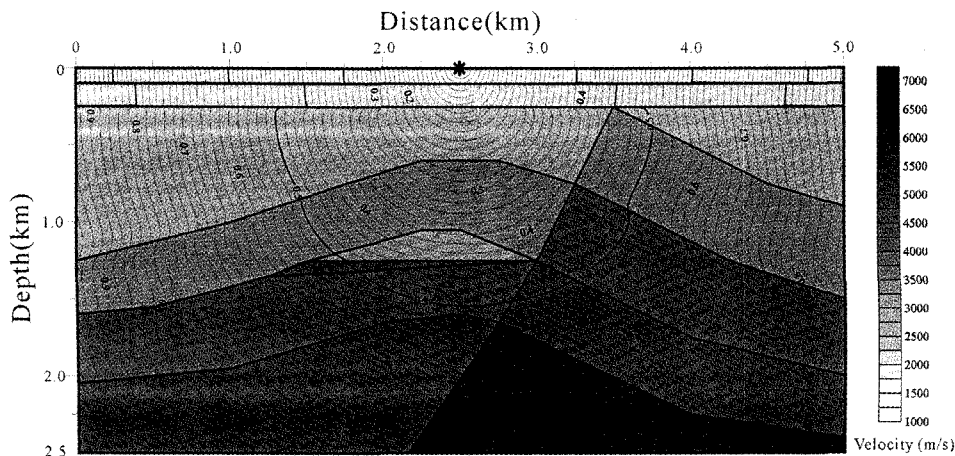


Fig. 3. Travel time contours calculated by this study.

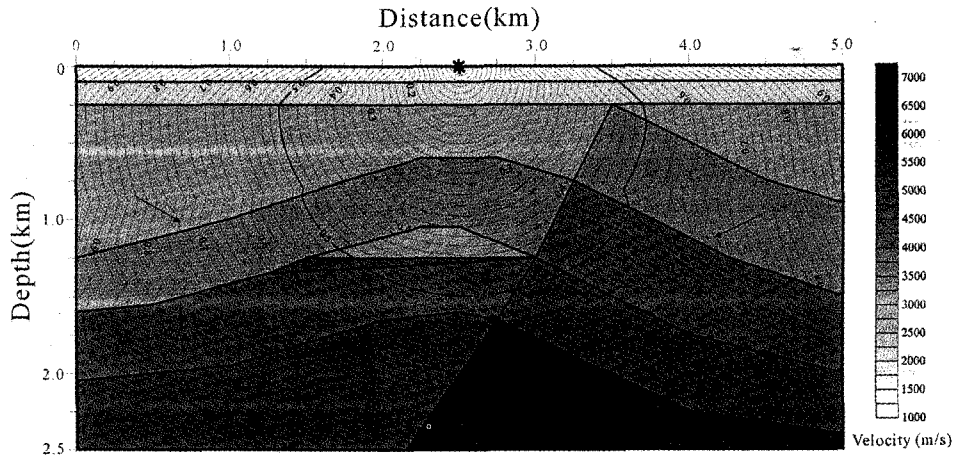


Fig. 4. Travel time contours calculated by Vidale's (1988) finite-difference method.

용시킨 결과이다. 두 가지 모두 음원을 지표의 중앙 점에 음원을 두었다. Fig. 3에서 보듯이 각 층의 경계면 뿐 아니라 단층 구조 및 저속도 층에서도 주시가 적절하게 구해짐을 알 수 있다. 굵은 실선은 음원에서의 주시가 0.5초인 지점을 연결한 선이다. Fig. 4의 Vidale(1988)의 알고리즘에 의해 구한 주시곡선은 얇은 심도의 수평층 뿐 아니라, 화살표로 표시한 부분에서 굴절파가 초동의 주시로 계산되고 있다. 굵은 실선은 음원에서의 주시가 0.5초인 지점을 연결한 선이다. Fig. 3과 Fig. 4의 두 굵은 실선 및 다른 주시곡선들을 비교해 볼 때, 굴절파가 초동으로 계산되는 구역을 제외하고는 아주 유사한 주시곡선 형태를 보이고 있다. Fig. 5는 2-D 파동방정식을 모델링해서 얻은 0.6초에서의 스냅샷(snapshot)과 본 연구의 방법으로 구한 주시를 비교한 그림이다. 본 알고리즘에서 얻은 0.6초의 지점을 연결한 주시와 2-D 모델링을 통해 얻은 파면이 아주 유사함을 보여주고 있다.

비교적 단순한 지질구조를 나타내는 모델들에서 본 알고리즘이 주시계산에 유효함을 확인하고, 구조보정 및 주시계산이 어렵다고 알려진 마무시(marmousi) 모델에 대하여 본 알고리즘을 적용하여 보았다. 본 연구에 적용한 마무시 모델은 격자 간격이 24m인 모델로서 수평방향으로 9.2 km, 심도가 2.9 km이다. 음원은 수평방향으로 각각 1/4, 2/4, 3/4 지점인 2.3 km, 4.6 km, 6.9 km 지점에 두었다. Fig. 6(a), 6(b), 6(c)는 각각 본 알고리즘으로 구한 음원이 수평방향의 1/4, 2/4, 3/4인 지점일 때 본 알고리즘 및 Vidale의 방법으로 구한 주시를 0.2초 간격으로 도시한 그림이다. 두 주시곡선 중 실선으로 그린 것이 본 알고리즘에 의한 것이고 파선으로 나타낸 것이 Vidale의 알고리즘에 의한 것이다. Vidale의 방법은 앞서 언급한 대로 굴절파의 주시를 초동으로 계산하는 경우가 있으므로 직접 투과파만 계산하는 본 알고리즘과 전체적인 비교는 어려우나, 그림에서 양 굵은 수직실선 안쪽의 음원에서 가까운 곳은 굴절파가 잘 생성되지 않는 곳으로 양 알고리즘이 주시를 비교하는 것이 가능한 지역이다. 그림에서 보듯이 음원에서 가까운 수직하

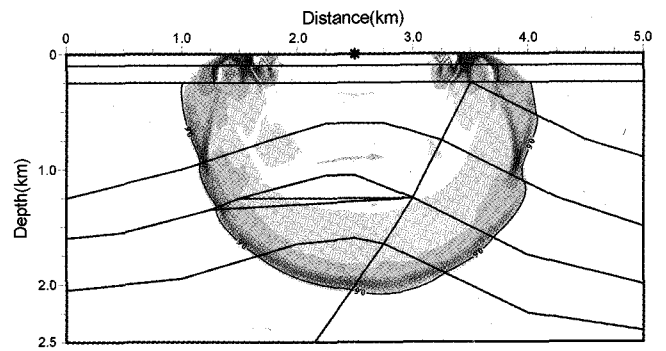


Fig. 5. Superimposed the contour of the travel time at 0.6 second with the wavefront edge generated by the finite difference modeling technique.

부지역은 양 방법이 큰 차이 없이 아주 유사한 결과를 보이고 있다.

키르히호프 구조보정

위 여러 가지 모델에 대한 적용을 통해서 본 연구에 의해 구해진 알고리즘이 직접 투과된 주시계산에 아주 우수함을 확인하였다. 모델 테스트를 통해 검증된 본 주시가 실제로 키르히호프 구조보정에 유효한가를 확인하기 위하여 Fig. 6의 마무시 모델에 대하여 키르히호프 구조보정을 실시하여 보았다.

Fig. 7은 마무시 모델에 대하여 본 연구에 의해 구한 주시를 적용시켜 키르히호프 구조보정을 수행한 심도구조보정 단면도이다. 음원의 위치는 수평방향 3 km부터 9 km까지 두었으며, 각 음원에 대한 영상화 구역(image zone)은 음원의 양방향으로 1 km으로 하였으며, 영상화 구역의 격자간격은 2.5m이다. 그림에서 보는 바와 같이 단층구조가 정확히 보여지고 있고 암염동 하부의 배사구조가 잘 영상화되고 있다. 따라서 본 연구에서 개발된 주시 계산 알고리즘은 키르히호프 구조보정을 위한 초동 주시 계산에 효과적으로 사용될 수 있음을 확인할

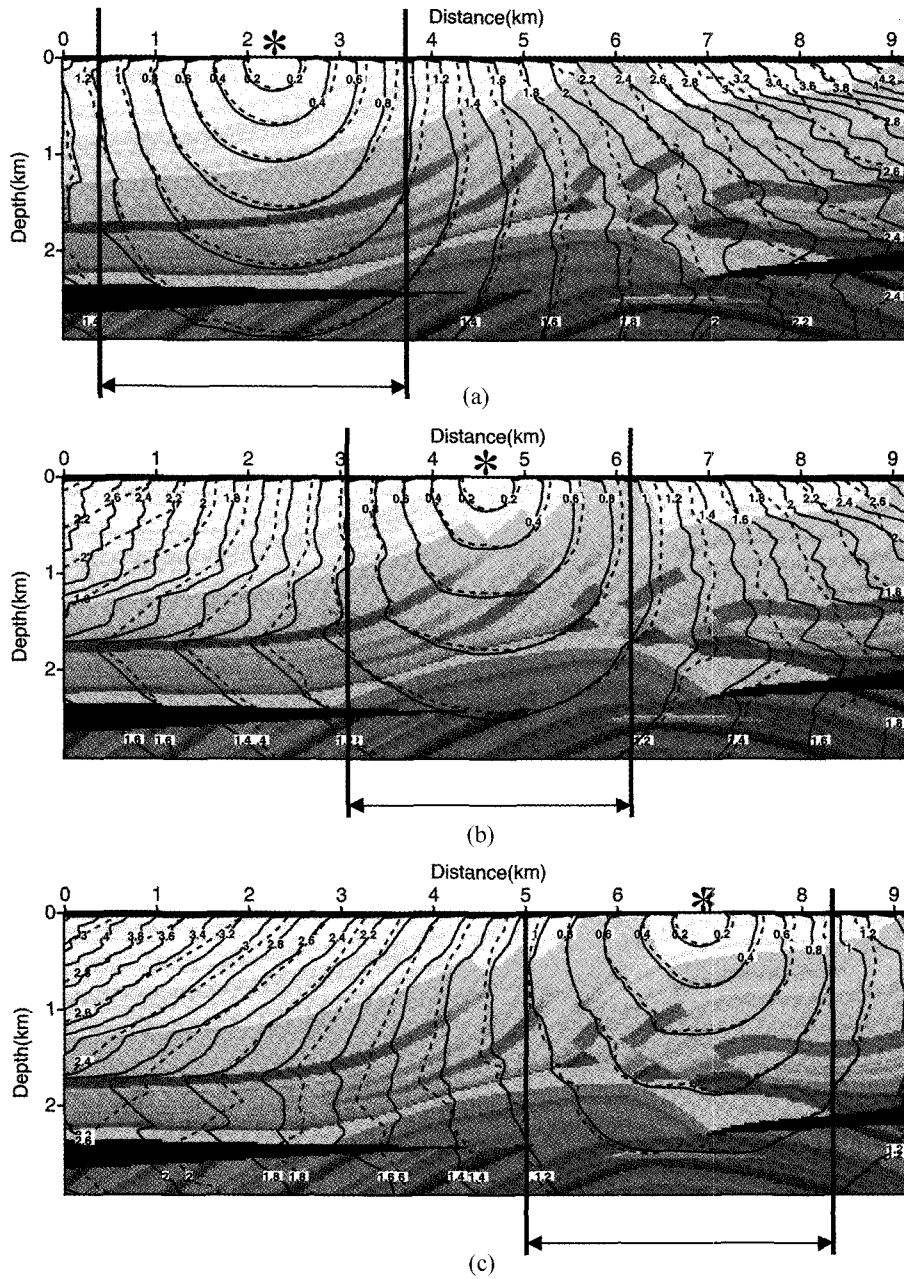


Fig. 6. (a) Superimposed travel time contours calculated by this study with the travel time contours by Vidale, where the source is located at 2.3 km, (b) 4.6 km and (c) 6.9 km of the surface, respectively.

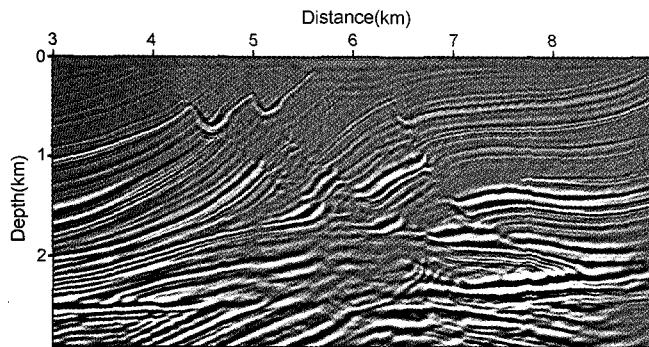


Fig. 7. Depth migrated section using travel time by this study.

수 있었다.

결론

본 연구에서는 일방향파동방정식의 90도 근사식을 이용하여 구조보정 및 투과토포그래피에 필요한 직접 투과파를 계산하는 주시계산 알고리즘을 개발하였다. 단일주파수를 이용하여 간단한 로그변환으로 주시를 구할 수 있었으며, 계산시간도 작게 소요되었다. Vidale법 등 다른 기존의 방법들과 본 알고리즘에 의해 구해진 주시를 비교해 본 결과, 유사한 결과를 보여

본 알고리즘의 유효성을 확인 할 수 있었다. 복잡한 마무시 모델에서도 정확하게 주시를 구할 수 있었고, 키르히호프 구조보정을 시행해 본 결과 본 주시가 구조보정에 적합한 투과파의 주시를 계산함을 확인하였다. 이상의 결과로 볼 때, 본 연구를 통해 구한 주시를 구조보정 및 투과토폴로그래피에 이용하여 좋은 결과를 얻을 수 있으리라 기대된다. 또한 본 알고리즘은 3-D로의 확장이 용이하여 앞으로 3-D 주시계산도 충분히 가능할 것으로 기대된다.

참고문헌

- Berkout, A. J., 1979, Steep dip finite-difference migration: *Geophys. Prosp.*, **27**, 196-213.
- Cassell, B. R., 1982, A method for calculating synthetic seismogram in laterally varying media: *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **38**, 9-19.
- Claerbout, J. F., 1985, *Imaging the earth's interior*: Blackwell Scientific Publications.
- Cerveny, V., Molotkov, I. A., and Psencik, I., 1977, *Ray methods in seismology*: Univ. of Karlova Press.
- Coultrip, L., 1993, High-accuracy wavefront tracing calculation: *Geophysics*, **58**, 284-292.
- Daley, P. F, Marfurt, K. J., and McCarron, E. B., 1999, Finite-element raytracing through structurally deformed transversely isotropic formations: *Geophysics*, **64**, no. 3, 954-962
- Julian, B. R. and Gubbins, D., 1977, Three-dimensional seismic ray tracing: *J. Geophys. Res.*, **43**, 95-114.
- Lee, M. W. and Suh, S. Y., 1985, Optimization of One-Way Wave equation: *Geophysics*, **50**, 1634-1637.
- Ma, Z., 1981, Finite-difference migration with higher-order approximation: Presented at the 1981 joint meeting at the China Geophysical Society and Soc. of Expl. Geophys. Beijing, China.
- Officer, C. B., 1957, *Introduction to the theory of sound transmission with application to the Ocean*, McGraw-Hill Book Company, Inc.
- Pereyra, V., 1988, Numerical methods for inverse problems in three-dimensional geophysical modeling: *Appl. Numer. Math.*, **4**, 97-139.
- Rosenbaum, 1978, personal communication.
- Shin, C., Ha, J., and Jeong, S., 1999, Refraction tomography by blocky parameterization: *Journal of Seismic Exploration*, **8**, 143-156.
- Um, J. and Thurber, C., 1987, A fast algorithm for two-point seismic ray tracing: *Bull. Seis. Soc. Am.*, **77**, 972-986.
- Vidale, J. E., 1988, Finite-difference calculation of travel times in three dimensions: *Geophysics*, **55**, 521-526.
- Vidale, J. E., 1988, Finite-difference travel time calculation: *Bull. Seis. Soc. Am.*, **78**, 2062-2076.