

태양대기모델 계산법 CALCULATION METHODS OF SOLAR ATMOSPHERIC MODEL

김갑성
 경희대학교 우주과학과

KAP-SUNG KIM

Department of Astronomy & Space Science, Kyung Hee University, Yong-In

E-mail: kskim@khu.ac.kr

Received Dec. 11, 2000; Accepted Dec. 23, 2000

ABSTRACT

We have investigated the numerical methods to calculate model atmosphere for the analysis of spectral lines emitted from the sun and stars. Basic equations used in our calculations are radiative transfer, statistical equilibrium and charge-particle conservations. Transfer equation has been solved to get emitting spectral line profile as an initial value problem using Adams-Bashforth-Moulton method with accuracy as high as 12th order. And we have calculated above non linear differential equations simultaneously as a boundary value problem by finite difference method of 3 points approximation through Feautrier elimination scheme. It is found that all computing programs coded by above numerical methods work successfully for our model atmosphere.

Keywords: model atmosphere, ABM method, Feautrier method

I. 서 론

별의 대기모델은 그동안 많은 연구자들(Mihalas 1978; Auer et al. 1972; Vernazza et al. 1981; Kim 1987; 김갑성 1990; Rutten 1999)에 의해 체계적으로 다루어져 있는데 교과서적인 것으로서는 미할라스의 항성대기가 대표적으로 알려져 있다. 대기모델은 기본적으로 우리가 납득할 수 있는 질량, 운동량, 에너지의 보존 법칙을 동시에 만족시키는 물리적 구조로서 태양처럼 그 방출스펙트럼이 매우 잘 측정되고 정확히 알려진 경우는 그를 완벽히 재현해 주는 대기 모델이 구해져 있는데 우리는 이러한 모델에서 방출되는 분광선을 계산할 수 있다.

본 연구에서는 태양 대기를 잘 재현한 것으로 알려진 VAL(Vernazza et al. 1981) 등의 대기모델을 대상으로 광구 자기장으로 인해 편광된 복사선의 세기변화 및 방출 분광선을 계산하고자 초기치 문제로 편광복사전달식을 푸는 방법과 이를 경계치 문제로 다루는 방법에 대해 논의한다. 그리고 평면평행한 평판구조의 모델대기에서 방출되는 분광선을 계산하기 위해 경계치 문제로 취급하여 완전 선형화 기법으로 비선형 편미분 연립방정식인 복사전달식과 통계평형식, 입자전하 보존식을 동시에 만족시키는 풀이 방법을 소개하였다.

분광선을 계산하기 위해서는 대상의 원자모델을 설정해야하고 또한 분광선의 흡수, 방출, 산란 등의 물리과정을 도식화 하는 작업이 요구된다. 그러나 여기에서는 주로 수학

적인 측면에서 기본식을 수치적으로 다루는 방법에 초점을 맞추었으며 이용하는 관계식이 도출된 물리적 근거와 내용에 대해서는 다른 문헌(Mihalas 1978; 김갑성 1990, 1997)을 참고해야 한다. 마지막으로 소개된 방법을 이용한 계산치와 관측치와 비교할 수 있도록 결과부분에 제시하였다.

II. 기본 방정식

(a) 열평형 대기모델

본 연구에서는 간섭필터로 관측한 태양활동영역의 편광량을 해석하고자 특정 분광선(FeI 6303)을 대상으로 편광 복사전달식을 수치 계산하였다. 열 평형 대기모델은 입자들의 에너지분포가 온도의 함수로 사하, 불쯔만 방정식에 의해 간단히 계산되므로 통계평형식을 함께 다룰 필요 없이 복사전달식만을 고려하면 된다.

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI}{d\tau_{5000}} &= (\eta_0 + \eta_I)(I - B) + \eta_Q Q + \eta_U U + \eta_V V \\ \mu \frac{dQ}{d\tau_{5000}} &= \eta_Q(I - B) + (\eta_0 + \eta_I)Q + \rho_V U - \rho_U V \\ \mu \frac{dU}{d\tau_{5000}} &= \eta_U(I - B) - \rho_V Q - (\eta_0 + \eta_I)U + \rho_Q V \\ \mu \frac{dV}{d\tau_{5000}} &= \eta_V(I - B) + \rho_U Q - \rho_Q U + (\eta_0 + \eta_I)V \quad (1) \end{aligned}$$

태양대기모델(VAL 등)에서 방출되는 분광선의 계산치

와 실제의 관측치를 비교하고자 편광복사전달식을 약간 변화시켜 식 (1)과 같이 5000 Å의 밝은 노랑 색으로 분광학적 깊이의 스톡스 인수 (I, Q, U, V) 변화량 값으로 기술하였다.

윗식에서 등장하는 계수는 다음과 같이 정의된 물리량들이다.

$$\begin{aligned}\eta_I &= \kappa_I / \kappa_{5000} = \frac{1}{2} \left[\eta_p \sin^2 \gamma + \frac{1}{2} (\eta_b + \eta_r) (1 + \cos^2 \gamma) \right] \\ \eta_Q &= \kappa_Q / \kappa_{5000} = \frac{1}{2} \left[\eta_p - \frac{1}{2} (\eta_b + \eta_r) \right] \sin^2 \gamma \cos 2\phi \\ \eta_U &= \kappa_U / \kappa_{5000} = \frac{1}{2} \left[\eta_p - \frac{1}{2} (\eta_b + \eta_r) \right] \sin^2 \gamma \sin 2\phi \\ \eta_V &= \kappa_V / \kappa_{5000} = \frac{1}{2} (\eta_b - \eta_r) \cos \gamma, \\ \rho_Q &= \kappa'_Q / \kappa_{5000} = \frac{1}{2} \left[\rho_p - \frac{1}{2} (\rho_b + \rho_r) \right] \sin^2 \gamma \cos 2\phi, \\ \rho_U &= \kappa'_U / \kappa_{5000} = \frac{1}{2} \left[\rho_p - \frac{1}{2} (\rho_b + \rho_r) \right] \sin^2 \gamma \sin 2\phi \\ \rho_V &= \kappa'_V / \kappa_{5000} = \frac{1}{2} (\rho_r - \rho_b) \cos \gamma\end{aligned}\quad (2)$$

여기에서

$$\begin{aligned}\eta_0 &= \frac{\kappa_c}{\kappa_{5000}}, \quad d\tau_{5000} = -\kappa_{5000} dz \\ \eta_p &= \frac{\kappa_p}{\kappa_{5000}} = C \times H(a, v) \\ \eta_r &= \frac{\kappa_r}{\kappa_{5000}} = C \times H(a, v + v_H) \\ \eta_b &= \frac{\kappa_b}{\kappa_{5000}} = C \times H(a, v - v_H) \\ \rho_p &= \frac{\kappa'_p}{\kappa_{5000}} = C \times 2F(a, v) \\ \rho_r &= \frac{\kappa'_r}{\kappa_{5000}} = C \times 2F(a, v + v_H) \\ \rho_b &= \frac{\kappa'_b}{\kappa_{5000}} = C \times 2F(a, v + v_H)\end{aligned}\quad (3)$$

그리고 식 (3)에서 등장하는 계수 C 와 Voigt 선윤곽함수 H 및 Faraday 선윤곽함수 F 는

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{\kappa_{5000} m_e c} g f_{ij} N \varepsilon \frac{\lambda_0^2}{c} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta \lambda_D} \left(1 - \frac{b_j}{b_i} e^{-\frac{hc}{\lambda_0 k T}} \right) \\ \varepsilon &= \exp\left(-\frac{\chi_i}{k T}\right) \left[u_0(T) \left(1 + \frac{N_1}{N_0} + \frac{N_2}{N_0} \right) \right]^{-1} \\ H(a, v) &= \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2)}{(v-y)^2 + a^2} dy \\ F(a, v) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2)(v-y)}{(v-y)^2 + a^2} dy\end{aligned}\quad (4)$$

와 같고 선윤곽함수에 등장하는 매개변수는 아래와 같다.

$$v = \frac{(\lambda - \lambda_{ij})}{\Delta \lambda_D}, \quad \Delta \lambda_D = \frac{\lambda_{ij}}{c} \left(\xi^2 + \frac{2kT}{M_a} \right)^{1/2}, \quad a = \frac{\Gamma \lambda_{ij}^2}{4\pi c \Delta \lambda_D} \quad (5)$$

자세한 내용은 김갑성(1997)에 잘 정리되어 있다.

(b) 비열평형 대기모델

i) 복사전달식

분광선이 물질에 의해 흡수, 방출 혹은 산란되면 지역에 따라 어두워지거나 밝아지면서 분광선의 세기가 변해간다. 이와 같이 변해가는 복사전달의 지역분포를 결정하기 위해 다음과 같이 평균 복사장 세기의 변화량으로 나타낸 복사전달식이 요구된다. 식 (1)과 같이 각 μ 의 함수인 복사전달 $I_\nu(\mu)$ 에 대해 미분식을 세우지 않고 각 의존도가 평균화되어 제거된 J_ν 에 대해 기술하여 이를 풀어나가는 것은 통계평형식에서 입자의 에너지 분포를 결정하는 관계식을 J_ν 에 대해 정리하였기 때문이다.

$$\begin{aligned}\text{외부경계; } \frac{\partial(f_\nu J_\nu)}{\partial \tau_\nu} &= h_\nu J_\nu(0) - \int_0^1 \mu I_\nu(0, -\mu) d\mu \\ \text{내부영역; } \frac{\partial^2(f_\nu J_\nu)}{\partial \tau_\nu^2} &= J_\nu - S_\nu \\ \text{내부경계; } \frac{\partial(f_\nu J_\nu)}{\partial \tau_\nu} &= -h_\nu J_\nu(\tau_{\max}) + \int_0^1 \mu I_\nu(\tau_{\max}, \mu) d\mu\end{aligned}\quad (6)$$

여기에서 h_ν, f_ν 는 가변에당턴 인수로 다음과 같이 복사전의 각 의존성이 평균화 된 양이다.

$$\begin{aligned}f_\nu &\equiv \int_0^1 \mu^2 I_\nu(\mu) d\mu / \int_0^1 I_\nu(\mu) d\mu \\ h_\nu &\equiv \int_0^1 \mu I_\nu(\mu) d\mu / \int_0^1 I_\nu(\mu) d\mu\end{aligned}\quad (7)$$

ii) 통계평형식

열 평형상태에서 벗어난 입자들의 에너지 분포를 계산하는데 요구되는 관계식으로 입자의 에너지 상태변화를 일으키는 복사와 충돌과정 모두를 고려하여 n_i 의 생성과 소멸에 대한 통계평형식을 정리하면 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} n_j + A_{ii} n_i + \sum_{j=i+1}^{\kappa} A_{ij} n_j = 0 \quad (8)$$

여기에서 A 행렬의 요소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}A_{ij} &= (R_{ji} + C_{ji}) \quad (j = 1, 2, 3, \dots, i-1) \\ A_{ii} &= -\sum_{j=1}^{i-1} (n_j/n_i)^* (R_{ij} + C_{ji}) - \sum_{j=i+1}^{\kappa} (R_{ij} + C_{ij}) \\ A_{ij} &= (n_i/n_j)^* (R_{ji} + C_{ij}) \quad (j = i+1, i+2, \dots, \kappa)\end{aligned}\quad (9)$$

전하보존식 및 입자보존식을 대기내에 있는 모든 종류의 원자에 대해 적용하면 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_X m \cdot n(X^{m(+)}) = n_e$$

$$\sum_{X=1}^{\kappa} \sum n_i(X) + n_e = N \quad (10)$$

여기에서 X 는 원자의 종류, $n(X^{m(+)})$ 는 전자가 m 개 이 탈한 이온갯수를 의미한다.

III. 경계치 문제

본 연구에서 제시한 두가지 모델의 기본식 중 열평형 대기모델로 정리된 편광복사전달식 (1)을 Runge-Kutta 방법 등의 일단계 적분법을 이용하여 간단히 초기치 문제로 직접 풀어갈 수 있다. 그러나 이 미분식을 초기치 문제가 아닌 경계치 문제로 해결하고자 세점 근사법으로 차분화하여 양 끝단에 경계치를 부여할 수 있도록 정리하면 다음과 같다.

외부경계:

$$\begin{aligned} b'_1 I_1 - \eta_{Q,1} Q_1 - \eta_{U,1} U_1 - \eta_{V,1} V_1 - c_1 I_2 \\ = a_1 I_0 - (\eta_0 + \eta_I)_1 B_1 \\ -\eta_{Q,1} I_1 + b'_1 Q_1 - \rho_{V,1} U_1 + \rho_{U,1} V_1 - c_1 Q_2 \\ = a_1 Q_0 - \eta_{Q,1} B_1 \\ -\eta_{U,1} I_1 + \rho_{V,1} Q_1 + b'_1 U_1 - \rho_{Q,1} V_1 - c_1 U_2 \\ = a_1 U_0 - \eta_{V,1} B_1 \\ -\eta_{V,1} I_1 - \rho_{V,1} Q_1 + \rho_{Q,1} U_1 + b'_1 V_1 - c_1 V_2 \\ = a_1 V_0 - \eta_{V,1} B_1 \quad i = 1 \end{aligned} \quad (11)$$

내부영역:

$$\begin{aligned} -a_i I_{i-1} + b'_i I_i - \eta_{Q,i} Q_i - \eta_{U,i} U_i - \eta_{V,i} V_i - c_i I_{i+1} \\ = -(\eta_0 + \eta_I)_i B_i \\ -a_i Q_{i-1} - \eta_{Q,i} I_i + b'_i Q_i - \rho_{V,i} U_i + \rho_{U,i} V_i - c_i Q_{i+1} \\ = -\eta_{Q,i} B_i \\ -a_i U_{i-1} - \eta_{U,i} I_i + \rho_{V,i} Q_i + b'_i U_i - \rho_{Q,i} V_i - c_i U_{i+1} \\ = -\eta_{U,i} B_i \\ -a_i V_{i-1} - \eta_{V,i} I_i - \rho_{V,i} Q_i + \rho_{Q,i} U_i + b'_i V_i - c_i V_{i+1} \\ = -\eta_{V,i} B_i \quad i = 2, \dots, d, \dots, D-1 \end{aligned} \quad (12)$$

내부경계:

$$\begin{aligned} -a_D I_{D-1} + b'_D I_D - \eta_{Q,D} Q_D - \eta_{U,D} U_D - \eta_{V,D} V_D = \\ = c_D I_{D+1} - (\eta_0 + \eta_I)_D B_D \\ -a_D Q_{D-1} - \eta_{Q,D} I_D + b'_D Q_D - \rho_{V,D} U_D + \rho_{U,D} V_D \\ = c_D Q_{D+1} - \eta_{Q,D} B_D \\ -a_D U_{D-1} - \eta_{U,D} I_D + \rho_{V,D} Q_D + b'_D U_D - \rho_{Q,D} V_D \\ = c_D U_{D+1} - \eta_{U,D} B_D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -a_D V_{D-1} - \eta_{V,D} I_D - \rho_{U,D} Q_D + \rho_{Q,D} U_D + b'_D V_D \\ = c_D V_{D+1} - \eta_{V,D} B_D \quad i = D \end{aligned} \quad (13)$$

여기에서

$$\begin{aligned} a_i &= -\Delta\tau_{i+1/2} / [\Delta\tau_{i-1/2}(\Delta\tau_{i+1/2} + \Delta\tau_{i-1/2})] \\ b_i &= (\Delta\tau_{i+1/2} - \Delta\tau_{i-1/2}) / (\Delta\tau_{i+1/2} + \Delta\tau_{i-1/2}) \\ c_i &= \Delta\tau_{i-1/2} / [\Delta\tau_{i+1/2}(\Delta\tau_{i+1/2} + \Delta\tau_{i-1/2})] \end{aligned} \quad (14)$$

차분화된 편광복사전달식을 각 경계점 및 내부점등 모든 광학적 깊이 점 ($i=1, 2, \dots, D$)에 대한 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

이상을 간단한 행렬식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B_1 I_1 - C_1 I_1 = L_1 \quad i = 1 \\ -A_i I_{i-1} + B_i I_i - C_i I_{i+1} = L_i \quad (i = 2, 3, \dots, d, \dots, D-1) \\ -A_D I_{D-1} + B_D I_D = L_D \quad i = D \end{aligned} \quad (15)$$

여기에서 각 행렬요소는 다음과 같다.

$$I_i = \begin{pmatrix} I_i \\ Q_i \\ U_i \\ V_i \end{pmatrix}, A_i = \begin{pmatrix} a_i & & & \\ & a_i & & \\ & & a_i & \\ & & & a_i \end{pmatrix}, B_i = \begin{pmatrix} b' - \eta_Q - \eta_U - \eta_V & & & \\ -\eta_Q & b' & -\rho_V & \rho_U \\ -\eta_U & \rho_V & b' & -\rho_Q \\ -\eta_V - \rho_U & \rho_Q & & b' \end{pmatrix},$$

$$C_i = \begin{pmatrix} c_i & & & \\ & c_i & & \\ & & c_i & \\ & & & c_i \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} a_1 I_0 - (\eta_0 + \eta_I)_1 B_1 \\ a_1 Q_0 - \eta_{Q,1} B_1 \\ a_1 U_0 - \eta_{U,1} B_1 \\ a_1 V_0 - \eta_{V,1} B_1 \end{pmatrix}, L_i = \begin{pmatrix} -(\eta_0 + \eta_I)_i B_i \\ -\eta_{Q,i} B_i \\ -\eta_{U,i} B_i \\ -\eta_{V,i} B_i \end{pmatrix},$$

$$L_D = \begin{pmatrix} c_D I_{D+1} - (\eta_0 + \eta_I)_D B_D \\ c_D Q_{D+1} - \eta_{Q,D} B_D \\ c_D U_{D+1} - \eta_{U,D} B_D \\ c_D V_{D+1} - \eta_{V,D} B_D \end{pmatrix}$$

식 (11), (12), (13)를 모두 나타낸 행렬식 (15)는 일반적인 소저법으로 계산될 수 있으나 미지수가 증가할 경우 미지수의 제곱에 상당하는 큰 배열을 선언해야하므로 경제적인 계산 방법이 요구된다. 본 연구에서는 위의 차분 연립방정식을 가장 효율적으로 계산할 수 있는 다음과 같은 푸트리에 소저법을 사용한다.

즉 식 (15)에서 깊이 점 $i=1$ 의 경우 $D_1 \equiv B_1^{-1} C_1$, $v_1 \equiv B_1^{-1} L_1$ 로 정의된 변수를 도입하면 $I_1 = D_1 I_2 + v_1$ 로 정리되고 $i=2$ 에서는

$$\begin{aligned} D_2 &\equiv (B_2 - A_2 D_1)^{-1} C_2 \\ v_2 &\equiv (B_2 - A_2 D_1)^{-1} (L_2 + A_2 v_1) \end{aligned} \quad (16)$$

로 정의하면 $I_2 = D_2 I_3 + v_2$ 로 표시되는데 일반적으로 임의의 깊이 지점 i 에 대해

$$D_i \equiv (B_i - A_i D_{i-1})^{-1} C_1$$

$$v_i \equiv (B_i - A_i D_{i-1})^{-1} (L_i + A_i v_{i-1}) \quad (17)$$

로 정의한 매개변수를 도입하면 연속한 지역의 변량사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$I_i = D_i I_{i+1} + v_i \quad (18)$$

위의 D_i, v_i 값은 경계에서 계산된 D_1, v_1 값을 가지고 i 를 증가시켜 $i=2, 3, \dots, D$ 까지 차례대로 계산해 나갈 수 있다. 그런데 내부경계인 $i=D$ 에서는 $C_D = 0$ 이기 때문에 $D_D = 0$ 이 되어 결국 $I_D = v_D$ 관계가 성립하면서 내부경계에서의 변량 I_D 값이 독립적으로 결정된다. 따라서 내부영역에서 표면에 이르기까지의 미지수 변량 $I_{i=D-1, D-2, \dots, 2, 1}$ 는 결정된 I_D 값으로 부터 거꾸로 $i = D-1, D-2, \dots, 2, 1$ 순으로 감소시켜 (18) 식을 계산하면 모두 구할 수 있다.

IV. 초기치 문제

한쪽 경계에 부여된 초기치를 이용하여 미분방정식을 풀어가는 방법으로 태양내부의 조건을 부여하고 이 값에서 태양대기 표면으로 방출되는 분광선을 계산할 때 사용될 수 있다. 대표적으로는 일단계 적분법인 룽게컷터 방법이 이용될 수 있으나 계산 정밀도를 올리기 위해서 다단계 적분법인 아담스 방법(Shampine & Gordon 1975)이 유용하게 이용될 수 있다.

(a) 아담스-배시포드-몰턴(Adams-Bashforth-Moulton) 방법

이 계산방법은 일차 미분방정식을 아담스배시포드가 정리한 유한 차분식과 아담스-몰턴이 유도한 유한 차분식을 함께 이용하는 방법으로 아담스배시포드의 방법만으로 계산하는 것 보다 훨씬 정확도가 높은 결과를 얻는다.

이 방법을 복사전달문제에 적용하기 위해 기본식으로 식 (1)을 사용하면 이는 아래와 같이 정리된다.

$$\frac{dI}{d\tau} = f_I(I, Q, U, V)$$

$$\frac{dQ}{d\tau} = f_Q(I, Q, U, V)$$

$$\frac{dU}{d\tau} = f_U(I, Q, U, V)$$

$$\frac{dV}{d\tau} = f_V(I, Q, U, V) \quad (19)$$

이를 행렬식으로 표시하면

$$\frac{dI}{dC} = f(I) \quad (20)$$

연립 복사전달식 (19) 혹은 (20)을 아담스배시포드가 차분화한 유한차분식은 (21)과 같은 형태로 차수에 따라 여러 등급의 정확도를 구현할 수 있는데 이 차분식에서 사용된 계수값중 6차까지는 수치계산 교과서에 차수별로 나타나 있다. 정밀한 계산을 위해서는 보다 높은 차수(high order)의 차분식이 요구되는 바 12차의 계수를 이용하여 비교하였다.

$$I_{n+1}^p = I_n + h(a_0 f_n + a_{-1} f_{n-1} + a_{-2} f_{n-2} + \dots + a_{-(k-1)} f_{n-(k-1)}), O(h^k)$$

$$= I_n + h \sum_{i=0}^{k-1} a_{-i} f_{n-i} \quad (21)$$

정밀도는 계속 올려갈 수 있으나 12차가 넘어가면 다른 오차가 누적 증가되어 오히려 정밀도가 감소하는 것을 확인하였다. 12차의 정밀도 계산에 사용되는 계수는 다음과 같다. $k=12$ 차:

$$a(0)=0.274265540036, a(-1)=1.435067460076,$$

$$a(-2)=-2.184220963860, a(-3)=3.996676508733,$$

$$a(-4)=-5.761421863272, a(-5)=6.308456470177$$

$$a(-6)=-5.180741059699, a(-7)=3.139592245336,$$

$$a(-8)=-1.36322207992, a(-9)=0.401574156499,$$

$$a(-10)=-0.071950470513, a(-11)=0.005924056412$$

따라서 연속된 여러 지역의 초기편광량값 $I_k, I_{k+1}, \dots, I_1, I_0$ 이 주어지면 그지역의 $f_k, f_{k+1}, \dots, f_1, f_0$ 을 알 수 있어 위의 관계식으로 다음 지역의 스톡스인수를 차례로 계산해 나아갈 수 있다.

이상의 아담스배시포드 방법만으로도 식 (20)의 미분식 계산이 완료되지만 보다 정밀도를 높이고자 아담스-몰턴에 의해 정리된 유한 차분식 (22)를 함께 사용한다.

$$I_{n+1} = I_n + h(c_1 f_{n+1}^p + c_0 f_n + c_{-1} f_{n-1} + \dots + c_{-(k-2)} f_{n-(k-2)}), O(h^k)$$

$$= I_n + h \left(c_1 f_{n+1}^p + \sum_{i=0}^{k-2} a_{-i} f_{n-i} \right) \quad (22)$$

여기에서 $f_{n+1}^p = f(I_{n+1}^p) = f(I, Q, U, V(I_{n+1}^p, Q_{n+1}^p, U_{n+1}^p, V_{n+1}^p))$ 을 의미한다.

이 관계식에서는 이전 지역의 물리량은 물론 계산하고자 하는 지역의 물리량 값이 초기치 값으로 요구되고 있다. 아담스-몰턴 차분식에서 요구되는 차수별 계수 역시 6차까지는 수치계산 교과서 등에 자세히 나타나 있는데 본 연구에서 12차 정밀도 계산에 사용한 아담스-몰턴 계수는 다음과 같다.

$$k=12$$

$$c(1)=4.726253940505, c(0)=-20.285746606217,$$

$$c(-1)=64.335095316592, c(-2)=-141.522864180954,$$

$$c(-3)=223.526764178468, c(-4)=-258.602100052705,$$

$$c(-5)=220.357899953627, c(-6)=-137.124664397607,$$

$$c(-7)=60.739992964358, c(-8)=-18.173476112871, \\ c(-9)=3.297110536840, c(-10)=-0.274265540036$$

따라서 식 (22) 우변의 제2항에 있는 f_{n+1}^p 값으로서 아담스-베시포드 관계식 (21)로 계산한 값을 사용하면 보다 정밀한 계산이 가능하다. k 차의 정밀도를 갖는 계산을 위해서는 k 개의 지역에 대한 편광량값이 초기조건으로 요구된다. 이들 다단계 적분에 요구되는 초기치는 일단계 적분법인 Runge-Kutta-Fehlberg 방법으로 계산한 다음 일반화된 아담스-베시포드-몰턴 방법을 이용하여 계산한다.

(b) 계산 수순

이상과 같은 과정으로 기본방정식을 수치 적분하는 방법을 정리하면 다음과 같다.

① 초기치로 사용할 연속된 k 개 지역의 초기 편광량 $I_{-k}, I_{-k+1}, \dots, I_{-1}, I_0$ 및 $f_{-k}, f_{-k+1}, \dots, f_{-1}, f_0$ 값을 룽게-쿠틀러-펠버그 방법으로 계산한다. 경계 지역 τ_0 ($n=0$)의 예측치 값을 다음과 같이 초기치의 값으로 대체한다.

$$I_0^p = I_0, f_0^p = f_0$$

② k 차의 아담스-베시포드 방법에 의한 차분식을 이용하여 다음 지역 τ_{n+1} 의 편광량에 대한 예측치 I_{n+1}^p, f_{n+1}^p 을 계산한다.

$$I_{n+1}^p = I_n + h \sum_{i=0}^{k-1} a_{-i} f_{n-i} \\ f_{n+1}^p = f(I_{n+1})$$

③ 이렇게 얻어진 예측치를 아래의 아담스-몰턴 차분 관계식에 넣어 수정치를 구하고 이값을 최종계산 값으로 한다.

$$I_{n+1} = I_n + h \left(c_1 f_{n+1}^p + \sum_{i=0}^{k-2} c_{-i} f_{n-i} \right)$$

④ $\tau_{n+1} = \tau_n + h$ 관계로 지역을 변화시키고 다음단계의 계산에 사용할 초기치 값과 예측치를 결정한다.

⑤ 단계 ②로 돌아가 반복 계산하여 원하는 지역에서 계산을 종료한다.

V. 비열평형 대기모델의 계산

Non-LTE 대기모델 계산에 사용된 기본방정식은 앞에서 기술한 바와 같이 편미분 방정식 형태의 복사전달식 (6)과 통계평형식 (8) 및 입자 전하 보존식 (10)이다. 이상을 경계치 문제로 취급하여 3점 근사식을 이용한 차분법으로 기술하면 사용된 모든 식은 $F(\phi) = 0$ 과 같은 비선형 연립방정식의 형태로 나타낼 수 있다.

(a) 비선형 편미분 연립방정식의 선형화

위의 비선형 연립방정식을 만족시키는 근 ϕ 를 구하는 방법을 생각해 보자. 우선 관계식을 테일러 정리로 전개한 다음 1차항 만으로 근사하면 다음과 같다.

$$F(\phi_{i+1}) \cong F(\phi_i) + \delta\phi_i F'(\phi_i)$$

여기에서 $F(\phi_{i+1}) = 0$ 을 대입하면 $F'(\phi_i)\delta\phi_i = -F(\phi_i)$ 로 정리되어 연립된 모든 관계식이 미지수의 변량 $\delta\phi_i$ 에 대해 선형화가 실현된다. 윗식에서 $\delta\phi_i$ 를 구하는 방법으로는 널리 알려진 가우스 소거법이나 역행렬 계산법 $\delta\phi_i = -F'(\phi_i)^{-1} \cdot F(\phi_i)$ 이 이용될 수도 있으나 미지수가 많을 경우 행렬의 크기가 대규모로 커지기 때문에 행렬요소의 배열 형태에 따라 고안된 특수한 소거법이 추천된다. 본 연구에서는 미분방정식을 세점 근사 차분법을 이용하여 정리한 결과 방정식의 행렬내부가 세줄 대각선으로 늘어선 배열형태를 갖고 있는데 이와 같은 형태의 연립 방정식을 푸는 데에는 퓨트리에 소거방식이 가장 효율적인 것으로 알려져 있다.

소거법을 이용하여 초기값 ϕ_0 에 대해 계산한 $\delta\phi_0$ 이 구해지면 $\phi_{i+1} = \delta\phi_i + \phi_i$ 의 관계에서 초기치를 개선한 값 ϕ_1 이 얻어지는데, 보정치 $\delta\phi_i$ 가 아주 작아져 $|\delta\phi_i/\phi_i| < 10^{-m}$ 정도가 될 때까지 반복 ($i = 1, 2, \dots$) 계산하여 해를 구한다. 여기에서 지수 m 은 정밀도를 유지하며 계산이 수렴할 수 있도록 $5-8(10^{-5} \sim 10^{-8})$ 사이의 값을 선택한다. 따라서 모든 관계식을 위와 같은 방법으로 미지수의 변화량에 대해 완전히 선형화 시키기 위해서는 $F'(\phi)$ 가 요구되고 해석학적으로 이를 정리하는데는 많은 시간이 요구된다.

(b) 모델대기의 물리량계산

기본식 (12)-(16)을 미지수인 물리량의 변량 $\delta\phi$ 로 정리하면 다음의 식 (23)과 같다.

$$B_1 \delta\phi_1 - C_1 \delta\phi_2 = L_1 \quad d = 1 \\ -A_d \delta\phi_{d-1} + B_d \delta\phi_d - C_d \delta\phi_{d+1} = L_d \\ (d = 2, 3, \dots, D-1) \\ -A_D \delta\phi_{D-1} + B_D \delta\phi_D = L_D \quad d = D \quad (23)$$

윗식은 모든 깊이($d=1, 2, \dots, D$)에 대한 행렬식으로 나타낸 것인데 $\delta\phi_{d=1,2,\dots,D}$ 는 앞에서 설명한 퓨트리에 소거법을 이용하여 구한다.

여기에서

$$\delta\phi_d = [\delta J_1, \delta J_2, \dots, \delta J_{NF}, \delta n_1, \delta n_2, \dots, \delta n_{NL}, \delta n_e]_d^T \quad (24)$$

인 일렬 벡터를 말하고 행렬 A, B, C 는 계산하고자 하는 깊이점의 개수 D , 주파수점 수 NF 및 원자의 에너지준위 수 NL 를 늘려감에 따라 거대한 크기를 갖는 정사각 행렬 $(NF+NL+1) \times (NF+NL+1)$ 로 성장하게 되는데 이들 행렬의 각 요소는 다음과 같다.

A와 C행렬의 형태

	1	2	...	n	...	NF	1	2	...	NL	1
J_1	☆						☆	☆	☆	☆	☆
J_2	☆							☆	☆	☆	☆
...											
J_n				☆			☆	☆	☆	☆	☆
J_{NF}						☆	☆	☆	☆	☆	☆
n_1											
n_2											
...											
n_i											
n_{NL}											
n_e											

B행렬의 내부형태

(26)

	1	2	...	n	...	NF	1	2	...	NL	1
J_1	☆						☆	☆	☆	☆	☆
J_2	☆							☆	☆	☆	☆
...											
J_n				☆			☆	☆	☆	☆	☆
J_{NF}						☆	☆	☆	☆	☆	☆
n_1	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆
n_2	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆
...											
n_i	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆
n_{NL}	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆
n_e											

행렬중 ☆로 표시된 칸은 식에 의해 행렬요소 값이 주어지는 것을 뜻하고 비어 있는 칸은 행렬요소 값이 0이 됨을 의미한다. 이들 행렬요소에 대해서는 문헌(김갑성 1990)을 참고하기 바란다.

VI. 계산결과 및 토의

열평형 모델을 이용하여 태양광자기장에 의해 편광되는 철 FeI 6303선의 스톡스 인수 I, V 선운곽을 초기치 문제로 계산한 결과가 그림 1, 2에 나타나 있다. 그림 1에서 보는 바와 같이 자기장이 없을 때 하나의 흡수선으로 보이는 철의 분광선이 자기장의 세기에 따라 1500 가우스 이상이 되자 양쪽으로 분리되어 가는 모습을 완연히 볼 수 있다.

그림 3은 식 (11)-(13)의 차분 복사전달식을 VAL-C 태양 대기모델을 이용하여 광학적 두께가 $\tau=10$ 에서 $\tau=0.01$ 사이의 선운곽을 경계치문제로 계산한 결과이다. 광학적 두께가 깊은 곳에서 연속선으로 나타난 것이 표면으로 나오면서 철 입자로 인해 선 중심부분에 흡수선의 골이 깊게 파이며 분광선이 생성되는 과정을 그림에서 쉽게 볼 수 있다.

태양 홍염에 비열평형 대기모델을 적용하여 복사전달식 (6), 통계평형식 (8), 전하입자 보존식(10)의 비선형 편미분 연립방정식을 경계치 문제로 계산한 결과가 그림 4, 5에 나타나 있다. 그림 4는 온도 4000 K 두께 5000 km 총입자수

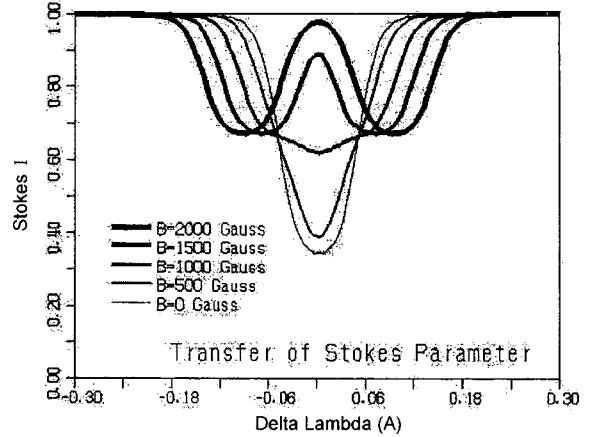


그림 1. 철 FeI 6303분광선의 스톡스 인수 I에 대한 계산 결과로 자기장의 세기에 따라 흡수선이 분리되는 모습이 잘 나타나 있다.

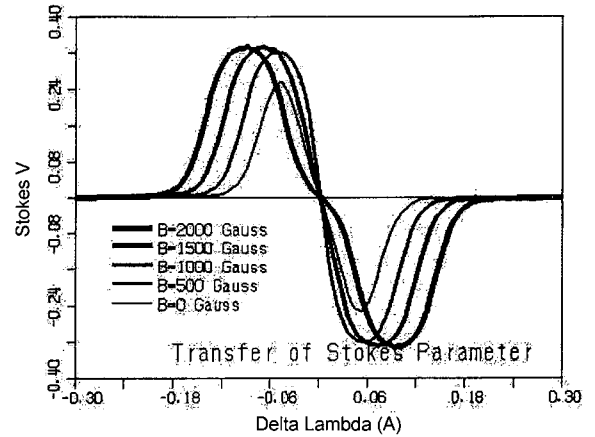


그림 2. 스톡스 인수 V선운곽에 대한 자기장 효과.

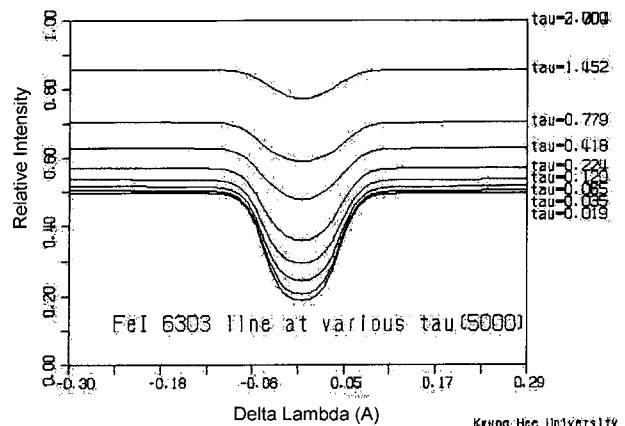


그림 3. 경계치 문제로 편광복사전달식을 계산한 결과로 광학적 두께 10인 곳에서 표면부근인 0.01인 지점에 이르기까지 연속선에서 흡수선이 생성되는 모습이 잘 나타나 있다.

10^{16} 개의 평판구조의 홍염에 대해 계산한 $L\alpha$ 방출선의 선운곽으로 표면에서 내부에 진입함에 따라 선세기의 급격한 변화가 두드러진다. 반면에 그림 5에서 보는 바와 같이 수소 $H\alpha$ 선의 경우는 선운곽의 변화가 거의 없는 것을 알 수 있

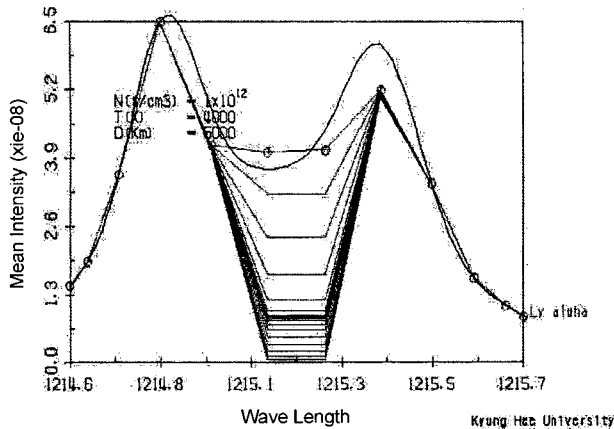


그림 4. 비열평형 모델계산으로 얻은 수소 Ly alpha선의 선 윤택. o는 표면의 관측치를 나타내고 30개의 내부 깊이 점에 대해 계산된 결과임. 표면과 내부의 선세기 변화가 급격하게 나타난다.

다. 이와 같은 이유는 상기의 물리적 조건에서는 H_α 선의 광학적 두께가 얇고 L_α 선은 매우 두껍기 때문인 것으로 판단된다.

이상과 같이 어느 경우에도 본 연구의 수치계산방법은 성공적으로 원하는 계산결과를 도출해 내었다. 초기치 문제로 미분식을 풀을 때는 정확히 계산하는데 초점을 둘 경우 12차의 정밀도로 계산이 가능하였으나 경계치 문제로 다룰 때에는 3점 근사의 차분식을 이용하였기 때문에 4차 정도의 정밀도 밖에 유지할 수 없었다.

대기모델 계산용 프로그램은 C언어를 이용하여 제작되고 모두 PC상에서 처리되었다. 지난 수년간 개인용 컴퓨터의 급속한 발전으로 인해 일반 PC를 사용하더라도 대규모의 신속한 계산도 가능하기 때문에 대형계산기에 비해 전혀 손색없는 처리결과를 보여주었다.

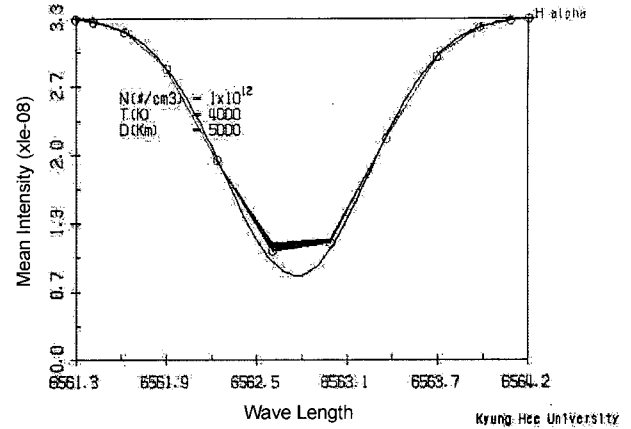


그림 5. 태양홍염의 대기모델로 계산한 수소 H alpha선의 선 윤택. 표면에서 내부로 들어가도 선세기의 변화가 거의 없음.

참고문헌

- 김갑성 1990, 천문학논총, 5, 40
 김갑성 1997, 천문학논총, 12, 1
 Auer, L. H., Heasley, J. N., & Milkey, R. W. 1972, A Computational Method for the Solution of Non-LTE Transfer Problems by the Complete Linearization Method, Contribution No. 555, Kitt Peak National Observatory
 Kim, K.-S. 1987, Solar Physics, 114, 47
 Mihalas, D. 1978, Stellar Atmosphere, W. H. Freeman and Co., San Francisco
 Rutten, R. J. 1999, Radiative Transfer in Stellar Atmosphere, Steerekundig Institut Utrecht
 Shampine, L. F., & Gordon, M. K. 1975, Computer Solution of Ordinary Differential Equations, W. H. Freeman and Co., San Francisco
 Vernazza, J. E., Avrett, E. H., & Loeser, R. 1981, ApJ SS, 45, 635