

블랙홀 자기권 모델 30년¹
The Development of the Black Hole Magnetosphere Model
in the Last Thirty Years

박석재

한국천문연구원

SEOK JAE PARK

Korea Astronomy Observatory

Received May 28, 2000; Accepted Jun. 8, 2000

ABSTRACT

Since Goldreich and Julian's pioneering work in 1969, the pulsar magnetosphere theory has been dramatically developed for theorists to possess an elegant axisymmetric, stationary model. Based on this development the black hole magnetosphere theory has also been established in the last 30 years. Such theoretical developments will be reviewed equation by equation in this paper.

Keywords: black hole physics – MHD – galaxies: jets

1. 서론

블랙홀 자기권(magnetosphere)에 대한 이론적 연구는 전적으로 펄사(pulsar) 자기권에 대한 이론적 연구에 바탕을 두고 있다고 해도 과언이 아니다. 따라서 펄사 자기권 모델 연구의 효시가 된 Goldreich & Julian (1969, 이하 GJ)이 발표된 시점을 블랙홀 자기권 모델 연구가 시작된 시점으로 봐도 큰 문제가 없으리라고 본다. 이 논문에서는 GJ가 발표된 1969년부터 최근에 이르기까지, 30년 동안 발전된 블랙홀 자기권 모델에 대하여 알아보고자 한다.

시공간 좌표를 (t, \mathbf{r}) , 공간의 원통 좌표계를 (R, ϕ, z) , 구 좌표계를 (r, θ, ϕ) 라 할 때 이 논문에서 소개되는 모델들은 모두 시간에 따라 변하지 않고 z -축에 대하여 대칭을 유지하는 것들뿐이므로 모든 식에서

$$\frac{\partial}{\partial t}(\dots) = \frac{\partial}{\partial \phi}(\dots) = 0 \quad (1-1)$$

이 만족된다. 또한 모든 모델들이 highly-conducting 플라즈마로 가득 채워져 있어 전기장 \mathbf{E} , 자기장 \mathbf{B} , 자기력선의 속도 \mathbf{v} , 광속도 c 사이에는

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (1-2)$$

를 만족한다. 또한 degenerate 조건

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-3)$$

도 만족하게 되는데, 식 (1-3)은 플라즈마 입자들이 자기력선을 따라 자유로이 흐를 수 있는 환경을 조성하게 된다.

2장에서는 가장 기본이 되는 펄사의 자기권에 대하여 알아본다. 비상대론적 '펄사 방정식'을 소개하는 것이 이 장의 목표가 되겠다. 2장의 내용을 바탕으로 3장에서는 펄사 자기권에서 운동하는 플라즈마의 흐름에 대하여 알아본다. 비상대론적 '제트 방정식'을 소개하는 것이 3장의 목표가 되겠다. 4장에서는 지난 30년간 변화된 블랙홀의 이론에 대하여 정리한다. 2장과 4장의 내용을 바탕으로 하여 5장에서는 블랙홀 자기권을 기술한다. 상대론적 펄사 방정식을 소개하는 것이 5장의 목표가 되겠다. 마지막으로 6장에서는 블랙홀 자기권에서 운동하는 플라즈마의 흐름에 대하여 알아본다. 상대론적 제트 방정식을 소개하는 것이 6장의 목표가 되겠다.

이 논문의 목적은 방정식들을 중심으로 지난 30년간에 구축된 블랙홀 자기권 모델을 살펴보는 데에 있으므로 수치적 접근에 관하여는 일체 언급하지 않겠다. 참고문헌 대부분은 자세한 계산 내용을 포함하고 있으니 직접 참고하기 바란다. 아울러 이 논문을 읽기 전에 덜 수학적인 해설 논문 Park and Hyun(1987)을 먼저 읽으면 많은 도움이 될 것임을 밝혀둔다.

2. 펄사 자기권

GJ는 중성자성의 회전축과 자기권의 대칭축이 일치하는 펄사의 비상대론적 모델에 대하여 기술하였다. 따라서 식

¹해설 논문(Review Article)

(1-1)에 의하여 이 모델에 적용되는 Maxwell 방정식은

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e \quad (2-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2-2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2-3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \quad (2-4)$$

와 같은 꼴로 주어진다. 여기서 ρ_e 는 전하 밀도, \mathbf{j} 는 전류 밀도로 GJ 모델에서는 항상

$$\rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (2-5)$$

를 만족한다. 식 (2-5)는 ‘force-free’ 조건이라고 불리는 데, 전자기장이 충분히 강한 극한 환경에서 inertia 항들을 생각할 필요가 없는 경우를 의미한다. 필사 자기권 자기력선들의 회전 각속도 Ω_F 가 중성자성 각속도 Ω_S 와 같다고 가정하면, 즉 중성자성의 주위를 일정한 각속도로 co-rotation 한다고 가정하면 우리가 생각할 수 있는 가장 단순한 모델이 된다. 자기장을

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_P \quad (2-6)$$

와 같이 나누어 생각하기로 한다. 여기서, 그리고 앞으로, T는 toroidal, P는 poloidal 성분을 의미 한다. GJ 모델에서 자기장은 회전만 하므로 자기력선의 속도는

$$\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_{FT} \equiv R\Omega_F \mathbf{1}_\phi \quad (2-7)$$

가 된다. 여기서 $\mathbf{1}_\phi$ 는 ϕ -방향의 단위 벡터를 의미한다. 따라서 유도되는 전기장은 식 (1-2), (2-6), (2-7)에 의해

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{v}_F \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \mathbf{v}_{FT} \times \mathbf{B}_P = \mathbf{E}_P \quad (2-8)$$

가 되어 poloidal 성분만 갖게 된다. 즉 $E_T = 0$ 인 것이다.

중성자성의 ‘북극’ 위에서 대칭축인 z -축 한 점으로부터 거리가 R 만큼 떨어진 임의의 원을 생각하자. 그 원으로 둘러싸인 표면을 A 라 하고(평면일 필요는 없음) 면적 미분소를 $d\mathbf{S}$, 그 표면을 지나는 자기 flux Ψ 를

$$\Psi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2-9)$$

와 같이 정의하면, $d\Psi = \nabla\Psi \cdot dr$ 이고 또한 $d\Psi = \mathbf{B} \cdot (dr \times 2\pi R \mathbf{1}_\phi) = (2\pi R \mathbf{1}_\phi \times \mathbf{B}) \cdot dr$ 이므로 우리는

$$\nabla\Psi = 2\pi R \mathbf{1}_\phi \times \mathbf{B}_P \quad (2-10)$$

즉

$$\mathbf{B}_P = \frac{\nabla\Psi \times \mathbf{1}_\phi}{2\pi R} \quad (2-11)$$

를 얻는다. 따라서 \mathbf{E}_P 는 식 (2-7), (2-8), (2-11)에 의해

$$\mathbf{E}_P = -\frac{R\Omega_F}{c} \mathbf{1}_\phi \times \frac{\nabla\Psi \times \mathbf{1}_\phi}{2\pi R} = -\frac{\Omega_F}{2\pi c} \nabla\Psi \quad (2-12)$$

와 같이 주어진다.

식 (2-11)로 주어지는 \mathbf{B}_P 를 처음으로 이용한 사람은 Michel(1973a)이다. Michel(1973a)에서는 식 (2-11)만 주어졌을 뿐 구체적으로 Ψ 의 정의에 대하여 언급되지는 않았다. 하지만 식 (2-11)은 상대론적인 경우나 블랙홀 자기권에서까지 그대로 쓰이고(식 [5.1] 참고), 결국 Ψ 에 대하여 밝히지 않을 수가 없기 때문에 이 논문에서는 처음부터 이렇게 기술하기로 한다.

여기서 식 (2-9)와 유사하게 I 를

$$I = - \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (2-13)$$

라고 정의하자. 그러면

$$\nabla I = -2\pi R \mathbf{1}_\phi \times \mathbf{j}_P, \quad (2-14)$$

즉

$$\mathbf{j}_P = -\frac{\nabla I \times \mathbf{1}_\phi}{2\pi R} \quad (2-15)$$

가 된다. 또한 Maxwell 방정식 (2-4)에 의하여

$$\frac{4\pi}{c} \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l},$$

즉 $2\pi R B_T = -(4\pi/c)I$ 되고 따라서

$$\mathbf{B}_T = -\frac{2I}{cR} \mathbf{1}_\phi \quad (2-16)$$

가 된다. 식 (2-9)에서 Ψ 는 자기력선들이 A 를 아래에서 위로 통과할 때 (+)의 값을 갖는 반면, 식 (2-13)에서 I 는 전류가 위에서 아래로 흐를 때 (+)의 값을 갖도록 정의되었음에 유의하자.

이 경우 ρ_e 는 식 (2-1), (2-12)에 의해

$$\rho_e = -\frac{\Omega_F}{8\pi^2 c} \nabla^2 \Psi \quad (2-17)$$

로 주어진다. 그리고 식 (2-4)에 식 (2-11)을 대입하여 \mathbf{j} 의 toroidal 성분을

$$j_T = -\frac{c}{8\pi^2 R} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \equiv -\frac{c}{8\pi^2 R} \Delta^* \Psi \quad (2-18)$$

와 같이 구할 수 있다. 그리고 식 (2-17), (2-18)로부터 관계식

$$\rho_e = \frac{R\Omega_F}{c^2} j_T - \frac{\Omega_F B_z}{2\pi c} \quad (2-19)$$

를 얻게 된다.

또한 식 (2-10)과 (2-14)로부터 우리는

$$\mathbf{j}_P = -\frac{dI}{d\Psi} \mathbf{B}_P \quad (2-20)$$

관계가 있음을 깨닫게 된다. 식 (2-20)을 식 (2-5)의 poloidal 성분에 대입하면 관계식

$$-\rho_e R \Omega_F + j_T + \frac{dI}{d\Psi} B_T = 0 \quad (2-21)$$

을 얻는다. 식 (2-21)에 식 (2-17)과 (2-18)을 대입하고 정돈하면 우리는 마침내

$$\left\{ 1 - \left(\frac{R \Omega_F}{c} \right)^2 \right\} \Delta^* \Psi - \left(\frac{R \Omega_F}{c} \right)^2 \frac{2}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{16\pi^2 I}{c^2} \frac{dI}{d\Psi} = 0 \quad (2-22)$$

또는

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{R^2} \left\{ 1 - \left(\frac{R \Omega_F}{c} \right)^2 \right\} \nabla \Psi \right] + \frac{16\pi^2 I}{c^2 R^2} \frac{dI}{d\Psi} = 0 \quad (2-23)$$

을 얻는다. 식 (2-22), (2-23)은 일정한 각속도 $\Omega_F = \Omega_S$ 로 회전하는 force-free 펄사 자기권을 완벽하게 기술하는 펄사 방정식이요, transfield 방정식이요, Grad-Shafranov 방정식이다. 여기서 Grad-Shafranov 방정식이란 대칭축을 갖는 플라즈마를 기술하는 기본 방정식을 의미한다. 식 (2-22), (2-23)은 GJ가 발표될 때까지 알려지지 않았었지만 그 후 Michel(1973b), Scharlemann & Wagoner(1973), Julian(1973)에 의하여 독립적으로 발견되었다.

식 (2-19)와 (2-21)을 연립하면

$$\rho_e = \frac{\Omega_F}{2\pi c} \frac{\frac{4\pi I}{c^2} \frac{dI}{d\Psi} - B_z}{1 - \left(\frac{R \Omega_F}{c} \right)^2} \quad (2-24)$$

$$j_T = \frac{c}{2\pi R} \frac{\frac{4\pi I}{c^2} \frac{dI}{d\Psi} - \left(\frac{R \Omega_F}{c} \right)^2 B_z}{1 - \left(\frac{R \Omega_F}{c} \right)^2} \quad (2-25)$$

를 얻는다. 식 (2-24), (2-25)의 분모가 0이 되는 면

$$R = \frac{c}{\Omega_F} \quad (2-26)$$

을 light cylinder라고 한다. GJ에 따르면 자기력선의 회전 속도가 광속에 가까워지는 light cylinder 안에 <그림 1>에서 보는 바와 같이 폐곡면 모양으로 닫힌 co-rotation 자기권이 형성되어야 한다. 또한 GJ 모델은 식 (2-24)에서 $I = 0$ 인 단순한 경우를 생각하고 있기 때문에, <그림 1>에 점선으로 나와 있는 $B_z = 0$ 선을 경계로 전하가 (+)인 지역과 (-)인 지역으로 나뉘게 된다. 그래서 전자와 양성자들이 따로 흘러 나가게 되는 것이다.

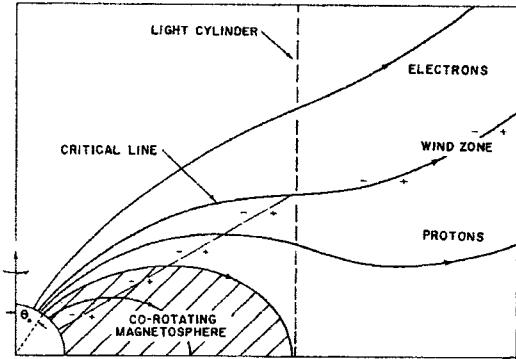


그림 1.— 펄사의 자기권 모델(GJ에서 발췌)

지금까지는 상수인 $\Omega_F = \Omega_S$ 로 회전하는 자기권에 대하여 알아보았지만 상수가 아닌 경우, 즉 $\Omega_F = \Omega_F(r) \neq \Omega_S$ 인 경우에도 식 (2-12)를 식 (2-3)에 대입하면

$$\mathbf{B}_P \cdot \nabla \Omega_F = 0, \quad (2-27)$$

즉 Ferraro의 iso-rotation을 얻게 된다. 따라서 Ω_F 값은 한 자기력선을 따라서는 일정한 값을 갖게 된다. 앞으로는 상수가 아닌 Ω_F 에 대해서만 논의하기로 한다.

식 (2-22), (2-23)도 크게 달라지지 않아서 각각

$$\left\{ 1 - \left(\frac{R \Omega_F}{c} \right)^2 \right\} \Delta^* \Psi - \frac{1}{2c^2 R^2} \nabla(R^4 \Omega_F^2) \cdot \nabla \Psi + \frac{16\pi^2 I}{c^2} \frac{dI}{d\Psi} = 0 \quad (2-28)$$

또는

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{R^2} \left\{ 1 - \left(\frac{R \Omega_F}{c} \right)^2 \right\} \nabla \Psi \right] + \frac{\Omega_F}{c^2} \nabla \Omega_F \cdot \nabla \Psi + \frac{16\pi^2 I}{c^2 R^2} \frac{dI}{d\Psi} = 0 \quad (2-29)$$

로 주어진다(Okamoto 1974; Lovelace et al. 1986; Lovelace et al. 1987).

마지막으로 Poynting 벡터들에 관하여 알아보자. 각운동량 Poynting 벡터 \mathbf{S}_L , 에너지 Poynting 벡터 \mathbf{S}_E 는 각각

$$\mathbf{S}_L = \frac{R}{4\pi} \left\{ -B_T \mathbf{B} + \frac{1}{2}(E^2 + B^2) \mathbf{l}_\phi \right\} \quad (2-30)$$

$$\mathbf{S}_E = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (2-31)$$

으로 주어진다. Poynting 벡터의 toroidal 성분은 의미가 없으므로 poloidal 성분만 생각하고 식 (2-12), (2-16)을 식

(2-30), (2-31)에 대입하면

$$\mathbf{S}_{LP} = -\frac{R}{4\pi} B_T \mathbf{B}_P = \frac{I}{2\pi c} \mathbf{B}_P \quad (2-32)$$

$$\mathbf{S}_{EP} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_P \times \mathbf{B}_T = \frac{I\Omega_F}{2\pi c} \mathbf{B}_P = \Omega_F \mathbf{S}_{LP} \quad (2-33)$$

가 된다. 식 (2-32), (2-33)으로부터 우리는 I 가 \mathbf{B}_P 와 방향이 반대일 때만 각운동량과 에너지가 펄사의 바깥쪽으로 흘를 수 있다는 사실을 깨닫게 된다. 식 (2-13)에서 I 는 전류가 A 를 위에서 아래로 흐를 때 (+)의 값을 갖도록 정의하였으므로 \mathbf{B}_P 가 윗방향일 때에는 $I > 0$ 이라야 하고, \mathbf{B}_P 가 아래 방향일 때에는 $I < 0$ 이라야 한다.

여기서 정리한 GJ 모델처럼 펄사의 회전축과 자기권의 축이 일치하면 사실 ‘펄사’가 될 수 없다. 따라서 두 축이 일치하지 않는 경우에 대하여 연구가 계속 이어지게 되었다(Beskin et al. 1993). 하지만 블랙홀의 경우 두 축이 일치하지 않는 일은 이론상 불가능하기 때문에 이 논문에서는 자세히 다루지 않기로 한다(Bardeen & Petterson 1975).

3. 펄사 제트

앞장에서 다룬 펄사 자기권과 플라즈마의 운동에 대하여 알아보기로 하자. 플라즈마의 흐름은 약하게는 항성풍(stellar wind), 강하게는 천체물리학적 제트(jet)로 우리에게 관측되지만 여기에서는 편의상 제트로 용어를 통일하도록 한다. 플라즈마는 당연히 식 (1-1)을 만족하는 자기유체역학(magnetohydrodynamics)의 연속 방정식

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3-1)$$

과 Euler 방정식

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3-2)$$

에 의하여 기술된다. 식 (3-1), (3-2)에서 ρ 는 플라즈마의 밀도, \mathbf{v} 는 플라즈마의 속도, P 는 압력이고 중력은 무시하고 있음에 유의하자. 입자들은 toroidal 방향으로 $v_T = R\Omega$ 로 회전한다고 생각하고 여기에 poloidal 방향의 속도를 더해 전체 속도 \mathbf{v} 를

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_T + \mathbf{v}_P \quad (3-3)$$

와 같이 나타내자. 그러면 식 (1-2), (2-3)으로부터

$$\nabla \times (\mathbf{v}_P \times \mathbf{B}_P) = 0 \quad (3-4)$$

$$\nabla \times (\mathbf{v}_P \times \mathbf{B}_T + \mathbf{v}_T \times \mathbf{B}_P) = 0 \quad (3-5)$$

가 된다. 여기서 \mathbf{v}_T 는 식 (2-7)로 주어지는 \mathbf{v}_{FT} 와는 다른다는 점에 유의하자. 즉 자기력선과 플라즈마의 속도는 달라지는 것이다.

식 (3-4)는 \mathbf{v}_P 를 임의의 스칼라 κ 를 이용하여

$$\mathbf{v}_P \equiv \kappa \mathbf{B}_P \quad (3-6)$$

로 놓을 수 있게 하여준다. 식 (3-6)을 이용하면 식 (3-5)로부터

$$\mathbf{B}_P \cdot \nabla \left(\Omega - \frac{\kappa B_T}{R} \right) = 0 \quad (3-7)$$

을 얻는다. 즉 이 경우 Ω_F 는

$$\Omega_F = \Omega - \frac{\kappa B_T}{R} \quad (3-8)$$

가 되어야 자기력선을 따라서 일정한 값을 갖게 된다. 식 (3-8)이 성립하는 경우 플라즈마 속도의 toroidal 성분은

$$v_T = R\Omega = R\Omega_F + \kappa B_T \quad (3-9)$$

로 주어진다. 여기서 κB_T 항은 궁극적으로 v_T 를 감소시키는 방향으로 작용하여 <그림 1>의 열린 자기력선을 따라 운동하는 플라즈마 입자들의 v_T 가 무한히 증가하는 것을 막는 작용을 한다. 따라서 light cylinder 근처에서 v_T 가 광속을 넘는 일은 근본적으로 불가능하게 된다. 식 (3-6), (3-9)를 결합하면

$$\mathbf{v} = \kappa \mathbf{B} + R\Omega_F \mathbf{1}_\phi \quad (3-10)$$

과 같이 나타낼 수 있게 된다. 식 (3-10)의 첫 항은 식 (2-8), (2-12)의 결과에 전혀 영향을 미치지 않음에 유의하자. 식 (3-6)을 이용하면 연속 방정식 (3-1)은

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\rho \kappa \mathbf{B}_P) = \mathbf{B}_P \cdot \nabla (\rho \kappa) = 0 \quad (3-11)$$

이 되므로

$$\eta \equiv \rho \kappa \quad (3-12)$$

로 주어지는 양 또한 한 자기력선을 따라서 일정한 값을 갖게 된다.

Euler 방정식 (3-2)의 toroidal 성분으로부터

$$\mathbf{B}_P \cdot \nabla \left(-\eta R^2 \Omega + \frac{1}{4\pi} R B_T \right) = 0 \quad (3-13)$$

를 얻을 수 있으므로 식 (2-16)을 이용하면

$$L \equiv R^2 \Omega - \frac{RB_T}{4\pi\eta} = Rv_T + \frac{I}{2\pi c\eta} \quad (3-14)$$

값 역시 자기력선을 따라서 일정한 값을 갖게 된다. 여기서 L 은 단위 질량 당 각운동량이라는 사실을 쉽게 알 수 있다.

Euler 방정식 (3-2)의 poloidal 성분은

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_P \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} - R^2 \Omega \Omega_F \right) \\ = \mathbf{B}_P \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\Omega_F R B_T}{4\pi\eta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3-15)$$

로 귀착되므로

$$E \equiv \frac{v^2}{2} - \frac{\Omega_F R B_T}{4\pi\eta} = \frac{v^2}{2} + \frac{I\Omega_F}{2\pi c\eta} \quad (3-16)$$

값 또한 자기력선을 따라서 일정한 값을 갖게 된다. 여기서 E 는 단위 질량 당 에너지라는 사실도 쉽게 알 수 있다.

플라즈마의 상태 방정식은 s 를 플라즈마 입자 당 엔트로피라고 할 때

$$\mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \quad (3-17)$$

을 만족하므로 s 또한 자기력선을 따라서 일정한 값을 갖게 된다. 지금까지 정의된 Ω_F , η , L , E , s 등이 자기력선을 따라서 보존되는 양들이라는 사실은 Chandrasekhar(1956)에 의하여 최초로 소개되었고 Mestel(1961)에 의하여 확실히 자리잡게 되었다. 즉 Ω_F , η , L , E , s 는 integration of motion 으로서 $\Omega_F = \Omega_F(\Psi)$, $\eta = \eta(\Psi)$, $L = L(\Psi)$, $E = E(\Psi)$, $s = s(\Psi)$ 를 만족하는 것이다.

Mestel(1961)은 식 (3-8), (3-12), (3-14)로부터

$$v_\phi = \frac{1}{R} \frac{R^2 \Omega_F - M_A^2 L}{1 - M_A^2} \quad (3-18)$$

$$\frac{I}{2\pi} = c\eta \frac{L - R^2 \Omega_F}{1 - M_A^2} \quad (3-19)$$

를 얻었다. 식 (3-18), (3-19)에서

$$M_A^2 \equiv \frac{4\pi\eta^2}{\rho} = 4\pi\rho\kappa^2 = \frac{4\pi\rho v_P^2}{B_P^2} \quad (3-20)$$

은 Alfvénic Mach 수이다. 따라서 잘 알려진 $X-t$ type의 해가 $M_A = 1$ 인 곳에서 주어지는 제트를 기술할 수 있었다(Weber & Davis 1967; Mestel 1968; Okamoto 1975, 1978; Sakurai 1985).

제트 방정식, 즉 Grad-Shafranov 방정식은 식 (3-2)의 poloidal 성분으로부터

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \left(\frac{R\Omega_F}{c} \right)^2 - M_A^2 \right\} \Delta^* \Psi \\ & - \frac{1}{2c^2 R^2} \nabla(R^4 \Omega_F^2) \cdot \nabla \Psi - \frac{M_A^2}{\kappa} \nabla \kappa \cdot \nabla \Psi \\ & + R^2 \frac{M_A^2}{\kappa^2} \{ E' - (L\Omega_F)' + Rv_\phi \Omega_F' \} \\ & + \frac{16\pi^2 I}{c^2} \left\{ I' + \frac{c}{8\pi^2} \frac{M_A^2}{\kappa} (Rv_\phi)' \right\} - \frac{4\pi R^2 P}{k} s' = 0 \end{aligned} \quad (3-21)$$

또는

$$\nabla \cdot \left[\left\{ 1 - \left(\frac{R\Omega_F}{c} \right)^2 - M_A^2 \right\} \nabla \Psi \right]$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\Omega_F}{c^2} \nabla \Omega_F \cdot \nabla \Psi + \frac{1}{R^2} \left(\nabla M_A^2 - \frac{M_A^2}{\kappa} \nabla \kappa \right) \cdot \nabla \Psi \\ & + \frac{M_A^2}{\kappa^2} \{ E' - (L\Omega_F)' + Rv_\phi \Omega_F' \} \\ & + \frac{16\pi^2 I}{c^2 R^2} \left\{ I' + \frac{c}{8\pi^2} \frac{M_A^2}{\kappa} (Rv_\phi)' \right\} - \frac{4\pi P}{k} s' = 0 \end{aligned} \quad (3-22)$$

가 된다. 식 (3-22)에서 $(') \equiv d/d\Psi$ 이고 k 는 Boltzmann 상수이다.

식 (3-21), (3-22)는 ‘제트 방정식’으로서 최근까지 수 많은 사람들에 의하여 여러 가지 방법으로 유도되고 수치해석적으로 풀렸다(Mestel 1968; Okamoto 1975; Heinemann & Olbert 1978; Blandford & Payne 1982; Lovelace et al. 1986; Mestel & Shibata 1994). 식 (3-21), (3-22)에서 극한 $M_A^2 \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$ 을 취하면 식 (2-28), (2-29)가 되는 것은 물론이다. 그리고 $M_A^2 \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$ 인 경우 integral of motion 중에서 $\eta = \eta(\Psi)$, $s = s(\Psi)$ 는 자동으로 사라지고 식 (2-28), (2-29)에서 보는 바와 같이 $\Omega_F = \Omega_F(\Psi)$, 그리고 $L = L(\Psi)$, $E = E(\Psi)$ 대신 $I = I(\Psi)$, 이렇게 두 개밖에 남지 않게 되는 것이다.

4. 블랙홀

여기서부터는 일반상대성이론이 적용되기 때문에 간편한 $c = G = \hbar \equiv 1$ 단위를 사용하기로 한다. 질량이 M 인 블랙홀의 Schwarzschild 풀이가 구체적으로 계량텐서 $g_{\mu\nu}$ 에 의하여

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} \\ &+ r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \end{aligned} \quad (4-1)$$

이라는 사실이 알려진 지 반세기가 지나 블랙홀의 Kerr(1963) 풀이가 발견되고, Boyer & Lindquist(1967)에 의하여 질량 M , 각운동량 J 를 갖는 Kerr 블랙홀 주위의 시공간 계량(metric)이 구체적으로

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}) dt^2 - \frac{4aM r \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi \\ &+ \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{A}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2 \end{aligned} \quad (4-2)$$

처럼 주어진다는 사실이 발견되면서 블랙홀 연구에 다시 불이 붙게 되었다. 식 (4-2)에서

$$a \equiv \frac{J}{M} \quad (4-3)$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 \quad (4-4)$$

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (4-5)$$

$$A \equiv (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \quad (4-6)$$

와 같은 정의가 사용되었다.

Kerr 블랙홀의 사건의 지평선(event horizon) $r \equiv r_H$ 는 식 (4-4)로 주어지는 Δ 값이 0이 되는 곳, 즉

$$r_{\pm} \equiv M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (4-7)$$

와 같이 두 균데에 존재하게 된다. 하지만 안쪽 사건의 지평선은 관측이 불가능하기 때문에 바깥쪽 사건의 지평선만이 천체물리학적 의미를 지니게 된다. 따라서 특별한 경우가 아닌 한 $r_H = r_+$ 이고 블랙홀의 각속도 Ω_H 는

$$\Omega_H = \frac{a}{2Mr_+} = \frac{a}{2Mr_H} \quad (4-8)$$

로 주어지게 된다. 사건의 지평선과

$$r = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (4-9)$$

사이의 시공간을 운동권(ergosphere)이라고 부르는데, 이 안에서는 정지되어 있는 관측자를 생각 할 수 없다. 따라서 Kerr 블랙홀 주위를 적도면에 평행하게 회전하는 관측자를 생각할 수밖에 없는데, 그 관측자의 각속도 ω 는

$$\omega = \frac{2aMr}{A} \quad (4-10)$$

이 된다. 회전하는 이 관측자는 나름대로 단위 벡터

$$\mathbf{e}_r = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial r}, \mathbf{e}_{\theta} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial \theta}, \mathbf{e}_{\phi} = \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (4-11)$$

로 주어지는 관성계에서 블랙홀에 의한 강제 회전을 상쇄시키며 주위를 관측하게 되므로 흔히 ZAMO(Zero-Angular-Momentum-Observer)라고 불린다(Bardeen et al. 1972).

식 (4-11)에서 비상대론적 경우와 달리 단위 벡터 표시로 1 대신 \mathbf{e} 를 쓰고 있음에 유의하자. 상대론에서 벡터 \mathbf{e} 는 크기가 1이라는 보장이 없어, 예를 들어 $\mathbf{e}_{\theta} = \partial/\partial\theta$ 는 크기가 1이 아니고 식 (4-11)로 주어진 \mathbf{e}_{θ} 의 크기가 1이 된다. 식 (4-11)에서 $\tilde{\omega}$ 는

$$\tilde{\omega} \equiv \sqrt{\frac{A}{\Sigma}} \sin \theta \quad (4-12)$$

로 정의되는 양으로 Kerr 블랙홀 주위에서 원통 좌표계 $(\tilde{\omega}, \phi, z)$ 를 구성한다.

Penrose(1969)는 Kerr 블랙홀의 운동권을 이용한 에너지 추출을 처음으로 발견하였다. 즉 운동권으로 들어간 물체가 블랙홀로 빨려들어가지 않고 밖으로 다시 나올 경우 더 큰 에너지를 가질 수도 있다는 사실을 발견한 것이다. 하지만 이 ‘Penrose 과정’은 물체가 광속에 가깝게 운동할 때만 천체물리학적으로 흥미가 있어 활용되지 못하였다(Bardeen et al. 1972). 곧 이어 파동을 이용하여 에너지를 추출하는 방법이 쏟아져 나왔지만 이 또한 흥미로운 결과를 꺼내지는 못하였다 (Zel'dovich 1971, 1972; Misner 1972; Press & Teukolsky 1972; Starobinsky 1973; Teukolsky & Press 1974). 하지만 Kerr 블랙홀은 운동권의 회전 에너지 이외에 근본적으로 추출 가능한 회전 질량 M_{rot}

$$M_{rot} = M - \sqrt{\frac{M}{2}(M + \sqrt{M^2 - a^2})} \quad (4-13)$$

을 가지고 있다(Christodoulou 1970). 식 (4-13)으로 주어지는 회전 질량은 Kerr 블랙홀이 가장 빨리 회전하는 경우, 즉 $a = M$ 인 경우 총 질량 M 의 29 %에 이른다. 보통의 수소 핵융합의 효율이 1%에 미치지 못한다는 사실을 상기하면 블랙홀의 회전 질량을 추출하는 일은 정말 효율적인 에너지 과정이라는 사실을 깨닫게 된다. 더구나 은하 중앙에 있는 거대한 블랙홀의 경우 그 에너지의 크기란 상상을 초월하고 남는 것이다.

1970년대 중반 Hawking(1974, 1975)에 의하여 블랙홀은 더 이상 ‘괴물’이 아니게 되었다. 이는 곧 블랙홀 전기역학(Damour 1978; Znajek 1978), 블랙홀 열역학(Hawking 1976) 등으로 발전하게 된 계기가 되었다. 그리하여 블랙홀은 여느 천체와 마찬가지로 전하 σ_H , 전류 \mathbf{j}_H , 저항 R_H , 전기장 \mathbf{E}_H , 자기장 \mathbf{B}_H , 온도 T_H , 엔트로피 s_H 등을 소유하게 된다.

블랙홀 전기역학은 블랙홀 주위에 자기장을 지닌 유입 물질 원반(accretion disk)이 존재할 때 더욱 다양해진다. 홀로 있는 블랙홀은 원래 질량, 각운동량, 전하밖에 소유할 수 없지만, 주위에 자기장을 지닌 원반이 있는 경우는 자기력선이 계속 유입되므로 중성자성과 마찬가지로 자기권을 소유하게 되는 것이다. 따라서 블랙홀 자기권 모델은 앞에서 살펴본 중성자성 자기권 모델은 물론이고 유입물질 원반 자기권 모델에도 기초를 둘 수밖에 없다.

다행히 70년도 초반 비상대론적, 상대론적 유입물질 원반의 단순한 구조가 알려지게 되었다 (Shakura & Sunyaev 1973; Novikov & Thorne 1973). 그러자 유입물질 원반의 자기권 모델이 연구되었고 마침내 Lovelace(1976), Blandford(1976) 등에 의하여 골격이 갖추어지게 되었다. 하지만 블랙홀 자기권 모델은 근본적으로 상대론적이어야 한다는 점에서 중성자성이나 유입물질 원반의 경우와 다르다.

블랙홀 전기역학에 기초를 두고 블랙홀의 회전 질량을

추출하는 모델이 마침내 Blandford & Znajek(1977, 이하 BZ)에 의하여 제안된다. 하지만 BZ는 Kerr 블랙홀의 4차원 시공간 계량(4-2)을 바탕으로 기술하였기 때문에 식(2-28), (2-29)에 해당하는 상대론적 Grad-Shafranov 방정식이

$$\frac{\Sigma B_T}{\Delta \sin \theta} \frac{\partial B_T}{\partial A_\phi} = \omega^2 H_1 + 2\omega H_2 + H_3$$

$$+ \frac{\sin \theta}{\Sigma \Delta} (A\omega - 2Mar) \left\{ \Delta \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \frac{\partial \omega}{\partial A_\phi},$$

$$\begin{aligned} H_1 &\equiv \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A \sin \theta \partial A_\phi}{\Sigma} \right) + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A \sin \theta \partial A_\phi}{\Sigma} \right), \\ H_2 &\equiv -2Ma \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \sin \theta \partial A_\phi}{\Sigma} \right) + \frac{r}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta \partial A_\phi}{\Sigma} \right) \right\}, \\ H_3 &\equiv -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Sigma - 2Mr \partial A_\phi}{\Sigma \sin \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Sigma - 2Mr \partial A_\phi}{\Sigma \Delta \sin \theta} \right) \end{aligned} \quad (4-14)$$

처럼 주어지는 등 상대적으로 복잡할 수밖에 없었다. 식(4-14)에서 A_ϕ 는

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A} \quad (4-15)$$

로 정의되는 벡터 포텐셜 \mathbf{A} 의 toroidal 성분이다.

Macdonald & Thorne(1982, 이하 MT)은 BZ 이론을 상대적으로 간명한 ‘3+1 시공간’ 계량을 이용하여 블랙홀 자기권 모델을 구축하였다. 특히 MT는 BZ 이론을 전자공학 회로에 비유하여 알기 쉽게 설명함으로써 천문학자들의 블랙홀 자기권 이론 이해에 큰 기여를 하였다. 3+1 계량은 Park(1990)에 정리되어 있음을 밝혀둔다. 원래 3+1 계량은 Arnowitt et al. (1962)에 의하여 양자 중력을 연구할 목적으로 개발되었으나 그 후 상대론적 천체물리학 문제를 컴퓨터로 푸는 방향으로 많이 활용되었고, 마침내 Thorne & Macdonald(1982)에 이르러 전기역학의 주요 수단으로 자리를 잡게 되었다. 그 내용은 교과서 Thorne et al.(1986), Novikov & Frolov(1988)에 잘 정리되어 있는데, 계량이

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -\alpha^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \end{aligned} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4-16)$$

꼴로 주어진다. 식(4-16)에서 α 는 지연 함수(lapse function), β 는 이동 벡터(shift vector)라고 불리운다. 지연 함수 α 는 사건의 지평선에서 0이 되고 블랙홀에서 멀어지면, 즉 비상대론적인 경우에는 1이 된다. 이동 벡터 β 는 회전하지 않는 Schwarzschild 블랙홀의 경우 0이 된다. 식(4-2)와 식(4-16)을 비교하면 블랙홀 주위의 계량은

$$\alpha = \sqrt{\frac{\Delta \Sigma}{A}}, \quad \beta^r = \beta^\theta = 0, \quad \beta^\phi = -\omega = -\frac{2aMr}{A}$$

$$g_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta}, \quad g_{\theta\theta} = \Sigma, \quad g_{\phi\phi} = \tilde{\omega}^2 = \frac{A}{\Sigma} \sin^2 \theta \quad (4-17)$$

로 주어짐을 알 수 있다.

식(4-17)로 주어지는 $\tilde{\omega}$ 를 이용하여 $\mathbf{m} \equiv \tilde{\omega} \mathbf{e}_\phi$ 로 정의되는 벡터 \mathbf{m} 은 축대칭 Killing 벡터가 되며 ∂A 는 \mathbf{m} -고리(loop)라고 보면 된다. 축대칭 가정으로부터 임의의 스칼라 f 와, 임의의 벡터 \mathbf{f} , 그리고 \mathbf{m} 에 대한 Lie 미분 L_m 에 대하여

$$\mathbf{m} \cdot \nabla f = 0, \quad L_m \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (4-18)$$

이 성립한다.

따라서 Kerr 블랙홀 주위 ZAMO가 측정하는 Maxwell 방정식은

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho_e \quad (4-19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4-20)$$

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{E}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla \omega) \mathbf{m} \quad (4-21)$$

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{B}) = 4\pi \alpha \mathbf{j} - (\mathbf{E} \cdot \nabla \omega) \mathbf{m} \quad (4-22)$$

로 주어져야 한다(MT; Thorne et al. 1986; Novikov & Frolov 1988).

블랙홀 사건의 지평선에는 $\alpha \rightarrow 0, \omega \rightarrow \Omega_H$ 이 된다. 지평선에 수직인 단위 벡터 \mathbf{n} 은 중력 가속도 g_H 에 의하여

$$\mathbf{n} = g_H \frac{\partial}{\partial \alpha} \quad (4-23)$$

로 주어지므로 전자기장은 지평선에 수직인 성분(\perp)과 평행인 성분(\parallel)으로 나누어 생각하면

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \equiv E_\perp \rightarrow 4\pi \sigma_H \quad (4-24)$$

$$\alpha \mathbf{E}_\parallel \rightarrow \mathbf{E}_H = R_H \mathbf{j}_H = 4\pi \mathbf{j}_H \quad (4-25)$$

$$\alpha \mathbf{B}_\parallel \rightarrow \mathbf{B}_H = 4\pi \mathbf{j} \times \mathbf{n} \quad (4-26)$$

$$\mathbf{E}_H = \mathbf{n} \times \mathbf{B}_H \quad (4-27)$$

로 주어진다(MT; Thorne et al. 1986; Novikov & Frolov 1988).

식(4-1)과 식(4-16)을 비교하면 Schwarzschild 블랙홀의 경우에는

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}, \quad \beta^r = \beta^\theta = \beta^\phi = \omega = 0, \\ g_{rr} &= \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \\ g_{\phi\phi} &= \tilde{\omega}^2 = r^2 \sin^2 \theta = R^2 \end{aligned} \quad (4-28)$$

으로 주어지고 Maxwell 방정식은 식(4-19), (4-20)은 같고 나머지는

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{E}) = \mathbf{0} \quad (4-29)$$

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{B}) = 4\pi\alpha \mathbf{j} \quad (4-30)$$

가 됨을 알 수 있다.

블랙홀 열역학 분야도 발전을 거듭한 결과, 엔트로피 s_H 는 사건의 지평선 면적 A_H 에 대하여

$$s_H = \frac{k}{4} A_H \quad (4-31)$$

와 같은 관계가 있음이 밝혀져 블랙홀 표면 면적 증가의 법칙이 나오게 되었다. 또한 블랙홀은 온도 T_H

$$T_H = \frac{1}{2\pi k} g_H \quad (4-32)$$

에 해당되는 흑체(blackbody)로 간주될 수 있다는 사실도 아울러 밝혀졌다.

5. 블랙홀 자기권

이 장에서는 앞장에서 기술된 블랙홀의 성질을 바탕으로 블랙홀의 자기권에 대하여 알아보기로 한다. 이 장에서는 2장과 마찬가지로 force-free 자기권을 생각한다.

앞에서 예를 든 \mathbf{m} -고리로 둘러싸인 면적 A 를 통과하는 자기 flux Ψ 는 식 (2-9)와 똑같이

$$\Psi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-1)$$

로 정의되고 식 (2-10)과 유사하게

$$\nabla\Psi = 2\pi\tilde{\omega}\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{B}_P = 2\pi\mathbf{m} \times \mathbf{B}_P \quad (5-2)$$

를 만족하며 \mathbf{B}_P 식 (2-11)처럼

$$\mathbf{B}_P = \frac{\nabla\Psi \times \mathbf{e}_\phi}{2\pi\tilde{\omega}} = \frac{\nabla\Psi \times \mathbf{m}}{2\pi\tilde{\omega}^2} \quad (5-3)$$

으로 주어지게 된다.

또한 식 (2-13), (2-14), (2-15)처럼

$$I = - \int_A \alpha\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-4)$$

와 같이 정의하면

$$\nabla I = -2\pi\tilde{\omega}\mathbf{e}_\phi \times (\alpha\mathbf{j}_P) = -2\pi\mathbf{m} \times (\alpha\mathbf{j}_P) \quad (5-5)$$

를 만족하여 $\alpha\mathbf{j}_P$ 는

$$\alpha\mathbf{j}_P = -\frac{\nabla I \times \mathbf{e}_\phi}{2\pi\tilde{\omega}} = -\frac{\nabla I \times \mathbf{m}}{2\pi\tilde{\omega}^2} \quad (5-6)$$

가 된다. 그리고 \mathbf{B}_T 는 식 (2-16)과 유사하게

$$\mathbf{B}_T = -\frac{2I}{\alpha\tilde{\omega}}\mathbf{e}_\phi = -\frac{2I}{\alpha\tilde{\omega}^2}\mathbf{m} \quad (5-7)$$

가 된다. 식 (5-4)에서 \mathbf{j} 대신 $\alpha\mathbf{j}$ 를 쓴 이유는 전자기적 연속 방정식이 블랙홀 주위에서

$$\nabla \cdot (\alpha\mathbf{j}) = 0 \quad (5-8)$$

꼴로 주어지기 때문이다.

자기력선들은 비상대론적인 경우 Ω_F 의 각속도로 회전하지만 Kerr 블랙홀의 경우에는 ZAMO에 의하여

$$\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_{FT} \equiv \frac{\Omega_F - \omega}{\alpha}\tilde{\omega}\mathbf{e}_\phi = \frac{\Omega_F - \omega}{\alpha}\mathbf{m} \quad (5-9)$$

로 주어진다. 전기장은 식 (1-2)에 의하여 식 (2-12)와 유사하게

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_P = -\mathbf{v}_{FT} \times \mathbf{B}_P = -\frac{\Omega_F - \omega}{2\pi\alpha}\nabla\Psi \quad (5-10)$$

로 주어진다. 식 (5-10)을 식 (4-21)에 대입하면 식 (2-27)과 똑같이

$$\mathbf{B}_P \cdot \nabla\Omega_F = 0 \quad (5-11)$$

를 만족하여 여전히 Ferraro의 iso-rotation이 성립하고 있음을 알 수 있다.

전하 밀도는 식 (4-19), (5-10)에 의하여

$$\rho_e = -\frac{1}{8\pi^2}\nabla \cdot \left(\frac{\Omega_F - \omega}{\alpha}\nabla\Psi \right) \quad (5-12)$$

로 주어진다. 그리고 식 (4-22)에 식 (5-3), (5-8)을 대입하여 \mathbf{j} 의 toroidal 성분을

$$j_T = -\frac{\tilde{\omega}}{8\pi^2\alpha} \left\{ \nabla \cdot \left(\frac{\alpha}{\tilde{\omega}^2}\nabla\Psi \right) + \frac{\Omega_F - \omega}{\alpha}\nabla\omega \cdot \nabla\Psi \right\} \quad (5-13)$$

과 같이 구할 수 있다. 식 (5-12)와 (5-13)을 연립하면

$$\rho_e = \frac{(\Omega_F - \omega)\tilde{\omega}}{\alpha} \left(j_T - \frac{1}{4\pi^2\tilde{\omega}}\mathbf{G} \cdot \nabla\Psi \right) \quad (5-14)$$

를 얻는다. 식 (5-14)에서 \mathbf{G} 는

$$\mathbf{G} \equiv \frac{1}{2} \left\{ \nabla \ln \frac{(\Omega_F - \omega)\tilde{\omega}}{\alpha} - \frac{(\Omega_F - \omega)\tilde{\omega}^2}{\alpha^2}\nabla\omega \right\} \quad (5-15)$$

이다. 또한 poloidal 성분은 식 (2-20)과 마찬가지로 식 (5-2), (5-5)로부터

$$\mathbf{j}_P = -\frac{1}{\alpha}\frac{dI}{d\Psi}\mathbf{B}_P \quad (5-16)$$

를 얻는다.

식 (5-16)을 상대론적 force-free 조건

$$\rho_e\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (5-17)$$

의 poloidal 성분에 대입하면

$$-\rho_e \frac{(\Omega_F - \omega)\tilde{\omega}}{\alpha} + j_T + \frac{1}{\alpha} \frac{dI}{d\Psi} B_T = 0 \quad (5-18)$$

을 얻는다. 식 (5-18)에 식 (5-12), (5-13)을 대입하면 Grad-Shafranov 방정식

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \frac{(\Omega_F - \omega)^2 \tilde{\omega}^2}{\alpha^2} \right\} \Delta^* \Psi \\ & - \frac{1}{2\alpha^2 \tilde{\omega}^2} [\nabla \cdot \tilde{\omega}^4 (\Omega_F - \omega)^2] - 2\tilde{\omega}^4 (\Omega_F - \omega) \nabla \omega \cdot \nabla \Psi \\ & + \frac{1}{\alpha} \left\{ 1 + \frac{(\Omega_F - \omega)^2}{\alpha^2} \right\} \nabla \alpha \cdot \nabla \Psi + \frac{16\pi^2 I}{\alpha^2} \frac{dI}{d\Psi} = 0 \end{aligned} \quad (5-19)$$

또는

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left[\frac{\alpha^2}{\tilde{\omega}} \left\{ 1 - \frac{(\Omega_F - \omega)^2 \tilde{\omega}^2}{\alpha^2} \right\} \nabla \Psi \right] \\ & + \frac{\Omega_F - \omega}{\alpha} \nabla \Omega_F \cdot \nabla \Psi + \frac{16\pi^2 I}{\alpha \tilde{\omega}^2} \frac{dI}{d\Psi} = 0 \end{aligned} \quad (5-20)$$

를 얻게 된다. 식 (5-19)과 (5-20)은 BZ가 유도한 식 (4-14)와 같은 식이며, 비상대론적인 경우, 즉 $\alpha \rightarrow 1$, $\omega \rightarrow 0$, $\tilde{\omega} \rightarrow R$ 인 경우 각각 식 (2-28), (2-29)로 되돌아간다.

식 (5-14)과 (5-18)을 연립하면

$$\rho_e = \frac{\Omega_F - \omega}{4\pi^2 \alpha} \frac{\frac{8\pi^2 I}{\alpha^2} \frac{dI}{d\Psi} - \mathbf{G} \cdot \nabla \Psi}{1 - \left\{ \frac{(\Omega_F - \omega)\tilde{\omega}}{\alpha} \right\}^2} \quad (5-21)$$

$$j_T = \frac{1}{4\pi^2 \tilde{\omega}} \frac{\frac{8\pi^2 I}{\alpha^2} \frac{dI}{d\Psi} - \left\{ \frac{(\Omega_F - \omega)\tilde{\omega}}{\alpha} \right\}^2 \mathbf{G} \cdot \nabla \Psi}{1 - \left\{ \frac{(\Omega_F - \omega)\tilde{\omega}}{\alpha} \right\}^2} \quad (5-22)$$

를 얻는다. 따라서 편사 자기권 경우와는 달리 블랙홀 자기권에서는 2개의 light cylinder

$$\tilde{\omega} = \frac{\alpha}{\Omega_F - \omega}, \quad \frac{\alpha}{\omega - \Omega_F} \quad (5-23)$$

가 존재하게 된다(Okamoto 1992).

여기서 BZ 과정에 의한 블랙홀 에너지 추출에 대하여 알아보자. Poynting 벡터들은 식 (2-30), (2-31)과 유사하게

$$\mathbf{S}_L = \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \left\{ -B_T \mathbf{B} + \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \mathbf{e}_\phi \right\} \quad (5-24)$$

$$\mathbf{S}_E = \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \omega \tilde{\omega} B_T \mathbf{B} + \frac{1}{2} \omega \tilde{\omega} (E^2 + B^2) \mathbf{e}_\phi \right\} \quad (5-25)$$

으로 주어진다. Poynting 벡터의 toroidal 성분은 의미가 없으므로 poloidal 성분만 생각하고 식 (5-7), (5-10)을 식 (5-24), (5-25)에 대입하면

$$\mathbf{S}_{LP} = -\frac{\tilde{\omega}}{4\pi} B_T \mathbf{B}_P = \frac{I}{2\pi\alpha} \mathbf{B}_P \quad (5-26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{EP} &= \frac{\alpha}{4\pi} \mathbf{E}_P \times \mathbf{B}_T + \omega \mathbf{S}_{LP} \\ &= \frac{I}{2\pi} \left(\frac{\omega}{\alpha} \mathbf{B}_P - \frac{1}{\tilde{\omega}} \mathbf{E} \times \mathbf{e}_\phi \right) = \Omega_F \mathbf{S}_{LP} \end{aligned} \quad (5-27)$$

가 된다.

블랙홀 사건의 지평선에서는 $\alpha \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \Omega_H$ 이므로 식 (4-26), (4-27)을 이용하면

$$\mathbf{E}_H = (\Omega_H - \Omega_F) \tilde{\omega} \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{B}_\perp \quad (5-28)$$

가 되고 이것은 식 (4-25)와 함께 중요한 조건

$$I = \frac{1}{2} (\Omega_H - \Omega_F) \tilde{\omega}^2 B_\perp \quad (5-29)$$

를 제공한다.

여기서 <그림 2>의 ‘a’와 같은 flux tube를 생각하자. 이 부분은 블랙홀에 바로 연결되어 있기 때문에 식 (5-29)을 이용하면 블랙홀의 사건의 지평선에서

$$-\alpha \mathbf{S}_L \cdot \mathbf{n} \rightarrow \frac{dJ}{dS_H dt} = -\frac{1}{4\pi} (\Omega_H - \Omega_F) (\tilde{\omega} B_\perp)^2 \quad (5-30)$$

$$\begin{aligned} -\alpha \mathbf{S}_E \cdot \mathbf{n} \rightarrow \frac{dM}{dS_H dt} &= -\frac{\Omega_F}{4\pi} (\Omega_H - \Omega_F) (\tilde{\omega} B_\perp)^2 \\ &= \Omega_F \frac{dJ}{dS_H dt} \end{aligned} \quad (5-31)$$

가 된다. 식 (5-30), (5-31)은 블랙홀 사건의 지평선으로부터 적색이동을 겪으며 바깥쪽으로 유출되는 각운동량과 에너지의 양을 의미한다. 조건 $\Omega_F < \Omega_H$ 가 만족되는 한 식 (5-31)은 에너지의 흐름이 곧 블랙홀 질량의 감소를 의미함에 유의하자. 이리하여 BZ는 블랙홀의 회전 질량 추출을 전기역학적 방법으로 가능하게 만들었던 것이다.

식 (5-31)에서 한가지 재미있는 사실이 등장한다. 즉

$$\Omega_F \sim \frac{\Omega_H}{2} \quad (5-32)$$

를 만족하는 경우에만 각운동량과 에너지가 최대로 추출 가능하다는 점이다. 만일 $\Omega_F \sim 0$ 이거나 $\Omega_F \sim \Omega_H$ 이면 식 (5-31)에 의해 각운동량과 에너지의 추출이 사라진다. 이리하여 Ω_F 가 어떤 값을 갖느냐 하는 문제에 관심이 집중된 적이 있었다(Lovelace et al. 1979; MT; Phinney

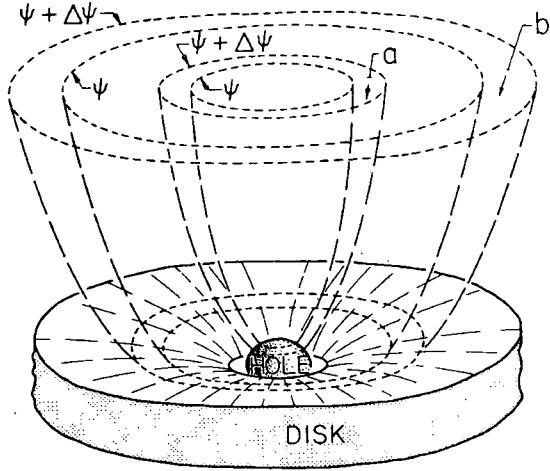


그림 2.— 블랙홀 자기권에서 생각하는 flux tube의 예. 'a'는 블랙홀과 'b'는 유입물질원반과 이어져 있다(MT에서 발췌).

1983). 식 (5-32)를 가정하면 블랙홀 전체에서 추출되는 총 에너지 W 는

$$W \sim 10^{45} erg/\text{초} \left(\frac{a}{M} \right)^2 \left(\frac{M}{10^9 M_\odot} \right)^2 \left(\frac{B}{10^4 G} \right)^2 \quad (5-33)$$

나 되어 활동성 은하핵 등을 설명하는 데에 큰 도움이 되었다(MT; Thorne et al. 1986; Novikov & Frolov 1988).

6. 블랙홀 제트

블랙홀 제트는 식 (3-22)을 Schwarzschild 블랙홀 주위에서 적용되도록 만든 미국 Cornell 대학 그룹에 의하여 깊게 연구되었다(Lovelace et al. 1986; Mobarrey & Lovelace 1986; Lovelace et al. 1987). 이 그룹의 연구는 끝까지 Kerr 블랙홀 자기권 모델을 다루지 않은 채 제트 쪽으로 초점이 옮겨졌다(Sulkanen & Lovelace 1990; Lovelace et al. 1991; Contopoulos & Lovelace 1994; Contopoulos 1994, 1995, 1996).

이리하여 Kerr 블랙홀 자기권을 완벽하게 상대론적으로 푼 Grad-Shafranov 방정식을 발견하는 영에는 일본 Nagoya 대학 그룹으로 넘어가게 된다(Nitta et al. 1991). 하지만 이 연구 결과도 4차원 시공간에 바탕을 두고 있어서 Grad-Shafranov 방정식이

$$\begin{aligned} & -\frac{\Delta^2 \sin^4 \theta (k_0 - M^2)}{4\pi\sqrt{-g}} \times \\ & \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\sqrt{-g}(k_0 - M^2)}{\Delta^2 \sin^4 \theta g_{rr}} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right\} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\sqrt{-g}(k_0 - M^2)}{\Delta^2 \sin^4 \theta g_{\theta\theta}} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right\} \right] \\ & = -2\pi \left[\frac{\Delta^2 \sin^4 \theta}{M^2} \left\{ \frac{\eta^2(E - \Omega_F L)^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right\}' \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2\pi \left[g_{tt} \left\{ \frac{\eta^2 L^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right\}' + g_{t\phi} \left\{ \frac{\eta^2 E L}{r^2 \sin^2 \theta} \right\}' \right] \\ & + \frac{4\pi \Delta^2 \sin^4 \theta}{M^4} \eta^2 (g_{t\phi} + g_{\phi\phi} \Omega_F) \times \\ & \left\{ \left(\frac{E - \Omega_F L}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - (k_0 - M^2) \right\} \Omega_F' \\ & + \frac{4\pi \Delta^2 \sin^4 \theta (k_0 - M^2)}{M^2} \eta \eta' \end{aligned} \quad (6-1)$$

처럼 난해하게 나타난다. 식 (6-1)에서 $k_0 \equiv g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega_F + g_{\phi\phi}\Omega_F^2$ 이고 $s = 0$ 이 가정되었다.

Beskin & Par'ev(1993, 이하 BP)가 MT처럼 3+1 시공간을 사용하여 모든 방정식을 집대성함으로써 이 분야의 연구가 일단락을 짓게 되었다. 이 논문에서는 BP의 방정식들을 살펴보기로 한다. 상대론적인 운동을 기술하기 위하여

$$\mathbf{u} \equiv \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}} \equiv \gamma \mathbf{v} \quad (6-2)$$

로 정의되는 4차원 속도의 공간 성분을 생각하자. 플라즈마는 당연히 상대론적 자기유체역학의 연속 방정식

$$\nabla \cdot (\alpha \rho \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\alpha n \mathbf{u}) = 0 \quad (6-3)$$

과 Euler 방정식

$$\rho \left\{ \frac{1}{\alpha} (\alpha \mathbf{v} + \omega \mathbf{m}) \right\} \cdot \nabla (\gamma \mathbf{v}) = -\nabla P + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (6-4)$$

에 의해 기술되어야 할 것이다. 식 (6-3)에서 n 은 수 밀도(number density)가 되겠다.

식 (3-12)로 정의된 η 를 새로

$$\eta_r \equiv \frac{\eta}{m} \quad (6-5)$$

처럼 정의하자. 식 (6-5)에서 m 은 우리가 생각하는 한 종류 입자의 질량이다. 식 (6-5)를 이용하면 식 (3-10), (3-14), (3-16), (3-17), (3-18)은 상대론적 변환에 의하여 각각

$$\mathbf{u} = \frac{\eta_r}{\alpha n} \mathbf{B} + \gamma \frac{(\Omega_F - \omega)\tilde{\omega}}{\alpha} \mathbf{e}_{\hat{\phi}} \quad (6-6)$$

$$L = \frac{I}{2\pi} + m\eta_r u_\phi \quad (6-7)$$

$$E = \frac{I\Omega_F}{2\pi} + m\eta_r (\alpha\gamma + \omega u_\phi) \quad (6-8)$$

$$u_{\hat{\phi}} = \frac{1}{\tilde{\omega}m\eta_r} \frac{(E - \Omega_F L)(\Omega_F - \omega)\tilde{\omega}^2 - LM_A^2}{\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)\tilde{\omega}^2 - M_A^2} \quad (6-9)$$

$$\frac{I}{2\pi} = \frac{\alpha^2 L - (\Omega_F - \omega)\tilde{\omega}^2(E - \omega L)}{\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)\tilde{\omega}^2 - M_A^2} \quad (6-10)$$

가 된다(Camenzind 1986; Takahashi et al. 1990; Nitta et al. 1991; BP; Beskin 1997; Beskin & Okamoto 2000). 식 (6-9), (6-10)에서 Mach 수는 (3-20)와 유사하게

$$M_A^2 = \frac{4\pi m \eta_r^2}{n} \quad (6-11)$$

로 주어진다. 식 (6-9), (6-10)로부터 Alfvén 면은

$$\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)\tilde{\omega}^2 - M_A^2 = 0 \quad (6-12)$$

인 곳에 존재한다는 사실을 알 수 있다.

이 장에서도 3장에서도 마찬가지로 Ω_F , η_r , L , E , s 는 integration of motion 으로서 오직 Ψ 만의 함수, 즉 $\Omega_F = \Omega_F(\Psi)$, $\eta_r = \eta_r(\Psi)$, $L = L(\Psi)$, $E = E(\Psi)$, $s = s(\Psi)$ 가 된다.

이 경우 Grad-Shafranov 방정식은

$$\begin{aligned} N \cdot \frac{1}{\alpha} \nabla_k \left(\frac{1}{\alpha \tilde{\omega}^2} \nabla^k \Psi \right) + \\ N \cdot \frac{1}{\alpha^2 \tilde{\omega}^2 (\nabla \Psi)^2} \frac{\nabla^a \Psi \cdot \nabla^b \Psi \cdot \nabla_a \nabla_b \Psi}{D} \\ + \frac{1}{\alpha^2 \tilde{\omega}^2} \nabla_k' N \cdot \nabla^k \Psi - \frac{N}{\alpha^2 \tilde{\omega}^2 (\nabla \Psi)^2} \frac{1}{2D} \nabla_k' F \cdot \nabla^k \Psi \\ + \frac{\Omega_F - \omega}{\alpha^2} \frac{d\Omega_F}{d\Psi} (\nabla \Psi)^2 + \frac{64\pi^4}{\alpha^2 \tilde{\omega}^2} \frac{1}{2M_A^2} \frac{\partial}{\partial \Psi} \frac{H}{N} \\ - 16\pi^3 mn \frac{1}{\eta_r} \frac{d\eta_r}{d\Psi} - 16\pi^3 nT \frac{ds}{d\Psi} = 0 \end{aligned} \quad (6-13)$$

이 된다(BP; Beskin 1997; Beskin & Okamoto 2000). 식 (6-13)에서 $a, b, k = r, \theta$ 이고 ∇_k' 는 M_A^2 를 제외한 모든 문자에 작용하고 $\partial/\partial\Psi$ 는 integration of motion에만 작용한다. 그리고

$$D \equiv \frac{N^2}{M_A^2} + \frac{\alpha^2}{M_A^2} \frac{B_{\hat{\phi}}^2}{B_P^2} - \frac{1}{u_P^2} \frac{N}{M_A} \frac{c_s^2}{1 - c_s^2} \quad (6-14)$$

$$F \equiv \frac{64\pi^4}{M_A^4} \frac{K}{N^2} - \frac{64\pi^4}{M_A^4} \alpha^2 \tilde{\omega}^2 \eta_r^2 m^2 \quad (6-15)$$

$$\begin{aligned} H \equiv \alpha^2 \tilde{\omega}^2 (E - \Omega_F L)^2 + \alpha^2 M_A^2 L^2 \\ - M_A^2 \tilde{\omega}^2 (E - \omega L)^2 \end{aligned} \quad (6-16)$$

$$\begin{aligned} K \equiv \alpha^2 \tilde{\omega}^2 (E - \Omega_F L)^2 \{ \alpha^2 - (\Omega_F - \omega) \tilde{\omega}^2 - 2M_A^2 \} \\ + M_A^4 \{ \tilde{\omega}^2 (E - \omega L)^2 - \alpha^2 L^2 \} \end{aligned} \quad (6-17)$$

$$N \equiv \alpha^2 - (\Omega_F - \omega) \tilde{\omega}^2 - M_A^2 \quad (6-18)$$

이며, 식 (6-13)에서

$$c_s \equiv \frac{1}{m} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_s \quad (6-19)$$

는 음속이다.

식 (6-13)에서 극한 $M_A^2 \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$ 을 취하면, 식 (5-19), (5-20)이 되고, 또한 식 (6-7), (6-8)로부터 관계식

$$E = \Omega_F L \quad (6-20)$$

를 얻는데 이것은 식 (2-33)과 식 (5-27)로 주어지는

$$\mathbf{S}_{EP} = \Omega_F \mathbf{S}_{LP} \quad (6-21)$$

와 일맥상통하게 된다. 그리고 이 경우 integration of motion 중에서 $\eta = \eta(\Psi)$, $s = s(\Psi)$ 는 자동으로 사라지고 식 (5-19), (5-20)에서 보는 바와 같이 $\Omega_F = \Omega_F(\Psi)$, 그리고 $L = L(\Psi)$, $E = E(\Psi)$ 대신 $I = I(\Psi)$, 이렇게 두 개밖에 남지 않게 되는 것도 3장의 경우와 똑같다. 식 (6-13)의 비상대론적 극한, 즉 $\alpha \rightarrow 1$, $\omega \rightarrow 0$, $\tilde{\omega} \rightarrow R$ 을 취하면 (3-21), (3-22)가 된다. 따라서 식 (6-13)에 극한 $M_A^2 \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 1$, $\omega \rightarrow 0$, $\tilde{\omega} \rightarrow R$ 을 취하면 식 (2-28), (2-29)가 되는 것이다.

7. 결론

이상 살펴본 바와 같이 지난 30년간 블랙홀 자기권 모델은 눈부신 발전을 거듭하여 왔다. 특히 BZ 이론의 등장으로 블랙홀은 ‘괴물’이라는 이미지를 벗어 던지고 에너지 탱크로서 우리에게 다가오게 되었다. 대부분 은하의 중앙에 존재하는 것으로 믿어지는 거대한 블랙홀들은 천체물리학의 세계를 풍요롭게 만들어가고 있다. 고온의 플라즈마 원반 속에 숨어서 강력한 제트를 분출하며 맹렬히 회전하고 있는 거대한 블랙홀은 21세기 천체물리학의 총아가 될것임에 틀림없다고 믿어진다.

지난 30년간 구체적인 모델이 구축되어서 이제 식 (1-1)을 버리고 축대칭이 아닌 모델 또는 시간에 따라 변하는 모델을 생각해 본다든지(Park & Vishniac 1988, 1989), 식 (1-3)을 버리고 non-degenerate 모델을 생각해 본다든지(Horiuchi et al. 1995), 아주 구체적인 자기유체역학적 접근에 대하여 생각해 본다든지(Beskin et al. 1998; Beskin & Okamoto 2000), γ -선 burst와 같은 현상과 연계하여 본다든지(Lee et al. 2000) 등과 같이 까다롭고 발상의 전환을 필요로 하는 분야들만 남아 있는 것처럼 보이기도 한다.

하지만 연구 대상이 블랙홀 사건의 지평선보다 조금만 더 커져도 바로 이론적 한계에 부딪히게 되어 있어, 예를 들어, 아직도 제트가 근본적으로 사건의 지평선 바로 바깥에서 형성되는지 아닌지조차 잘 모르고 있는 형편이다. 그렇다고 해서 관측이 잘 되어 자료가 축적되어 있는 것도 아니다. 허블 망원경의 분해능을 십분 발휘하여도 플라즈마 원반의 거죽만을 겨우 관측해낼 수 있을 뿐인데, 그 거죽의 지름은 몇 광년 정도로 중심 블랙홀의 지름보다 10^4 배 이상 크다.

이러한 관측적 한계와 이론적 한계 틈새 ‘처녀림’에 이론적으로 도전하는 일은 특히 한국 현실에 알맞은 연구과제다. 이 연구과제는 특히 관측 장비에 대한 의존도가 없기 때문에 아이디어만 좋다면 당장 선진국들과 경쟁할 수 있는 성격을 지니고 있다. 블랙홀 연구 풍토 조성에 조금이라도 기여할 수 있기를 바라는 마음으로 이 논문을 제출한다.

참고문헌

- Arnowitt, R., Deser, S., and Misner, C. W. 1962, in *Gravitation*, ed. Witten, L., (Wiley), 227
- Bardeen, J. M., and Petterson, J. A. 1975, *ApJL*, 195, 65
- Bardeen, J. M., Press, W. H., and Teukolsky, S. A. 1972, *ApJ*, 178, 347
- Beskin, V. S. 1997, *Phys. Usp.*, 40, 659
- Beskin, V. S., Gurevich, A. V., and Istomin, Y. N. 1993, *Physics of the Pulsar Magnetosphere*(Cambridge Univ. Press)
- Beskin, V. S., Kuznetsova, I. V., and Rafikov, R. R. 1998, *MNRAS*, 299, 341
- Beskin, V. S., and Okamoto, I. 2000, *MNRAS*, 313, 445
- Beskin, V. S., and Par'ev, V. I. 1993, *Phys. Usp.*, 36, 529 (BP)
- Blandford, R. D. 1976, *MNRAS*, 176, 465
- Blandford, R. D., and Payne, D. G. 1982, *MNRAS*, 199, 883
- Blandford, R. D., and Znajek, R. L. 1977, *MNRAS*, 179, 433 (BZ)
- Camenzind, M. 1986, *A&A*, 162, 32
- Chandrasekhar, S. 1956, *ApJ*, 124, 232
- Contopoulos, J. 1994, *ApJ*, 432, 508
- Contopoulos, J. 1995, *ApJ*, 446, 67
- Contopoulos, J. 1996, *ApJ*, 460, 185
- Contopoulos, J. and Lovelace, R. V. E. 1994, *ApJ*, 429, 139
- Damour, T. 1978, *Phys. Rev. D*18, 3598
- Goldreich, P., and Julian, W. H. 1969, *ApJ*, 157, 869 (GJ)
- Hawking, S. W. 1974, *Nature*, 248, 30
- Hawking, S. W. 1975, *Commun. Math. Physics*, 43, 199
- Hawking, S. W. 1976, *Phys. Rev. D*13, 191
- Heinemann, M., and Olbert, S. 1978, *J. Geophys. Res.*, 83, 2457
- Horiuchi, S., Mestel, L., and Okamoto, I. 1995, *MNRAS*, 275, 1160
- Julian, W. H. 1973, *ApJ*, 183, 967
- Kerr, R. P. 1963, *Phys. Rev. Lett.*, 11, 237
- Lee, H. K., Wijers, R. A. M. J., and Brown, G. E. 2000, *Physics Report*, 325, 83
- Lovelace, R. V. E. 1976, *Nature*, 262, 649
- Lovelace, R. V. E., Berk, H. L., and Contopoulos, J. 1991, *ApJ*, 379, 696
- Lovelace, R. V. E., MacAuslan, J., and Burns, M. 1979, in *Proceedings of La Jolla Institute Workshop on Particle Acceleration Mechanisms in Astrophysics*, ed. Arons, J., Max, C., and McKee, C., (AIP), 399
- Lovelace, R. V. E., Mehanian, C., Mobarrey, C. M., and Sukanen, M. E. 1986, *ApJS*, 62, 1
- Lovelace, R. V. E., Wang, J. C. L., and Sukanen, M. E. 1987, *ApJ*, 315, 504
- Macdonald, D. A., and Thorne, K. S. 1982, *MNRAS*, 198, 345 (MT)
- Mestel, L. 1961, *MNRAS*, 122, 473
- Mestel, L. 1968, *MNRAS*, 138, 359
- Mestel, L., and Shibata, S. 1994, *MNRAS*, 271, 621
- Michel, F. C. 1973a, *ApJ*, 180, 207
- Michel, F. C. 1973b, *ApJL*, 180, 133
- Misner, C. W. 1972, *Phys. Rev. Lett.*, 28, 994
- Mobarrey, C. M., and Lovelace, R. V. E. 1986, *ApJ*, 309, 455
- Novikov, I. D., and Frolov, V. P. 1988, *Physics of Black Holes*(Kluwer Academic Pub.)
- Novikov, I. D., and Thorne, K. S. 1973, in *Black Holes*, ed. DeWitt, C., & DeWitt, B. (Gordon & Breach), 343
- Okamoto, I. 1974, *MNRAS*, 167, 457
- Okamoto, I. 1975, *MNRAS*, 173, 357
- Okamoto, I. 1978, *MNRAS*, 185, 69
- Okamoto, I. 1992, *MNRAS*, 254, 192
- Park, S. J., and Hyun, J. J. 1987, *Pub. Korean Astro. Soc.*, 3, 12
- Park, S. J., and Vishniac, E. T. 1988, *ApJ*, 332, 135
- Park, S. J., and Vishniac, E. T. 1989, *ApJ*, 337, 78
- Park, S. J. 1990, *Pub. Korean Astro. Soc.*, 5, 17
- Penrose, R. 1969, *Nuovo Cim.*, 1, 252
- Phinney, E. S. 1983, Ph. D. thesis, Univ. of Cambridge
- Press, W. H., and Teukolsky, S. A. 1972, *Nature*, 238, 211
- Sakurai, T. 1985, *A&A*, 152, 121
- Scharlemann, E. T., and Wagoner, R. V. 1973, *ApJ*, 182, 951
- Shakura, N. I., and Sunyaev, R. A. 1973, *A&A*, 24, 337
- Starobinsky, A. A. 1973, *JETP*, 37, 28
- Sukanen, M. E. and Lovelace, R. V. E. 1990, *ApJ*, 350, 732
- Takahashi, M., Nitta, S., Tatematsu, Y., and Tomimatsu, A. 1990, *ApJ*, 363, 206
- Teukolsky, S. A., and Press, W. H. 1974, *ApJ*, 193, 443
- Thorne, K. S., and Macdonald, D. A. 1982, *MNRAS*, 198, 339

- Thorne, K. S., Price, R. H., and Macdonald, D.
A.1986, Black Holes: The Membrane Paradigm
(Yale Univ. Press)
Weber, E. J., and Davis, L. 1967, ApJ, 148, 217
Zel'dovich, Y. B. 1971, JETP Lett., 14, 180
Zel'dovich, Y. B. 1972, JETP., 35, 1085
Znajek, R. L. 1978, MNRAS, 185, 833