

# 라운딩 펀치에 의한 프레팅 상태에서의 균열 해석

김형규\* · 정연호\*\*

(1999년 7월 20일 접수)

## Crack Analysis under Fretting Condition by Rounded Punch

Hyung-Kyu Kim and Youn-Ho Jung

**Key Words :** Rounded Punch(라운딩 펀치), Stress Intensity Factor(응력확대계수), Partial Slip(부분미끄럼), Effective Period of Crack Growing(유효 균열성장 구간), Fretting Failure(프레팅 손상).

### Abstract

Surface edge crack subjected to contact stresses is analysed. A punch with corner radii is considered to press the semi-infinite plane. Partial slip problem is solved when a shear force is applied to the punch. Dislocation density function method is used to solve the present mixed mode crack problem. The crack length of positive  $K_I$  is examined, which is affected by the ratio of the flat portion to the total width of the punch. Surface traction during one cycle of the shear force is evaluated to simulate the fretting condition. The compliance change of the contact surface is also investigated during the shear cycle. It is found that the crack grows during only a part of the cycle, which may be termed as effective period of crack growing. A design method for restraining the fretting failure is discussed, from which recommendable geometry of the punch is suggested.

### 기호설명

$a$  : 균열길이  
 $b_x, b_y$  : Burgers vector(하첨자는 균열면을 따르는 직교좌표)  
 $d$  : 분할된 접촉구간 하나의 길이  
 $g(x)$  : 접촉면 접선방향 탄성변위  
 $h(x)$  : 접촉면 수직방향 탄성변위  
 $k_x^N, k_x^S, k_y^N, k_y^S$  : 적분방정식에서의 Kernel(하첨자는 균열면을 따르는 직교좌표, 상첨자는 균열열림(M) 및 전단(S)방향)  
 $l$  : 라운딩 펀치의 평탄부 길이  
 $p(x)$  : 접촉 수직응력  
 $p_m$  : 접촉면 평균응력  
 $q(x)$  : 접촉 전단응력  
 $w$  : 라운딩 펀치에 의한 접촉부 길이  
 $w(u)$  : 무계함수  
 $B(u), B_x(s'), B_y(s')$  : 전위밀도함수

$E^*$  : 복합 탄성계수  
 $E_1, E_2$  : 탄성계수(하첨자는 물체의 종류)  
 $G, G_1, G_2$  : 전단강성계수(하첨자는 물체의 종류)  
 $K_I, K_{II}$  : 응력확대계수  
 $L$  : 라운딩 펀치의 폭  
 $P$  : 접촉 수직하중  
 $Q$  : 접촉 전단하중  
 $R$  : 라운딩 펀치의 모서리 라운드 반지름  
 $S$  : 접촉구간 분할 수  
 $\beta$  : Dunders 상수  
 $\kappa_1, \kappa_2$  : Kolosov's constant(하첨자는 물체의 종류)  
 $\mu$  : 접촉면의 마찰 계수  
 $\nu$  : 프와송 비  
 $\theta$  : 균열 경사각  
 $\Psi(u), \Psi_x(u), \Psi_y(u)$  : Bounded function

### 1. 서론

접촉하는 두 물체에 미세한 진폭의 상대운동이 존재할 때 발생하는 프레팅 손상에는 접촉면에서 마멸이탈물이 생성, 방출되어 접촉면의 성능을 저

\* 회원, 한국원자력연구소,  
 E-mail: hkkim1@nanum.kaeri.re.kr  
 TEL : (042)868-2111 FAX : (042)863-0565  
 \*\* 한국원자력연구소

하시키는 프레팅마멸과 접촉면 경계 부근에서 균열이 성장하여 피로수명을 저하시키는 프레팅피로가 있다. 이와 같은 프레팅 손상을 해석하기 위해서는 접촉하중에 의해 발생하는 접촉면의 응력장을 구하여야 한다. 그 이유는 접촉물체의 손상을 분석하기 위해서는 물체 내부의 응력을 알아야 하고 이를 위해 현재까지 알려진 고체역학적 해석 방법은 접촉면 응력장으로부터 Flamant 포텐셜<sup>(1)</sup>이나 Muskhelishvili 포텐셜<sup>(2)</sup>을 이용하는 것이다. 이와 같이 포텐셜을 이용하는 방법은 수학적으로 잘 체계화 되어 있다<sup>(3,4)</sup>. 그런데 이러한 포텐셜은 접촉면 응력장을 적분하는 형태를 가지며 적분 내에 특이항을 가지는 경우(Muskhelishvili 포텐셜)도 있다. 따라서 접촉면 응력장의 함수 형태가 복잡하면 적분을 엄밀히 수행할 수 없는 경우가 발생한다. 엄밀한 적분이 가능한 예로서는 원통과 원통(또는 평판)의 접촉에서 마찰을 무시한 경우의 접촉면 수직응력장인 헤르쯔 응력(Hertzian pressure)이 있으며 여기에 전단하중이 작용할 경우의 부분미끄럼 문제는 Mindlin-Cattaneo 문제<sup>(5,6)</sup>로서 그 접촉면 전단응력장이 잘 구해져 있다. 위의 포텐셜을 이용하면 이때의 접촉면 응력장으로부터 물체 내부의 응력장을 엄밀해로 구할 수 있다.<sup>(7,8)</sup> 그러나 접촉물체의 접촉부위 형상이 복잡하여 접촉응력장이 잘 정의된 함수의 형태가 아니거나 전단하중의 방향이 Mindlin-Cattaneo 문제와 달리 일차원적이지 아닐 때에는 접촉면 응력장의 엄밀해를 구할 수 없고 수치해석 방법에 의존하여야 한다. 접촉면의 수직응력장을 알고 있을 때 전단하중의 방향 및 작용순서에 관계 없이 접촉면 전단응력장을 구할 수 있는 수치해석 방법은 앞서 개발되었다.<sup>(9)</sup> 접촉면 응력장으로부터 구해진 물체 내부의 응력은 항복 조건식(Von Mises 또는 Tresca Yield Criterion 등)을 이용하여 손상을 평가하거나 프레팅피로 해석에서와 같이 균열의 성장거동이나 균열의 전진력을 조사하기 위해 응력확대계수를 구하는데 이용된다. 한편 고체역학적 관점에서 프레팅마멸을 설명할 때 접촉면에서 이탈되는 마멸입자는, Fig. 1에서 보여 주는 것처럼, 접촉면 아래에서 균열이 전파됨에 의해 생성된다는 것으로 설명하기도 한다. 서남표<sup>(10)</sup>에 의해 제안되었던 이와 같은 마멸현상의 설명은 그 후 많은 파괴역학 연구자들이 표면하 균열에 대한 연구를 수행토록 하는 계기가 되었다. 이와 같이 마멸을 표면 균열 성장으로 설명하고자 한 연구로서, 이동하는 헤르쯔 응력에 의한 두 균열 간의 상호 간섭을 해석한 시도도 있었다.<sup>(11)</sup> 이 연구는 프레팅 보다는 구름접촉(rolling contact)에 의한 마멸을 해석하고자 한 것으로 볼 수 있으며 이때 균열 해석을 위해, 본 논문에서와 유사하게, 균열을 인선전위의 배열로 보는 방법을 사용하였다.

본 논문에서는 프레팅 손상을 분석하기 위하여

접촉 전단하중이 미세한 진폭으로 반복 작용할 때 접촉면에서 발생하는 표면 균열의 거동을 해석하고자 하였다. 접촉면 응력장은 이미 개발된 수치해석 방법<sup>(9)</sup>을 이용하여 구하였으며 이때 접촉면의 길이가 폭에 비하여 무한히 긴 평면변형을 문제로 해석하였다. 응력확대계수는 균열을 가상의 인선전위가 배열되어 있다고 가정하여 구하는 전위밀도함수법(dislocation density function method)을 이용하였다.

## 2. 내부응력의 계산

접촉하는 두 물체의 형상으로서 반무한 평판 위에 양단이 라운딩되어 있는 탄성편치가 수직 및 전단하중을 가하고 있는 경우를 생각한다. 이때 Fig. 2와 같이 편치의 폭을  $L$ 이라 하고 평탄부의 길이를  $l$ , 라운딩 반지름을  $R$ (Full  $R$ )이라 하고 수직하중에 의해 발생하는 접촉부의 폭을  $w$ 라 하자.

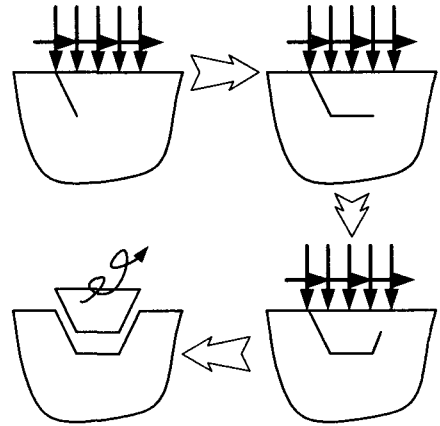


Fig. 1 Formation of wear particle by crack growth under contact loading

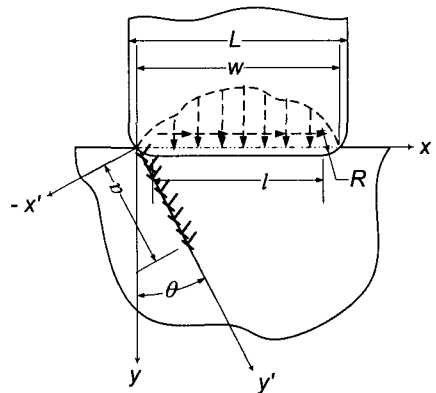


Fig. 2 Geometrical configuration of present problem

편치 양단의 라운딩은 실제 기계 가공 시의 일반적인 모따기로 생각할 수 있으며, 양단을 날카로운 직각으로 가공한다 하더라도 응력집중 현상에 의해 곧 마멸이 발생하는 것으로 예상할 수 있다. 나아가서 이 모델은 편치의 평탄부와 라운딩의 반지름을 변경함에 의해 헤르쯔 접촉( $R = L/2$ 인 경우)으로부터 양단이 거의 직각인 편치( $R \rightarrow 0$ 인 경우)까지 모사할 수 있는 유연성을 가질 수 있다.

한편 접촉하중에 의한 균열은 프레팅피로에서 일반적으로 관찰된 것과 같이 접촉면 경계에서 물체 내부로 경사지게 발생하는 표면 경사균열로 하였다(Fig. 2). 프레팅피로에서는 이와 같은 표면 경사균열의 성장속도가 매우 빨라 피로수명을 현저히 감소시키는 구간으로 알려져 있다.<sup>(12)</sup> 또 프레팅마멸을 균열의 성장에 의한 마멸이탈물의 생성이라 할 때에도 표면 경사균열의 해석이 필요하다.

전단하중의 크기에 따라 접촉면은 그 양상이 바뀐다. 즉 수직하중을  $P$  라 하고 전단하중을  $Q$ , 그리고 접촉면의 정지 마찰계수를  $\mu$ 라 할 때  $Q \geq \mu P$  가 되면 접촉면 전체가 미끄러지는 전미끄럼(gross slip) 상태가 되고  $Q < \mu P$  인 경우에는 접촉면의 일부만 미끄러지고 나머지는 고착이 되는 부분미끄럼(partial slip) 상태가 된다. 전미끄럼 상태 일 때에는 접촉면 전단응력이, Coulomb 의 마찰법칙을 따른다고 할 때,  $q(x) = \pm \mu p(x)$ 가 되므로 구하기 쉽다. 그러나 부분미끄럼일 경우, 고착영역 내에서는  $|q(x)| < \mu |p(x)|$ 이어야 하므로 이를 별도로 구하여야 한다. 기계 구조물에서 접촉부위는 일반적으로 안전한 체결부위가 되도록 설계된 경우이다. 따라서 미세한 진폭의 진동에 의한 전단하중은 그 크기가 작으므로 프레팅 손상의 해석은 대개 부분미끄럼 문제로부터 출발한다. 본 연구에서도 접촉면이 부분미끄럼 상태에 있는 범위의 전단하중에 대해 고려한다. 한편 프레팅 손상의 주된 원인이 접촉 전단하중이라는 것은 실험적으로도 잘 알려져 있다.<sup>(13)</sup>

접촉 수직응력장을 알고 있는 경우의 부분미끄럼 문제에서 전단하중의 경로에 무관하게 접촉면 전단응력장을 구하기 위해서는 수치해석 방법을 사용하는 것이 필요하다. 본 연구에서는 평면변형 상태를 표면 경사균열을 해석하기 위해 Fig. 1 및 2 에서 보여 주는 것처럼 접촉 전단하중이 한 방향(x 방향)으로만 작용하는 경우를 고려하고 있다. 그러나 앞선 연구에서<sup>(9)</sup> 고려하였던 두 방향의 전단하중이 작용하는 경우로의 확장(이 경우 모우드 III 를 포함하는 3 차원 균열문제가 된다) 3 장에서 소개하는 응력확대계수의 수치적 계산을 위해 기 개발된 수치해석 방법<sup>(9)</sup>을 이용하여 접촉면 응력장을 구하였으며 이로부터 물체의 내부 응력장은 다음과 같이 구하게 된다.

Fig. 3 과 같이 폭이  $w$  인 접촉면을  $S$  개의 구간

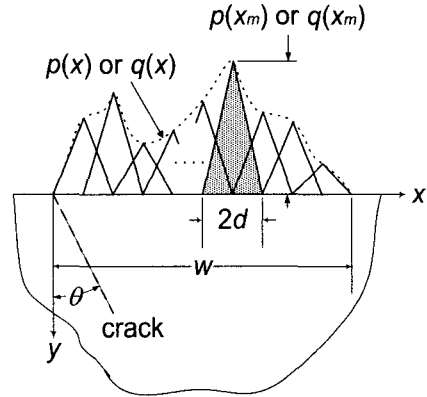


Fig. 3 Triangular normal and shear traction elements on the contact patch

으로 나누어 한 개 구간의 거리를  $d$  라 하고 수직 하중과 전단하중 각각에 대하여  $(S - 1)$  개의 이등변 삼각형 하중요소(또는 collocation point)를 갖게 할 경우, 물체 내부응력은 Flamant 포텐셜의 2 계 미분으로부터 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_{xx}^C = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{S-1} \{p(x_m)yI_2(m) + q(x_m)I_3(m)\} \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}^C = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{S-1} \{p(x_m)y^3I_0(m) + q(x_m)y^2I_1(m)\} \quad (2)$$

$$\tau_{xy}^C = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{S-1} \{p(x_m)y^2I_1(m) + q(x_m)yI_2(m)\} \quad (3)$$

여기서  $p(x_m)$ 와  $q(x_m)$ 은  $m$  번째 이등변 삼각형 하중요소의 꼭지점으로서 각각  $m$  번째 collocation point 에서의 접촉 수직 및 전단응력을 나타낸다. 즉,  $p(x_m)$ 은 양단이 라운딩 편치에 의한 수직응력<sup>(14)</sup>의 collocation point 에서의 값을 나타내며  $q(x_m)$ 은 부분미끄럼 상태의 경계조건과 수치해석 방법을 이용하여 구한 collocation point 에서의 전단응력 값이다. 한편,  $p(x_m)$ 와  $q(x_m)$ 을 구하는 방법의 상세는 기 발표된 문헌<sup>(9)</sup>을 참고할 수 있다. 그리고 상점자  $C$  는 접촉하중에 의한 응력 성분임을 나타내며 중괄호 내의  $I_0 \sim I_3$  는 다음과 같다.

$$I_0(m) = \frac{1}{2y^3} \{-2(x-md)\Theta_1 + ((x-md)-d)\Theta_2 + ((x-md)+d)\Theta_3\} \quad (4)$$

$$I_1(m) = \frac{1}{2y} \{2\Theta_1 - \Theta_2 - \Theta_3\} \quad (5)$$

$$I_2(m) = \frac{1}{2y} \{-2(x-md)\Theta_1 + ((x-md)-d)\Theta_2 + ((x-md)+d)\Theta_3 + 2yL_1 - yL_2 - yL_3\} \quad (6)$$

$$I_3(m) = \frac{1}{2} \{-6y\Theta_1 + 3y\Theta_2 + 3y\Theta_3 - 2(x-md)L_1 + ((x-md)-d)L_2 + ((x-md)+d)L_3\} \quad (7)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \tan^{-1}((x-md)/y), \Theta_2 = \tan^{-1}\{((x-md)-d)/y\}, \\ \Theta_3 &= \tan^{-1}\{((x-md)+d)/y\}, L_1 = \log((x-md)^2 + y^2), \\ L_2 &= \log\{(x-md-d)^2 + y^2\} \\ L_3 &= \log\{(x-md+d)^2 + y^2\}. \end{aligned}$$

### 3. 응력확대계수의 계산

본 연구에서는 응력확대계수를 구하기 위하여 전위밀도함수법을 사용하였다. 이것은 인선전위에 의한 변위 불연속 현상이 균열에 의한 그것과 동일하다는 점으로부터 출발한 것으로 프래팅 현상에서 발생하는 균열해석에 많이 사용되고 있다.<sup>(15,16)</sup> 이 방법을 간략히 서술하면 균열을 가상 인선전위의 배열로 보고 인선전위에 의한 Airy 응력함수<sup>(17)</sup>로부터 균열면 상의 응력을 구한 후 균열을 진전시키는 외력을 분류하고(예를 들어 접촉하중 또는 원거리 인장하중 등) 각각의 외력에 의한 균열면 상의 응력을 구분하여 구한다. 이때, 균열 진전을 위한 응력을 파괴 모우드별로(여기서는 평면 문제이므로 모우드 I 과 II 로) 분류한다. 다음, 구해진 균열면 상의 응력들을 중첩의 원리(Bueckner 원리)<sup>(18)</sup>에 따라 합하고 이 값이 각 파괴 모우드별로 균열면 상의 무응력(traction free) 조건을 만족하기 위하여 0 이 되도록 한다. 이로써 각 모우드별 방정식이 만들어 진다. 이때의 방정식은 인선전위에 의한 응력을 계산할 때 발생한 특이현상으로부터 특이적분 방정식의 형태가 된다. 구성된 특이적분 방정식의 해로부터 각 파괴 모우드의 응력확대계수를 구하게 된다.

인선전위가 Fig. 2 와 같이 반무한평판의 자유면에 수직인 방향에서  $\theta$ 만큼 경사진 균열면 상에 분포하고 있는 경우 균열면 상의 응력은 다음과 같은 적분식으로 나타낼 수 있다.<sup>(19)</sup>

$$\sigma_{x'x'}^D = \frac{G}{\pi(1+\kappa)} \left\{ \int_0^a B_{x'}(s')k_{x'}^N(y',s')ds' + \int_0^a B_{y'}(s')k_{y'}^N(y',s')ds' \right\}, \quad (8)$$

$$\tau_{x'y'}^D = \frac{G}{\pi(1+\kappa)} \left\{ \int_0^a B_{x'}(s')k_{x'}^T(y',s')ds' + \int_0^a B_{y'}(s')k_{y'}^T(y',s')ds' \right\} \quad (9)$$

여기서,  $a$  는 균열길이이며  $B_x(s')$ 과  $B_y(s')$ 은 인선전위에 의한 균열면이 열리는 방향( $x'$ ; 파괴 모우드 I)과 미끄러지는 방향( $y'$ ; 파괴 모우드 II)으로의 Burgers vector  $b_x, b_y$ 가 균열면에 균일하게 연속적으로 분포하고 있다고 생각할 때, 각각의 Burgers vector 에 대한 전위밀도함수들이며  $G$  는 균열이 있는 물체의 전단강성계수이다. 한편  $k_i^J(i = x' \text{ 또는 } y', J = N \text{ 또는 } T)$ 는 적분방정식에서의 Kernel 이다. 그리고 응력 성분에 상첨자  $D$  를 표시한 이유는 가상 전위로부터 구한 응력임을 나타낸다.

식 (8)은 균열면을 벌여지게 하는 모우드 I 의 응력성분이 되며 식 (9)는 균열면을 경계로 양쪽에서 서로 미끄러지게 하는 모우드 II 의 응력성분이 된다. 한편 식 (8) 및 (9)에서  $k_i^J$  는 다음과 같이 구한다.

$$k_{x'}^N = A_1 \sin^2 \theta + A_2 \cos^2 \theta - A_3 \sin 2\theta \quad (10)$$

$$k_{y'}^N = B_1 \sin^2 \theta + B_2 \cos^2 \theta - B_3 \sin 2\theta, \quad (11)$$

$$k_{x'}^T = (A_2 - A_1) \sin \theta \cos \theta + A_3 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (12)$$

$$k_{y'}^T = (B_2 - B_1) \sin \theta \cos \theta + B_3 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \quad (13)$$

여기서  $A_i$  및  $B_i(i=1,2,3)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_1 &= -G_1 \sin \theta + G_2 \cos \theta, & B_1 &= G_1 \cos \theta + G_2 \sin \theta \\ A_2 &= -G_3 \sin \theta + G_4 \cos \theta, & B_2 &= G_3 \cos \theta + G_4 \sin \theta \\ A_3 &= -G_5 \sin \theta + G_6 \cos \theta, & B_3 &= G_5 \cos \theta + G_6 \sin \theta \end{aligned}$$

한편 상기한  $A_i$  및  $B_i$  에 있는  $G_1 \sim G_6$  는 부록에 수록하였으며 식 (10)에서 (13)에 대입할 때 좌표 변환을 고려하여  $x = (y'-s') \sin \theta, y = y' \cos \theta, s = s' \cos \theta$  로 치환한다.

만일 접촉물체에 원거리 피로하중이 작용한다면 같은 방법으로 물체 내 균열위치에서의 응력을 구할 수 있고 이를 상첨자  $T$  를 사용하여 나타낸다면 균열면의 무응력 경계조건으로부터 다음과 같은 연립 특이 적분방정식을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{x'x'}^D + \sigma_{x'x'}^C + \sigma_{x'x'}^T = 0 \quad (14)$$

$$\tau_{x'y'}^D + \tau_{x'y'}^C + \tau_{x'y'}^T = 0. \quad (15)$$

식 (14)와 (15)에서 원거리 피로하중에 의한 항(상첨자  $T$ )은 피로하중의 양의 최대값을 좌표 변환하여 대입하면 되므로 균열면을 따라 일정하다. 본 연구에서는 접촉하중에 의한 균열의 성장거동에 일차적인 관심을 가지므로 피로하중에 의한 항을 고려하지 않았다( $\sigma_{x'x'}^T = \tau_{x'y'}^T = 0$ ). 한편, 식 (14)과 (15)로 주어진 특이 적분방정식에서 변수  $y'$ 과  $s'$ 을 적분구간(균열길이)에 대해 각각 정규화하는 변수,  $v$  와  $u$  로 치환하면 다음 식과 같은 형태가

된다.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{B(u)}{u-v} du + \int_{-1}^1 B(u)k(v,u)du = f(v), \quad (16)$$

(-1 ≤ v ≤ 1)

여기서 B(u)는 전위밀도함수가 변수 u 로 표현된 것이며 적분방정식의 해이다.

식 (16)과 같은 특이 적분방정식은 파괴역학 및 접촉역학 문제에서 많이 나타나는 형태이나 엄밀 해를 구할 수 없을 경우가 많다. 그러나 Jacobi 다항식과 주어진 문제의 B(u)가 갖고 있는 물리적인 현상을 표현하는 적절한 무게함수(weight function)를 사용하여 수치해석 방법<sup>(20)</sup>으로 구할 수 있다. 여기서는 Fig. 2 와 같이 균열이 반무한 평판의 자유면으로는 열려 있고 평판 내부에 균열선단이 존재하므로, B(u)를 다음과 같이 무게함수와 유한한(bounded) 함수의 곱으로 치환한다.

$$B(u) = \Psi(u)w(u) = \Psi(u)\sqrt{(1+u)/(1-u)}. \quad (17)$$

즉 균열선단에 해당하는 좌표 u = 1 에서 B(u)는 특이점을 갖고 자유면 쪽에서는(u = -1) 유한한 값(여기서 0)을 갖도록 하는 무게함수 w(u)를 사용하여 궁극적으로 B(u) 대신 유한한 함수 Ψ(u)를 구하고자 하는 방법이다. Jacobi 다항식을 사용하였을 때 식 (16)의 첫번째 적분항은 다음과 같이 치환할 수 있다.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Psi(u) \left( \frac{1+u}{1-u} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u-v_j} = \sum_{i=1}^n \frac{2(1+u_i)\Psi(u_i)}{2n+1} \frac{1}{u_i-v_j} \quad (18)$$

여기서,  $u_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n+1}\pi\right)$ ,  $v_j = \cos\left(\frac{2j}{2n+1}\pi\right)$   
 (i, j=1,2,⋯,n).

식 (18)에서 u<sub>i</sub> 는 균열면 상의 적분점(integration point)이다. 결국 식 (14)와 (15)는 각각 균열의 열림방향에 해당하는 n 개의 미지수 Ψ<sub>x</sub>(u) 및 미끄럼방향에 해당하는 n 개의 미지수 Ψ<sub>y</sub>(u)를 갖는 2n 개의 연립방정식이 되며 (2n x 2n)의 행렬식을 푸는 문제가 된다. Ψ<sub>x</sub>(u)와 Ψ<sub>y</sub>(u)가 얻어지면 응력 확대계수는 다음의 식에 의해 구할 수 있다.

$$K_I = \frac{2\sqrt{2G}}{(1+\kappa)} \sqrt{\pi a} \Psi_x(1), \quad (19)$$

$$K_{II} = \frac{2\sqrt{2G}}{(1+\kappa)} \sqrt{\pi a} \Psi_y(1). \quad (20)$$

여기서, Ψ<sub>x</sub>(1)과 Ψ<sub>y</sub>(1)은 균열 선단에서의 값으

로 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.<sup>(21)</sup>

$$\Psi_k(1) = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=1}^n \cot\left(\frac{2i-1}{2n+1}\pi\right) \times \sin\left(\frac{2i-1}{2n+1}n\pi\right) \Psi_k(u_i), \quad (k=x' \text{ 또는 } y'). \quad (21)$$

#### 4. 해석결과 및 토의

##### 4.1 단순 전단하중에 의한 응력확대계수 평가

접촉면의 경계에서부터 성장하는 균열의 진전력은 접촉하중에 의해 발생하는 물체 내부의 응력에 직접적인 영향을 받으며, 내부 응력은 접촉부의 길이에 의해 영향을 받는다. 한편 양단이 라운드된 펀치에 수직력이 가해질 때 접촉부위의 길이는 펀치의 기하학적 형상과 접촉물체의 탄성계수에 따라 달라진다. 즉 접촉 수직하중 P 가 가해질 때 라운드 반지름(R)과 펀치 평탄부의 길이(L), 그리고 접촉부의 길이(w) 사이에는 두 물체의 탄성계수(E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub>)와 함께 다음과 같은 관계가 있다.<sup>(14)</sup>

$$\frac{4PR}{l^2 E^*} = \frac{\pi - 2\phi_0}{4 \sin^2 \phi_0} - \frac{\cot \phi_0}{2} \quad (22)$$

여기서  $\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$ ,  $\phi_0 = \sin^{-1}\left(\frac{l}{w}\right)$ .

두 물체가 탄성적으로 동일한 경우, 식 (22)에 의해 계산된 결과를 Fig. 4 에 보여 준다. 즉 평탄부 길이가 증가함에 따라 동일한 수직하중에 의해 접촉부 길이는 급격히 증가하다 펀치 전체 폭의 반 정도를 넘을 때부터는 접촉부의 길이가 거의 증가하지 않음을 보여 준다. 펀치 평탄부의 길이가 증가함에 따라 접촉부의 길이 증가가 둔화되는

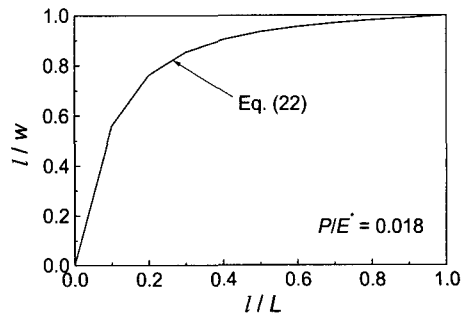


Fig. 4 Variation of contact width due to the change of flat portion of the rounded punch

것은 당연한 결과로서 평탄부 길이가 길면 반무한 평판으로부터의 수직방향 저항력이 커지기 때문이다. 프레팅피로 또는 프레팅마멸 시에 접촉 수직 하중은 일반적으로 고정 값을 가지며 전단하중이 피로와 같이 최대값과 최소값을 갖는 사이클을 이룬다. 그러므로 프레팅 손상문제에서는 수직하중이 일정한 상태에서 전단하중을 변화시켜 응력 확대계수를 계산하는 것이 타당하다. 따라서 본 연구에서는 응력확대계수를 계산하고 그 변화를 평가할 때에 동일한 수직하중을 고려하도록 한다.

프레팅마멸을 표면 균열의 성장에 의한 마멸이탈물의 생성이라고 한 이론<sup>(10)</sup>에 의하면 접촉면 아래 수 마이크론정도에 있는 이물질(예를 들어 inclusion 또는 precipitate 입자 등)에 의해 균열이 발생하며, 반복되는 접촉하중에 의해 균열이 성장한다고 하고 있다. 그리고 그들의 실험<sup>(22)</sup>에서 마멸 이탈물의 두께가 2 ~ 5 μm을 관찰함으로써 이론의 타당성을 주장하였다. 그러나 균열을 야기시키는 이물질이 항상 접촉면 아래 수 마이크론의 위치에 있다고 하는 것에는 무리가 있다. 한편, 초기균열을 가공하지 않은 상태의 프레팅피로 실험 결과로부터 균열은 접촉부의 경계 근방에서 시작된다.<sup>(12)</sup> 프레팅마멸의 경우에는 프레팅피로와 달리 원거리 피로하중이 없는 경우가 일반적이지만 이때에도 Fig. 1 과 같이 접촉면 경계에서 균열이 발생하여 성장함으로써 마멸 이탈물을 생성하는 경우를 고려하였다. 그러나 프레팅마멸의 경우에 있어서 균열길이는 마멸이탈물의 두께를 감안할 때 매우 짧은 것으로 예상하였다.

프레팅피로 또는 프레팅마멸에서의 균열 경사각 (Fig. 1에서  $\theta$ )은 일정하지 않다. 본 연구에서는 일반적으로 프레팅피로 실험에서 많이 관찰되는 0° ~ 50°를 경사각의 범위로 하여 해석하였다. Fig. 5(a) 및 (b)에는 균열의 경사각이 0°일 때 균열길이의 변화에 따른 응력확대계수를 나타낸 것으로 편치 평탄부 대 접촉부 길이의 비( $l/w$ )에 대한 영향을 볼 수 있도록 하였다. 이때  $l/w$ 의 값은 Fig. 4로부터 네 가지( $l/w = 0.005, 0.56, 0.85, 0.99$ ) 경우를 대표적으로 취하였다. 그리고 각각의 경우에 작용한 전단하중은 순서대로  $Q/\mu P = 0.305, 0.314, 0.323, 0.378$  이었다. 수치해석에서 전단하중 부과를 위하여 동일한 강제변위를 사용하였으나 전단하중이 약간 차이를 보이는 것은, 4.2절에 다시 설명되나, 라운딩 반지름의 크기에 따른 접촉면 컴플라이언스가 다르며<sup>(23)</sup> 또 수치해석을 위해 접촉부가 분할된 거리( $d$ )에 의해서도 영향을 받기 때문이다. 한편 본 논문에서 계산된 응력확대계수는 모두  $p_m\sqrt{\pi a}$ 로 나누어 정규화 하였으며 이때  $p_m$ 은 접촉부의 평균응력으로 다음과 같다.

$$p_m = \frac{P}{w} \quad (23)$$

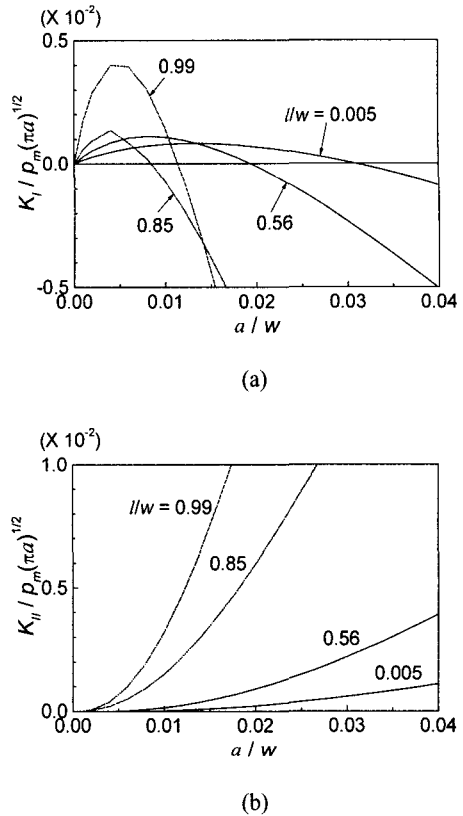


Fig. 5 Effect of  $l/w$  on stress intensity factors; (a)  $K_I$ , (b)  $K_{II}$  (at  $\theta = 0^\circ$ )

Fig. 5(a) 및 (b)에서 관찰된 것은 균열이 발생하여 접촉부 길이까지 변화시키며 계산한 응력확대계수 중  $K_I$ 은 초기의 짧은 균열길이 범위를 지나서부터 대부분 음의 값을 가지며 단순 감소하였으나  $K_{II}$ 는 모두 양의 값으로서 단순 증가 한다는 것이다. 또  $K_I$ 이 양인 범위 내에서는  $l/w$ 가 증가함에 따라  $K_I/p_m\sqrt{\pi a}$ 의 최대값이 더 크다는 것을 발견할 수 있었다. 그러나 평균응력과 균열길이를 감안한 경우 실제  $K_I$ 의 최대값이 큰 순서로 나타내면  $l/w = 0.005, 0.56, 0.99, 0.85$ 였다. 따라서 균열의 진전력에 편치의 평탄부 길이가 영향을 미치지 않는다고 생각된다.

균열이 성장하기 위해서는 균열면이 열려 있어야 하므로  $K_I$ 이 양인 구간이 균열성장에 유효하다. 따라서 계산 결과로부터 접촉하중에 의해 발생한 균열은 얼마 성장하지 못하고 균열단립 현상에 의해 멈추게 될 것으로 예상된다. 물론 계산된 결과는 원거리의 인장피로하중이 존재하지 않는 경우이므로 프레팅피로보다는 프레팅마멸 상태에서 성장하는 균열을 분석한 것이라 할 수 있다. 따라서 균열이 접촉하중 만에 의해 물체 내부로

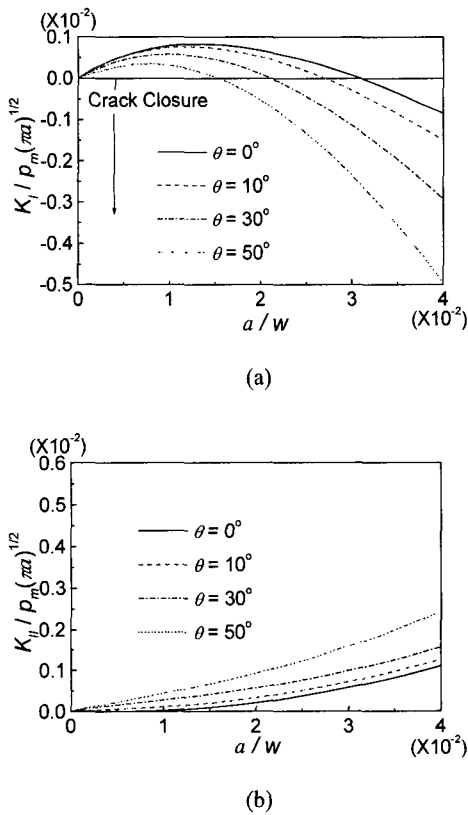


Fig. 6 Effect of crack obliquity ( $\theta$ ) on stress intensity factors; (a)  $K_I$ , (b)  $K_{II}$  (at  $l/w = 0.005$ )

계속 성장할 수 없다는 계산 결과는 타당하다고 생각한다.

한편 Fig. 5(a)에서  $K_I$  이 양의 값을 갖는 균열길이의 범위에 대해 균열경사각에 따른 응력확대계수의 변화를 조사하였으며 이의 결과를 Fig. 6(a) 및 (b)에 보여 준다. 이때 편치의 평탄부 길이 대 접촉부 길이의 비( $l/w$ )를, Fig 5(a) 및 (b)에서  $K_I$  이 양인 범위가 가장 넓은 경우인, 0.005 로 고정하여 조사하였다. 균일한 접촉 응력장일 경우 균열경사각이 지배적인 균열진전력에 영향을 미친다는 것은 앞선 연구<sup>(16)</sup>에서 발표된 적이 있다.

Fig. 6(a)로부터 균열 경사각이 작을수록 균열단힘이 일어나는 균열길이가 길며 각각의 열림 구간에 해당하는 균열길이의 거의 절반에서  $K_I$  이 최대로 됨을 알 수 있다. 한편 균열길이에 따라 단조증가하는  $K_{II}$  의 거동을 Fig. 6(b)를 통해 다시 볼 수 있으며, 균열길이가 길수록 또 균열 경사각이 작을수록 균열면 전단방향으로의 파괴 모우드( $K_{II}$ )가 지배적이 됨을 알 수 있다. 이것은 원거리 피로(인장)하중이 작용하고 접촉부에 균일 분포하중이 작용하는 경우의 결과<sup>(16)</sup>와 동일하였다. 따라서 지배적인 균열진전 모우드가 균열길이와 경사각에

의존한다는 것은 접촉하중의 형태에 관계 없는 일반적인 이론으로 받아들일 수 있다.

프레팅 마멸입자의 생성을 균열의 진전에 의한 것으로 설명할 때 본 연구에서 고려하고 있는 표면 경사균열이 방향을 바꾸는 경우를 생각 할 수 있다. 즉 균열단힘이 일어나기 전 표면에 평행하거나 그 보다 큰 각으로 방향을 바꾸어 마멸입자를 형성시키는 과정(Fig. 1)을 고려하는 것이다. 균열의 진전방향에 대한 이론으로서는 최소변위에너지밀도 이론, 최대응력 이론 등 여러 가지 이론이 주장되고 있다. 접촉하중이 존재하는 경우에 있어 균열의 방향전환에 대해서는 본 연구의 범위에 포함되지 않았으므로 이들 이론을 적용해 보지는 않았다. 오히려 이에 대해서는 향후에 실험적 연구를 통해 접촉하중이 존재하는 경우의 이론을 새로이 제시할 수 있도록 함이 더 의미 있을 것이다.

4.2 반복 전단하중에 의한 응력확대계수의 변화

프레팅피로나 프레팅마멸과 같은 프레팅 손상은 접촉 전단하중이 반복적인 피로사이클을 이룰 때 발생한다. 따라서 접촉 전단하중의 한 사이클 동안 응력확대계수의 변화를 관찰하는 것은 의미가 있다.

두 접촉물체에 전단하중이 작용하면 접촉면으로부터 멀리 떨어진 위치에서는 접촉물체 상호 간에 반대 방향으로 상대적인 강체변위가 발생하게 된다. 이때 접촉면에서는 마찰력에 의한 전단응력이 발생하며, 이로 인해 탄성변위가 발생한다. 부분미끄럼 문제에서는 이때의 탄성변위가 상대 강체변위와 같은 곳에서는 고착 영역이 형성되며, 작은 곳에서는 그 차이만큼 접촉면이 상대적으로 미끄러지는 미끄럼 영역이 된다. 전단 응력을 구하는 수치적 방법에서는 전단하중 대신 상대 강체변위를 입력하고 고착 및 미끄럼 영역에서의 접촉 전단응력을 계산한다. 한편 전단하중은 수치해석 결과로 얻은 전단 응력을 이용하여 구한다. 이러한 방법을 사용하는 이유는 하중 이력에 의존하는 전단 응력의 비가역성(irreversibility)을 변위의 증분을 이용하여 해석할 수 있기 때문이다. 이 방법은 앞선 연구<sup>(9)</sup>에 상세히 설명되어 있다.

전단하중이 반복적으로 작용할 때 접촉면의 미끄럼 영역 크기는 계속 변한다. 미끄럼 영역의 크기는 작용되는 전단하중과 직접 관련이 있다. 즉, 동일한 강체 변위에 대해서도 미끄럼 영역이 크면 전단하중은 작게 계산된다. 응력확대계수를 계산하기 위해서는, 접촉 전단응력을 구해야 하고 이로부터 전단하중의 크기를 알 수 있으므로, 수치 계산에서는 입력하는 상대 강체변위 사이클 동안 변하는 전단하중이 계산된다.

Fig. 7 에는 상대 강체변위 한 사이클과 그로부터 계산된 전단하중 사이클을 보여준다. 상대 강체변위 사이클 중 최대점과 최소점은 전단하중의

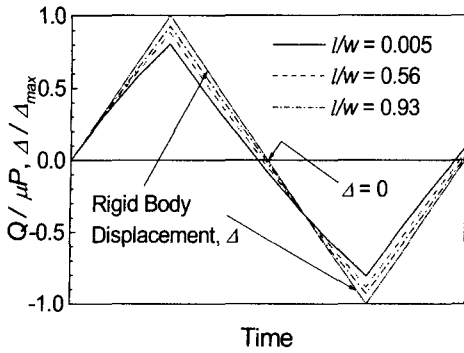
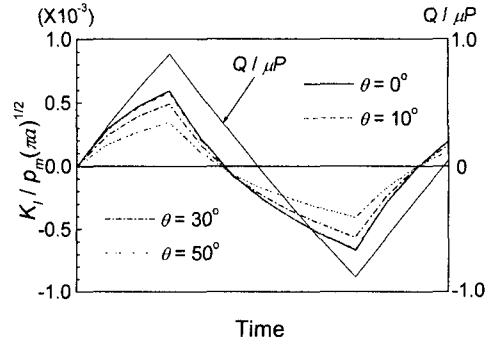


Fig. 7 Effect of  $l/w$  on contact compliance

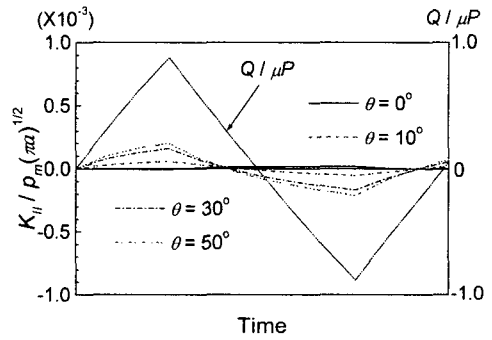
그것과 일치함을 알 수 있으나 상대 강체변위와 전단하중의 시작점을 제외하고는 상대 강체변위가 0 이 되는 지점과 전단하중이 완전 제하되는 지점 (0 이 되는 곳)이 일치하지 않는다. 즉, Fig. 7 에서 볼 수 있듯이 상대 강체변위 사이클에서 최대점을 지나 감소하기 시작하여 0 이 되기 전 전단하중은 미리 완전 제하에 도달하고 최소점을 지나 증가할 때에도 상대 강체변위에 앞서 다시 완전 제하에 도달하게 된다.

상대 강체변위 사이클과 전단하중 사이클이 완전히 일치하지 않음으로 인해 연속되는 상대 강체변위 사이클로부터 계산되는 접촉 전단응력이 사이클마다 달라진다면 응력확대계수를 구하는 데에 큰 어려움이 있게 된다. 그러나 한 사이클만 지나면 전단응력이 정상상태가 되므로<sup>(9)</sup> 그러한 문제는 발생하지 않는다. 한편 Fig. 7 에서 펀치의 평탄부 길이가 짧을수록 동일한 상대 강체변위에 대해 미끄럼 영역은 더 커진다.<sup>(23)</sup> 즉, 펀치의 라운딩 반지름이 클수록 접촉면의 컴플라이언스 증가가 더 크다는 것을 알 수 있다.

Fig. 7 에서 평탄부의 길이가 길수록 전단하중이 커지는 것은 상대 강체변위를 증가 시킴에 따라 전미끄럼 상태에 빨리 도달하게 된다는 것을 뜻한다. 또한 같은 폭을 갖는 펀치에서 평탄부 길이가 짧을수록 미끄럼 영역이 커서 접촉면의 컴플라이언스는 더 크게 증가하나 전미끄럼에 도달하는 속도는 느리다고 할 수 있다. 즉 평탄부 길이가 짧을수록 부분미끄럼 상태가 오래 지속된다. 이 결과는 라운딩 펀치에 의한 부분미끄럼 문제에서 접촉부 경계가 평탄부 내에 존재할 경우 성립하지 않는다는 수학적 결과<sup>(14)</sup>로부터도 설명할 수 있다. 즉 라운딩 반지름이 작을 경우(평탄부가 길 경우) 부분미끄럼 상태가 성립할 수 있는 가능성이 줄어들며 따라서 전단하중이 작용할 때 미끄럼 영역이 접촉부의 가장자리에 발생하다가(부분미끄럼 상태 이다가) 전단하중의 증가에 따라 순간적으로 전체 접촉영역으로 확산하게 되어 전미끄럼 상태가 되



(a)



(b)

Fig. 8 Effect of crack obliquity ( $\theta$ ) on the behaviour of stress intensity factors during a contact shear cycle; (a)  $K_I$ , (b)  $K_{II}$  (at  $a/w = 0.001$ ,  $l/w = 0.56$ )

는 것이다.

이제 접촉 전단하중 한 사이클 동안 균열경사각에 따른 응력확대계수의 거동을 조사하기 위해  $a/w = 0.001$  이고  $l/w = 0.56$  이며  $\theta = 0^\circ, 10^\circ, 30^\circ, 50^\circ$  로 하여 계산된 결과를 Fig. 8(a) 및 (b)에 나타내고 있다. Fig. 8(a)에서 알 수 있듯이 전단하중이 최대점을 지나 감소하기 시작하여 완전제하 되기 전 균열이 닫히게 되며( $K_I = 0$  일 때) 최소점을 지나 양의 값이 되기 전 이미 균열이 열리기 시작함을 알 수 있다. 즉, 유효 균열성장 구간이라 할 수 있는 균열열림 구간이 접촉 전단하중 사이클과는 다른 위상으로 나타나게 된다. 이것은 마치 균열전단의 잔류응력 영향으로 인장 피로하중 범위 내에서 유효 균열열림 구간이 존재한다고 한 Elber<sup>(24)</sup>의 이론과 유사한 현상으로 보여진다. 그러나 전단하중이 음의 범위에 있을 때에 균열이 열리기 시작하는 현상은 Elber의 이론과는 다른 것으로 여기서는 접촉하중에 의해 물체 내부에 유도되는 국부적인 응력장의 영향으로 기인하는 현상이다.

한편, Fig. 8(a)로부터 프래팅 상태 하의 표면 균



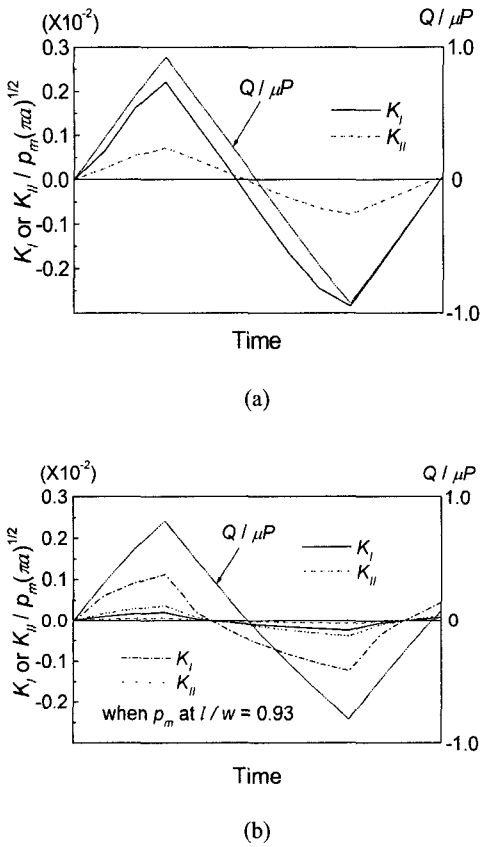


Fig. 9 Effect of  $l/w$  on the behaviour of stress intensity factors during a contact shear cycle; (a)  $l/w = 0.93$ , (b)  $l/w = 0.005$  (at  $a/w = 0.001$ ,  $\theta = 30^\circ$ )

열거동으로서 접촉 전단하중의 양의 범위보다 유효 균열성장 구간이 작으며 균열경사각이 클수록 균열이 빨리 닫힌다는 것을 알 수 있다. 그리고 Fig. 8(b)에 의해 균열의 경사각이 증가함에 따라 균열의 진전에  $K_{II}$ 의 영향이 커지게 됨을 다시 확인할 수 있다.

Fig. 7에서 알 수 있었던 것과 같이 펀치의 평탄부 길이가 다름에 따라 접촉 전단하중의 크기가 다르다. 따라서 접촉부 경계에 있는 균열의 성장 거동도 달라지게 될 것이다. 균열의 성장거동으로부터 프레팅피로 또는 프레팅마멸을 해석하고 또 이를 억제하기 위한 접촉설계 방법을 도출하기 위해 펀치의 기하학적 형상에 따른 균열의 거동을 조사하는 것이 필요하다. Fig. 9(a) 및 (b)에는 펀치 평탄부의 길이가 현저히 차이 나는 두 가지 경우 ( $l/w = 0.93$  및  $0.005$ )에 대하여 접촉 전단하중 한 사이클 동안 변하는 응력확대계수를 보여 준다.

Fig. 9에서 비교한 두 경우에서는 Fig. 7에서도 볼 수 있었던 것과 같이 펀치 평탄부의 길이가 긴 경우( $l/w = 0.93$ , Fig. 9(a))가 짧은 경우( $l/w = 0.005$ ,

Fig. 9(b))보다 동일한 상대 강체변위에 의해 실제 작용하는 전단하중이 더 컸다. 한편 평탄부 길이의 차이에 의해 접촉부 평균 수직응력( $p_m$ )이 달라지므로 Fig. 9(b)에는 (a)에서와 같은 평균 수직응력으로 환산하여 계산한 응력확대계수를 함께 표시하였다. Fig. 9(a)와 (b)의 비교로부터 평탄부 길이가 길 때 응력확대계수가 더 크며, 균열열림 구간도 더 길다는 것을 알 수 있다. 따라서 라운딩 펀치의 평탄부 길이가 긴 경우(라운딩 반지름이 작을 경우)에 균열의 성장은 더욱 용이하여 접촉물체의 손상을 더욱 가속화하게 될 것으로 생각된다.

이와 같이 본 연구의 해석결과로부터 접촉부 모서리의 라운딩 가공은 접촉물체의 건전성 유지를 위해서도 매우 중요하다는 것을 보여 줄 수 있으며, 펀치와 같은 접촉부를 설계할 때에는 미끄럼 영역 및 균열 진전력에 대해 본 연구에서 수행한 방법으로 사전에 평가해 보는 것이 바람직하다.

### 5. 결론

프레팅피로 또는 프레팅마멸과 같은 접촉에 의한 손상을 균열해석을 통해 고체역학적으로 분석하고자 하였다. 이를 위해 반무한 평판에 양단이 라운딩되어 있는 펀치가 접촉되어 있는 경우를 고려하였다. 프레팅 상태의 모사를 위해 펀치에 전단하중이 반복적으로 작용하는 경우, 접촉부 경계에서 성장하는 표면 경사균열의 응력확대계수 변화 과정을 조사할 수 있는 수치해석 방법을 확립하였다.

원거리 인장하중의 작용이 없이 접촉 수직 및 전단하중에 의해서는  $K_I$ 이 양인 균열길이가 매우 짧아 프레팅마멸 입자의 형성을 균열의 진전으로 설명할 수 있음을 보였다. 이때 균열의 경사각이 작을수록  $K_I$ 이 양인 균열길이가 더 길었다.

일정한 접촉 수직하중이 작용하는 상태에서 반복적인 접촉 전단하중이 작용하는 경우 접촉 전단하중의 사이클과 응력확대계수 사이클의 위상은 일치하지 않는다. 이때 균열이 열려있는 유효 균열성장 구간은 균열경사각이 작거나 펀치 평탄부 길이가 길 때에 길어진다. 펀치 평탄부 길이가 짧을수록 접촉면의 컴플라이언스가 더 크며, 펀치 평탄부 길이가 길수록 전단하중의 증가에 의해 부분미끄럼에서 전미끄럼 상태로 도달하는 속도가 빠르다. 따라서 프레팅 손상을 억제하기 위해서는 접촉부의 형상설계 시 평탄부의 길이를 가능한 짧게 하는 것이 바람직하다.

### 후 기

본 연구는 과학기술부의 원자력 연구개발 사업의 일환으로 수행되었음.

## 참고문헌

- (1) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1970, *Theory of Elasticity*, 3<sup>rd</sup> ed., McGraw- Hill.
- (2) Muskhelishvili, I. N., 1977, *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Leiden.
- (3) Hills, D. A., Nowell, D and Sackfield, A., 1993, *Mechanics of Elastic Contacts*, Butterworth-Heinemann Ltd.
- (4) Johnson, K.L., 1989, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press.
- (5) Mindlin, R. D., 1949, "Compliance of Elastic Bodies in Contact," *J. Appl. Mech.*, Vol. 16, pp. 259~268.
- (6) Cattaneo, C., 1938, "Sul Contatto di Due Corpi Elastici: Distribuzione Locale Degli Sforzi," *Rendiconti dell' Accademia nazionale dei Lincei*, Vol. 27, Ser. 6, p. 342.
- (7) Sackfield, A. and Hills, D. A., 1983, "A Note on the Hertzian Contact Problem: A Correlation of Standard Formulae," *J. Strain Analysis*, Vol. 18, No. 3, pp. 195~197.
- (8) Smith, J. O. and Liu, C. K., 1953, "Stresses due to Tangential and Normal Loads on an Elastic Solid with Application to Some Contact Problems," *J. Appl. Mech.*, Vol. 20, pp. 157~166.
- (9) 김형규, 1999, "중형방향 사이클 진단하중 작용 시 라운딩편치에 의한 접촉 응력" 대한기계학회 논문집 A 권, 제 23 권, 제 5 호, pp. 801~813.
- (10) Suh, N.P., 1977, "An Overview of the Delamination Theory of Wear," *Wear*, Vol. 44, pp. 1~16.
- (11) 김상우, 김석삼, 1994, "Hertz 접촉하중하에서의 복수 표면균열의 상호간섭," 대한기계학회 '94 춘계학술대회 논문집, pp. 170~173.
- (12) Kim, H. -K. and Lee, S. -B., 1996, "Crack Initiation and Growth Behaviour of Al 2024-T4 under Fretting Fatigue," *Int. J. Fatigue*, Vol. 19, No. 3, pp. 243~251.
- (13) Ko, P. L., 1985, "The Significance of Shear and Normal Force Components on Tube Wear due to Fretting and Periodic Impacting," *Wear*, Vol. 106, pp. 261~281.
- (14) Ciavarella, M., Hills, D. A. and Monno, G., 1998, "The Influence of Rounded Edges on Indentation by a Flat Punch," *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Part C, Vol. 212, pp. 319~328.
- (15) Nowell, D. and Hills, D. A., 1987, "Open Cracks At or Near Free Edges," *J. Strain Analysis*, Vol. 22, No. 3, pp. 177~185.
- (16) Kim, H. -K. and Lee, S. -B., 1996, "Stress Intensity Factors of an Edge Crack subjected to Normal and Shear Traction," *Theo. Appl. Fract. Mech.*, Vol. 25, No. 2, pp. 147~154.
- (17) Dunders, J. and Sendeckyj, G.P., 1965, "Behavior of an Edge Dislocation near a Bimetallic Interface," *J. Appl. Physics*, Vol. 36, pp. 3353~3354.
- (18) Bueckner, H. F., 1958, "The Propagation of Cracks and the Energy of Elastic Deformation," *J. Appl. Mech.*, Vol. 80, pp. 1225~1230.
- (19) Kim, H.-K., 1997, "Behavior of a Surface Oblique Edge Crack in Fretting Fatigue," Ph.D. Dissertation, KAIST, Taejon, Korea.
- (20) Erdogan, F. et al., 1973, Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, *Mechanics of Fracture I*, G.C. Sih ed., Chapter 7, Noordhoff International Publishing, Leiden.
- (21) Krenk, S., 1975, "On the Use of Interpolation Polynomial for Solutions of Singular Integral Equations," *Quarterly Applied Mathematics*, Vol. 32, pp. 479~484.
- (22) Suh, N.P., et al., 1974, "Further Investigation of the Delamination Theory of Wear," *J. Lubr. Tech.*, Vol. 96, pp. 631~637.
- (23) 김형규 외 3 인, 1998, "접촉면 마찰에너지 방출에 대한 편치 형상의 영향," 대한기계학회 충청지부 98 추계학술대회 논문집, pp. 169~174.
- (24) Elber, W., 1970, "Fatigue Crack Closure under Cyclic Tension," *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 2, pp. 37~45.

## 부록

$$G_1 = x \left\{ -2/r_1^2 - 4(y-s)^2/r_1^4 + 2/r_2^2 + 4(y^2 + s^2)/r_2^4 + 32sy(y+s)^2/r_2^6 \right\}$$

$$G_2 = \left\{ -2(y-s)/r_1^2 + 4(y-s)^3/r_1^4 + 2(y-s)/r_2^2 - 4(y+s)(y^2 + 5sy - s^2)/r_2^4 + 32sy(y+s)^3/r_2^6 \right\}$$

$$G_3 = x \left\{ -2/r_1^2 + 4(y-s)^2/r_1^4 + 2/r_2^2 - 4(y^2 - 4sy - 3s^2)/r_2^4 - 32sy(y+s)^2/r_2^6 \right\}$$

$$G_4 = \left\{ 6(y-s)/r_1^2 - 4(y-s)^3/r_1^4 - 2(3y+5s)/r_2^2 + 4(y+s)(y^2 + 34sy + 9s^2)/r_2^4 - 32sy(y+s)^3/r_2^6 \right\}$$

$$G_5 = \left\{ -2(y-s)/r_1^2 + 4(y-s)^3/r_1^4 + 2(y-s)/r_2^2 - 4(y+s)(y^2 - 6sy + s^2)/r_2^4 - 32sy(y+s)^3/r_2^6 \right\}$$

$$G_6 = x \left\{ -2/r_1^2 + 4(y-s)^2/r_1^4 + 2/r_2^2 - 4(y^2 + 4sy + s^2)/r_2^4 + 32sy(y+s)^2/r_2^6 \right\}$$

$$\text{여기서 } r_1^2 = x^2 + (y-s)^2, \quad r_2^2 = x^2 + (y+s)^2.$$