

유한 요소법을 사용한 회전 외팔보의 굽힘 진동 해석

박정훈* · 유흥희**
(1999년 10월 15일 접수)

Bending Vibration Analysis of a Rotating Cantilever Beam Employing Finite Element Method

Jung Hun Park and Hong Hee Yoo

Key Words: Bending Vibration(굽힘 진동), Rotating Cantilever Beams(회전 외팔보), Finite Element Method(유한 요소법), Geometric Stiffening Effect(기하학적 강성효과)

Abstract

A modelling method for the bending vibration analysis of rotating cantilever beams employing finite element method is presented in this paper. Different from the conventional modelling method in which only Cartesian deformation variables are used, a non-Cartesian deformation variable is introduced and approximated to derive the equations of motion. Numerical results obtained by using the presented modelling method are compared to those obtained by using other methods in the related literature, and the accuracy of the presented method is verified through the comparison study. The presented modelling method is superior to other previous methods in a sense that several advantages of the previous methods are incorporated into the presented method.

1. 서론

회전운동을 하는 외팔보 형태를 가진 구조물은 발전용 터빈의 블레이드나 항공기 회전익 등에서 발견할 수 있다. 이러한 구조물들을 설계하거나 혹은 성능을 평가하고 개선시킴에 있어서 동적 특성의 정확한 예측은 매우 중요한 요소이다. 외팔보 구조물의 회전운동은 원심방향 관성력을 발생시켜 진동특성의 변화를 일으킨다. 따라서 이러한 변화를 예측하기 위한 연구가 과거부터 많이 이루어져 왔다.

회전 외팔보의 굽힘 진동 해석방법은 Southwell과 Gough가⁽¹⁾ 1920년에 문헌에 발표한 것이 최초인 것으로 알려져 있다. 이 방법은 Rayleigh

Energy 평형이론에 근거하여 보의 회전에 따른 고유진동수의 변화만을 예측하는 방법으로 식의 간명성 때문에 현재까지도 널리 사용되고 있다. 그 후 Schilhansl은⁽²⁾ 회전 외팔보의 굽힘 진동 방정식을 유도하고 이에 Ritz방법을 적용하여 Southwell 등이 제시한 고유진동수 예측을 위한 방정식의 계수들을 더 정확하게 구하는 방법을 제시하였다. 1970년대 이후 전산기의 눈부신 발전은 수치적인 방법으로 문제를 해결하려는 연구 결과들을 초래하였다. Putter와 Manor는⁽³⁾ 굽힘 진동방정식에 모드함수를 이용한 근사화 방법을 적용하여 고유치 문제를 유도하고 이를 수치적으로 해석하여 종래보다 더욱 정확한 결과를 얻었다. 이러한 수치해석 방법은 더욱 복잡한 형태의 보의 해석을 가능하게 하였으며 Hoa는⁽⁴⁾ 끝단질량을 가진 회전 외팔보의 해석을 하였고, 최근 Kuo 등은⁽⁵⁾ 고정단의 탄성변형효과와 단면 변화까지 고려한 해석결과를, Yokoyama는⁽⁶⁾ Timoshenko보에 대한 해석결과를 각각 발표하였다. 이러한 연구는 해석적 모드함수를 이용한 근사화 방법뿐

* 회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

** 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : hhyoo@email.hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0446 FAX : (02)2293-5070

아니라 유한 요소법을 이용한 결과들도 발표되고 있는데 예를들어 참고문헌 (4)는 유한 요소법을 근사화 방법으로 사용하고 있으며 이 방법을 사용하면 구조물의 일반적인 형상을 다룰 수 있다는 장점을 갖게 된다.

기존의 연구에서 진동해석을 위해 방정식을 구하는 방법은 일정 각속도 운동시 발생하는 원심 관성력에 의한 인장변위를 굽힘방향 운동방정식에 대입하여 선형 방정식을 구하는 과정으로 요약될 수 있다. 이 방법은 그 유도과정의 일관성이 명확하지 않으며 매우 복잡하여 대부분의 문헌에서 자세히 기술되지 않는다. Simo는⁽⁷⁾ 이 과정을 비교적 자세히 보여 주었다. 이러한 기존 방법에 비해 최근 Yoo 등은⁽⁸⁾ 직교 탄성변위 대신에 복합 변형변수를 사용하여 진동 해석을 위한 방정식을 일관성있고 간명하게 유도하였다.

본 논문에서는 참고문헌 (8)에 제시된 모델링 방법에 기초하고 유한요소법을 사용하여 해석하는 방법을 제시하고자 한다. 이는 참고문헌 (8)의 모델링 방법의 장점과 임의의 보 형상을 고려할 수 있는 유한요소법의 장점을 결합하려 하는 목적을 지닌다. 이를 위해 본 논문에서는 우선 유한요소 모델들을 위한 진동 방정식을 유도하는 과정이 제시되었다. 유도된 진동방정식에서 질량행렬과 탄성에너지에 의한 강성행렬은 회전운동이 없는 외팔보를 대상으로 구한 선형 유한 요소법에 의한 값들과 동일하다. 유도된 진동방정식에는 외팔보의 회전에 의한 강성효과를 나타낼 수 있는 항이 추가되는 형태를 지님을 보였으며 하나의 유한요소에 대한 회전운동과 관련된 강성화 효과를 대표하는 요소행렬을 제시하였다. 본 해석방법에 의한 회전외팔보의 해석 결과는 기존 참고문헌들과의 비교를 통해 그 수치적 정확성을 검증하였다.

2. 본 론

2.1 운동방정식 유도

본 연구에서는 다음의 가정들을 사용하였다. 첫째, 보의 재질은 균질하고 등방성이다. 둘째, 전단효과와 단면관성효과는 고려치 않는다. 즉 오일러 보이론을 사용한다. 셋째, 단면상의 탄성축과 도심은 서로 일치한다. 즉 단면의 편심에 의한 효과는 고려하지 않는다.

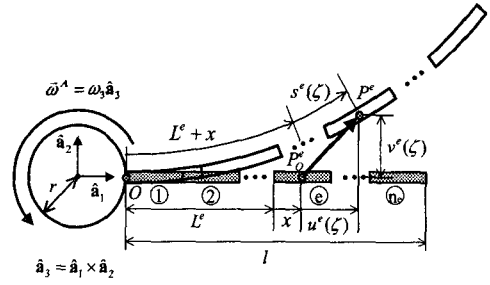


Fig. 1 Configuration of cantilever beam deformation

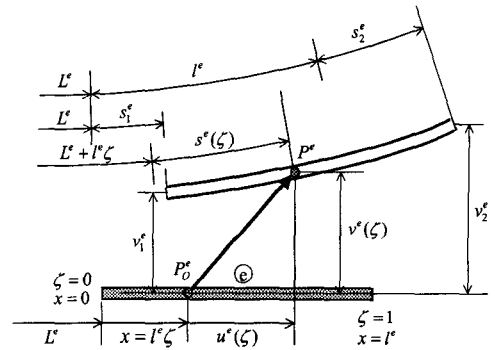


Fig. 2 Magnified drawing of an element.

Fig. 1은 회전 외팔보의 기준좌표계와 변형전 보요소 e 상의 임의의 점 P_0^e 의 탄성변위를 나타내고 Fig. 2는 요소 e 의 탄성변위를 확대하여 자세히 나타내고 있다. 그림에서 \hat{a}_k ($k=1,2,3$)는 회전축에 고정된 직교 단위벡터를 의미하고 회전축은 \hat{a}_3 를 중심으로 일정 각속도 ω_3 로 회전하고 있다. 원문자 k 는 요소 k 를 의미하고 n_e 는 회전 외팔보를 구성하는 요소들의 개수를 의미한다. 그림에서 L^e , l^e 그리고 l 은 각각 보의 고정단상의 점 O 로부터 요소 e 의 좌측노드까지의 거리, 요소 e 의 길이 그리고 보의 변형전 전체길이를 의미한다. 점 P_0^e 는 변형전 보의 요소 e 상의 임의의 점을 의미하고 변형후 점 P_0^e 는 P^e 로 이동한다. Fig. 1과 Fig. 2에서 ζ 는 무차원 수로 다음과 같이 정의 된다.

$$\zeta \equiv \frac{x}{l^e} \quad (1)$$

여기서 x 는 좌측노드로부터 변형전 보요소 e 상의 임의의 점 P_0^e 까지의 거리를 의미한다. s_1^e 와 v_1^e 그리고 s_2^e 와 v_2^e 는 각각 $\zeta=0$ ($x=0$)과 $\zeta=1$ ($x=l^e$)인 점에서의 길이방향 인장변위와 굽힘변위를 나타낸다. $s^e(\zeta)$, $v^e(\zeta)$, $u^e(\zeta)$ 는 점 P_0^e 의 인장변위, \hat{a}_2 및 \hat{a}_1 방향 직교 변위를 의미한다. 본 연구에서는 $u^e(\zeta)$ 대신 길이방향 인장변위 $s^e(\zeta)$ 와 굽힘변위 $v^e(\zeta)$ 를 다음과 같이 근사화한다.

$$s^e(\zeta) = N_s^e(\zeta) s^e \quad (2)$$

$$v^e(\zeta) = N_v^e(\zeta) v^e \quad (3)$$

위 식에서 $N_s^e(\zeta)$ 와 $N_v^e(\zeta)$ 는 인장변위와 굽힘 변위를 표현하기 위해 사용된 형상함수 행렬을 (참고문헌 (9) 참조) 의미하고 $N_s^e(\zeta)$, $N_v^e(\zeta)$, s^e 그리고 v^e 는 다음과 같이 정의된다.

$$N_s^e(\zeta) \equiv [1 - \zeta \quad \zeta] \quad (4)$$

$$N_v^e(\zeta) \equiv \begin{Bmatrix} 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \\ l^e(\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3) \\ 3\zeta^2 - 2\zeta^3 \\ l^e(-\zeta^2 + \zeta^3) \end{Bmatrix}^T \quad (5)$$

$$s^e \equiv [s_1^e \quad s_2^e]^T \quad (6)$$

$$v^e \equiv [v_1^e \quad \theta_1^e \quad v_2^e \quad \theta_2^e]^T \quad (7)$$

식 (7)에서 θ_1^e 와 θ_2^e 는 각각 $\zeta=0$ 와 $\zeta=1$ 에서의 굽힘 각을 나타낸다. 그리고 식 (2)와 (3)에서 정의된 s^e 와 v^e 를 일반좌표로 사용하였다. 본 논문에서는 요소 e 의 절점에서의 \hat{a}_1 방향의 직교 변위 u^e 대신 길이방향 인장변위 s^e 를 근사화하므로 u^e 와 시간 미분값들을 s^e 와 v^e 그리고 그 시간 미분값들로 표시되어야 하므로 u^e 와

s^e 및 v^e 사이의 관계식이 필요하며 그 직교 인장변위 $u^e(\zeta)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$u^e(\zeta) \cong N_s^e(\zeta) s^e - \sum_{i=1}^{\zeta-1} \frac{1}{2l^i} v^{iT} B^i v^i - \frac{1}{2l^e} v^{eT} D^e(\zeta) v^e \quad (8)$$

여기서,

$$B^i \equiv \int_0^1 N_v^{iT}(\zeta) N_v^i(\zeta) d\zeta \quad (9)$$

$$D^e(\zeta) \equiv \int_0^\zeta N_v^{eT}(\zeta) N_v^e(\zeta) d\zeta \quad (10)$$

$$N_v^{iT}(\zeta) \equiv \frac{dN_v^i(\zeta)}{d\zeta} \quad (11)$$

$$N_v^e(\zeta) \equiv \frac{dN_v^e(\zeta)}{d\zeta} \quad (12)$$

운동방정식 유도과정에 필요한 \dot{u}^e 와 \ddot{u}^e 는 식 (8)을 시간에 대해 미분함으로써 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\dot{u}^e(\zeta) = N_s^e(\zeta) \dot{s}^e - \sum_{i=1}^{\zeta-1} \frac{1}{l^i} v^{iT} B^i \dot{v}^i - \frac{1}{l^e} v^{eT} D^e(\zeta) \dot{v}^e \quad (13)$$

$$\ddot{u}^e(\zeta) = N_s^e(\zeta) \ddot{s}^e - \sum_{i=0}^{\zeta-1} \frac{1}{l^i} (\dot{v}^{iT} B^i \dot{v}^i + v^{iT} B^i \ddot{v}^i) - \frac{1}{l^e} (\dot{v}^{eT} D^e(\zeta) \dot{v}^e + v^{eT} D^e(\zeta) \ddot{v}^e) \quad (14)$$

보의 회전평면이 \hat{a}_3 에 수직하다면 회전축 각 속도 $\vec{\omega}^A$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{\omega}^A = \omega_3 \hat{a}_3 \quad (15)$$

탄성 변형후 요소 e 상의 임의의 점 P^e 의 위치 벡터를 $\vec{p}^{P^e}(\zeta)$ 로 표시하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\vec{p}^{P^e}(\zeta) = (r + L^e + x + u^e(\zeta)) \hat{a}_1 + v^e(\zeta) \hat{a}_2 \quad (16)$$

요소 e 상의 임의의 점 P^e 의 속도를 구하기 위해 위 식을 시간에 대해 미분하면 속도 $\vec{v}^{P^e}(\zeta)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\vec{v}^{P^e}(\zeta) = (\dot{u}^e(\zeta) - \omega_3 v^e(\zeta)) \hat{a}_1 + [\dot{v}^e(\zeta) + \omega_3(r + L^e + x + u^e(\zeta))] \hat{a}_2 \quad (17)$$

위의 식을 회전축에 고정된 좌표계에 대해 표현된 행렬 v^{P^e} 로 표현하면 다음과 같다.

$$v^{P^e}(\zeta) = \begin{bmatrix} \dot{u}^e(\zeta) - \omega_3 v^e(\zeta) \\ \dot{v}^e(\zeta) + \omega_3(r + L^e + x + u^e(\zeta)) \end{bmatrix} \quad (18)$$

운동방정식의 유도에 필요한 일반속력을 두 벡터 \dot{s}^e 와 \dot{v}^e 의 성분들로 정의하면 v^{P^e} 의 편속도는 (참고문헌 (10) 참조) 다음과 같이 계산된다.

$$V_{s^e}^e \equiv \frac{\partial v^{P^e}}{\partial \dot{s}^e} = \begin{bmatrix} N_s^e(\zeta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$V_{v^e}^e \equiv \frac{\partial v^{P^e}(\zeta)}{\partial \dot{v}^e} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l^e} v^{eT} D^e(\zeta) \\ N_v^e(\zeta) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$V_{v^i}^e \equiv \frac{\partial v^{P^e}(\zeta)}{\partial \dot{v}^i} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l^i} v^{iT} B^i \\ 0 \end{bmatrix}, (i=1, \dots, e-1) \quad (21)$$

요소 e 상의 임의의 점 P^e 의 가속도 \vec{a}^{P^e} 는 식 (17)을 미분하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\vec{a}^{P^e}(\zeta) = [\ddot{u}^e(\zeta) - 2\omega_3 \dot{v}^e(\zeta) - \omega_3^2(r + L^e + x + u^e(\zeta))] \hat{a}_1 + [\ddot{v}^e(\zeta) + 2\omega_3 \dot{u}^e(\zeta) - \omega_3^2 v^e(\zeta)] \hat{a}_2 \quad (22)$$

위의 식을 회전축에 고정된 좌표계에 대해 표현된 행렬 a^{P^e} 로 표현하면 다음과 같다.

$$a^{P^e}(\zeta) = \begin{bmatrix} \{\ddot{u}^e(\zeta) - 2\omega_3 \dot{v}^e(\zeta) - \omega_3^2(r + L^e + x + u^e(\zeta))\} \\ \ddot{v}^e(\zeta) + 2\omega_3 \dot{u}^e(\zeta) - \omega_3^2 v^e(\zeta) \end{bmatrix} \quad (23)$$

요소 e 의 탄성에너지 U^e 는 다음과 같다.

$$U^e = \frac{1}{2} \int_0^{l^e} E^e A^e \left(\frac{\partial s^e(\zeta)}{\partial \sigma} \right)^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^{l^e} E^e I_z^e \left(\frac{\partial^2 v^e(\zeta)}{\partial \sigma^2} \right)^2 d\sigma = \frac{1}{2} s^{eT} K_{s^e}^E s^e + \frac{1}{2} v^{eT} K_{v^e}^E v^e \quad (24)$$

위 식에서 A^e , I_z^e 그리고 E^e 는 각각 요소 e 의 단면적, 2차 면적 관성모멘트 그리고 영계수 (Young's modulus)를 의미하고 탄성에너지에 의한 강성행렬 $K_{s^e}^E$ 와 $K_{v^e}^E$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$K_{s^e}^E \equiv \frac{1}{l^e} \int_0^{l^e} E^e A^e N_s^{e'T}(\zeta) N_s^e(\zeta) d\zeta \quad (25)$$

$$K_{v^e}^E \equiv \frac{1}{(l^e)^3} \int_0^{l^e} E^e I_z^e N_v^{e'T}(\zeta) N_v^e(\zeta) d\zeta \quad (26)$$

여기서

$$N_s^{e'}(\zeta) \equiv \frac{dN_s^e(\zeta)}{d\zeta} \quad (27)$$

$$N_v^{e''}(\zeta) \equiv \frac{d^2 N_v^e(\zeta)}{d\zeta^2} \quad (28)$$

위 두 식에 정의된 강성행렬 $K_{s^e}^E$ 와 $K_{v^e}^E$ 는 선형유한 요소법에 사용되는 인장과 굽힘 강성행렬과 동일하다. 케인의 방법에 (참고문헌 (10) 참조) 의한 보의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$F_{s^k}^* + F_{s^k} = 0, (k=1, 2, \dots, n_e) \quad (29)$$

$$F_{v^k}^* + F_{v^k} = 0, (k=1, 2, \dots, n_e) \quad (30)$$

식 (29)와 식 (30)에서 $F_{s^k}^*$ 와 $F_{v^k}^*$ 는 일반속력 \dot{s}^k 와 \dot{v}^k 에 대한 일반관성력(generalized inertia forces)을 나타내며 다음과 같다.

$$F_{s^k}^* = -l^k \int_0^1 \rho^k \{ V_{s^k}^{kT}(\zeta) a^{P^k}(\zeta) \} d\zeta \quad (31)$$

$$F_{v^k}^* = -l^k \int_0^1 \rho^k \{ V_{v^k}^{kT}(\zeta) a^{P^k}(\zeta) \} d\zeta - \sum_{i=k+1}^{n_s} l^i \int_0^1 \rho^i \{ V_{v^k}^{iT}(\zeta) a^{P^i}(\zeta) \} d\zeta \quad (32)$$

식 (29)와 식 (30)에서 F_{s^k} 와 F_{v^k} 는 각각 일반속력 \dot{s}^k 와 \dot{v}^k 에 대한 일반작용력을 나타낸다. 회전하는 보에 외력이 작용하지 않을 경우 일반작용력은 탄성에너지에 의한 것만 존재하고 식 (25)에서 구한 탄성에너지에 의한 일반작용력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_{s^k} = - \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\partial U^i}{\partial s^k} = - \frac{\partial U^k}{\partial s^k} = -K_{s^k}^E s^k \quad (33)$$

$$F_{v^k} = - \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\partial U^i}{\partial v^k} = - \frac{\partial U^k}{\partial v^k} = -K_{v^k}^E v^k \quad (34)$$

일반속력 \dot{s}^k 와 \dot{v}^k 에 대한 외팔보의 운동방정식은 식 (31) ~ (34)를 식 (29)와 (30)에 대입하고 선형화하면 다음과 같이 표현된다.

$$M^k \ddot{q}^k + C^k \dot{q}^k + K^k q^k + Q^k = 0 \quad (35)$$

여기서

$$M^k \equiv \begin{bmatrix} M_{ss}^k & 0 \\ 0 & M_{vv}^k \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$C^k \equiv 2\omega_3 \begin{bmatrix} 0 & C_{sv}^k \\ C_{vs}^k & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$K^k \equiv \begin{bmatrix} K_{ss}^k & 0 \\ 0 & K_{vv}^k \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$M_{ss}^k \equiv l^k \int_0^1 \rho^k N_s^{kT}(\zeta) N_s^k(\zeta) d\zeta \quad (39)$$

$$M_{vv}^k \equiv l^k \int_0^1 \rho^k N_v^{kT}(\zeta) N_v^k(\zeta) d\zeta \quad (40)$$

$$C_{sv}^k \equiv -l^k \int_0^1 \rho^k N_s^{kT}(\zeta) N_v^k(\zeta) d\zeta \quad (41)$$

$$C_{vs}^k \equiv l^k \int_0^1 \rho^k N_v^{kT}(\zeta) N_s^k(\zeta) d\zeta \quad (42)$$

$$K_{ss}^k \equiv K_{s^k}^E - \omega_3^2 l^k \left(\int_0^1 \rho^k N_s^{kT}(\zeta) N_s^k(\zeta) d\zeta \right) \quad (43)$$

$$K_{vv}^k \equiv K_{v^k}^E + \omega_3^2 \int_0^1 \rho^k D^{kT}(\zeta) d\zeta + \omega_3^2 l^k \int_0^1 \rho^k \zeta D^{kT}(\zeta) d\zeta \quad (44)$$

$$+ \omega_3^2 \sum_{i=k+1}^{n_s} \frac{l^i}{l^k} \rho^i \left(r + L^i + \frac{l^i}{2} \right) B^{kT} - \omega_3^2 l^k \int_0^1 \rho^k N_v^{kT}(\zeta) N_v^k(\zeta) d\zeta$$

$$Q^k \equiv \begin{bmatrix} \left\{ -\omega_3^2 (r + L^k) l^k \left(\int_0^1 \rho^k N_s^{kT}(\zeta) d\zeta \right) \right\} \\ -\omega_3^2 l^k \left(\int_0^1 \rho^k \zeta N_s^{kT}(\zeta) d\zeta \right) \\ 0 \\ q^k \equiv [s^{kT} \quad v^{kT}]^T \end{bmatrix} \quad (45)$$

식 (35)에서 M^k 는 질량행렬을 의미하고 선형유한 요소법에 사용되는 질량행렬과 동일하고 C^k 는 감쇠행렬을 의미한다. K^k 는 강성행렬을 의미하고 강성행렬을 구성하는 식 (43)과 (44)로 표현된 K_{ss}^k 와 K_{vv}^k 에서 탄성에너지에 의한 강성행렬을 제외한 나머지 밀출된 항들은 보의 회전에 의한 기하학적 강성항을 나타낸다. 각각의 보요소에서 정의된 모든 일반속력에 대한 운동방정식을 조합하면 다음과 같은 운동방정식을 구할 수 있다.

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq + Q = 0 \quad (47)$$

여기서

$$M \equiv \begin{bmatrix} M_{ss} & 0 \\ 0 & M_{vv} \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$C \equiv 2\omega_3 \begin{bmatrix} 0 & C_{sv} \\ C_{vs} & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$K \equiv \begin{bmatrix} K_{ss} & 0 \\ 0 & K_{vv} \end{bmatrix} \quad (50)$$

식 (47)에서 자유진동해석을 위해서는 비제차항을 제거하고 해석을 수행하면된다. 또한 만일 인장 방향과 굽힘방향 고유진동수간의 간섭효과가 무시할만 하다면 인장방향 운동방정식과 연성되는 항을 제거하면 다음과 같은 굽힘 진동방정

식을 얻을 수 있다.

$$M_{vv} \ddot{v} + K_{vv} v = 0 \quad (51)$$

3. 수치해석

본 논문에서는 선형 유한 요소법에 사용되는 형상함수 행렬을 사용하여 해석을 수행하였다. 이후 해석결과는 참고문헌들과의 해석결과와의 비교를 위해 다음과 같은 무차원 회전 각속도와 회전 반경비를 정의한다.

$$\bar{\omega} \equiv T\omega_3 \quad (52)$$

$$\delta \equiv \frac{r}{l} \quad (53)$$

여기서

$$T \equiv \left(\frac{\rho l^4}{EI_z} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (54)$$

$$\rho = \rho^1 = \rho^2 = \dots = \rho^{n_e} \quad (55)$$

$$I_z = I_z^1 = I_z^2 = \dots = I_z^{n_e} \quad (56)$$

$$E = E^1 = E^2 = \dots = E^{n_e} \quad (57)$$

Table 1은 보의 무차원 각속도가 $\bar{\omega} = 100$ 이고 $\delta = 1$ 일 경우 요소수의 증가에 따른 고유진동수들의 수렴현상을 보여주고 있다. 요소수의 증가에 따라 고유진동수가 빠르게 수렴에 도달하는 것을 볼 수 있으며 요소수가 9개 일 때와 10개일 때는 서로 0.1% 정도의 오차를 보여주고 있다. 본 논문에서는 이를 충분한 수렴으로 간주하여 참고문헌들과의 결과 비교를 위해 10개의 보요소를 사용하여 수치해석을 수행하였다.

본 논문에서 제시한 방법에 의해 구해진 수치해석 결과의 정확성과 신뢰성을 검증하기 위해 참고문헌 (3)과 (8)에 의한 결과를 인용한다. Table 2는 회전 각속도 및 회전 반경비의 증가에 따른 첫 번째와 두 번째 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. 참고문헌 (3)과의 해석결과 비교를 통해 제안된 해석방법에 의한 결과는 참고문헌의 해석결과와 최대 0.02%의 편차를 보이고 있다.

Table 1 Natural frequency convergence: $\delta = 1$, $\bar{\omega} = 100$

No. of element	1st freq.	2nd freq.	3rd freq.
1	131.60	371.36	*****
2	127.78	368.99	608.26
3	125.79	365.96	599.98
4	124.73	364.12	595.84
5	124.09	362.96	593.12
6	123.67	362.18	591.36
7	123.37	361.63	590.20
8	123.15	361.23	589.41
9	122.98	360.93	588.85
10	122.85	360.69	588.43

Table 2 Comparison of the natural frequencies

		$\bar{\omega} = 2$		$\bar{\omega} = 10$	
		Present	Ref. (3)	Present	Ref. (3)
$\delta = 0$	1st freq.	3.62	3.61	5.05	5.05
	2nd freq.	22.53	22.53	32.12	32.12
$\delta = 1$	1st freq.	4.40	4.40	13.26	13.26
	2nd freq.	23.28	23.28	43.23	43.23
$\delta = 5$	1st freq.	6.65	6.65	27.74	27.73
	2nd freq.	26.07	26.07	71.41	71.39

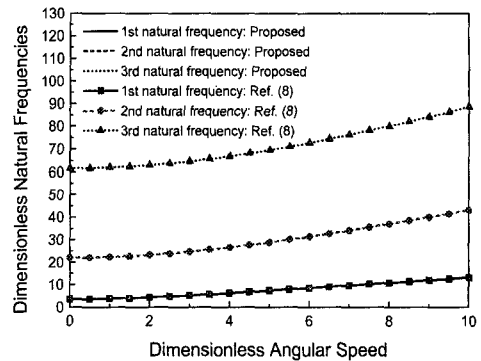


Fig. 3 Natural frequency variation vs. angular speed

Fig. 3은 $\delta = 1.0$ 인 경우에 대해 본 연구에서 제안한 유한요소법에 기초한 해석방법과 참고문헌 (8)에 제시된 가상모드법에 기초한 해석방법을 이용하여 구한 무차원 각속도의 증가에 따른 가장 낮은 세 개의 고유진동수의 궤적을 보여주고 있다. 해석결과로부터 참고문헌 (8)에 의한 해석결과와 본 논문에서 제시한 해석방법에 의한 해석결과가 서로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

이상의 참고문헌들과의 해석결과 비교를 통해 본 논문에서 제안된 해석방법이 수치해석의 정확성을 가짐을 알 수 있다.

4. 결론

참고문헌 (8)에 제시된 보의 회전에 의한 기하학적 강성효과를 고려한 모델링 방법과 유한 요소법을 사용하여 회전 외팔보의 진동특성을 예측하기 위한 진동방정식이 유도되었으며 이를 근간으로 해석결과를 도출하였다. 본 연구를 통해 제안된 해석방법은 기존의 선형 유한 요소법에 사용되는 질량행렬과 탄성에너지에 의한 강성행렬을 그대로 사용할 수 있어 기존의 상용 해석프로그램으로부터 쉽게 구할 수 있다. 제안된 해석방법에 의한 해석결과와 기존의 참고문헌들의 해석결과의 비교를 통해 본 논문에서 제시된 해석방법이 해석결과의 신뢰성과 정확성을 지님을 알 수 있다. 본 논문에서 제시한 유한요소법에 기초한 해석 방법은 단면형상이 길이에 따라 다양하게 변하는 구조물의 진동해석에 효과적으로 사용될 수 있는 것으로 사료된다.

참고문헌

- (1) Southwell, R. V. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," *British A.R.C. Reports and Memoranda*, No. 766.
- (2) Schilhansl, M. J., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech.*

- Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, pp. 28~30.
- (3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, Vol. 56, pp. 175~185.
- (4) Hoa, S. V., 1979, "Vibration of a Rotating Beam with Tip Mass," *J. Sound and Vibration*, Vol. 67, pp. 369~381.
- (5) Kuo, Y. H., Wu, T. H., and Lee, S. Y., 1994, "Bending Vibration of a Rotating Non-uniform Beam with Tip Mass and an Elastically Restrained Root," *Computer & Structure*, Vol. 22, No. 2, pp. 229~236.
- (6) Yokoyama, T., 1988, "Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beams," *Int. J. of Mech. Sci.*, Vol. 30, No. 10, pp. 743~755.
- (7) Simo, J. C. and Vu-Quoc, L., 1987, "The Role of Non-linear Theories in Transient Analysis of Flexible Structures," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 119, No. 3, pp.487~508.
- (8) Yoo, H. H. and Shin, S. H., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 212, No. 5, pp.807~828.
- (9) Petyt, M., 1990, *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, Cambridge University Press.
- (10) Kane, T. R. and Levinson, D. A., 1985, *Dynamics: Theory and Applications*, McGraw Hill Book Co.